ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 3(3), 2010, с. 85–91

УДК 51-77

С. А. Амелькин, О. С. Иванова

Математическая модель процесса передачи информации в экономической макросистеме

Аннотация. Одним из важных ресурсов в экономических макросистемах является информация. Однако, для моделирования экономических систем, в которых возможен обмен информацией между экономическими агентами, требуется составить модель, учитывающую свойства информации, как ресурса; прежде всего, составить уравнения баланса. В статье представлена такая модель и, на ее основе, решена задача о предельных возможностях обмена информации между двумя подсистемами в замкнутой системе.

Ключевые слова и фразы: экономические макросистемы, передача информации.

1. Введение

Использование макросистемного подхода к процессам ресурсообмена позволило получить оценки эффективности функционирования термодинамических и экономических систем в условиях ограниченной продолжительности (или интенсивности) протекающих в них процессов [1]. Эти процессы представляют собой процессы ресурсообмена, причем ресурсы подчиняются закону сохранения: общий запас ресурса в замкнутой системе во времени не изменяется. Это означает что в ходе ресурсмообмена между двумя подсистемами A и B, запасы ресурса N_A и N_B связаны соотношением

$$\frac{dN_A}{dt} = -\frac{dN_B}{dt}. \tag{1}$$

Однако, существует ресурс, для которого уравнение (1) не выполняется: этот ресурс — информация. Действительно, если подсистема A передает информацию подсистеме B, то запас информации у A не уменьшается, а у B — растет. Вместе с тем, общее количество семантической информации [2] в системе остается неизменным, изменяется только распределение информации по подсистемам. Далее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №10-06-00161а.

рассмотрена математическая модель системы, в которой происходит обмен информацией и предложены показатели эффективности передачи информации, учитывающие ограничение на продолжительность процесса обмена. С использованием этой модели получены условия оптимальности для задачи определения интенсивности рекламной деятельности предприятия.

2. Макросистемный подход к описанию процессов обмена

Рассмотрим систему, состоящую из подсистем, таких что внутри каждой из подсистем процессов обмена ресурсами не наблюдается. Подсистемы могут быть однородными или состоять из элементов, находящихся между собой в состоянии равновесия при любом изменении запасов ресурсов. Такая система называется макросистемой [1]. Подсистемы обладают запасами ресурсов, эти запасы изменяются за счет ресурсообмена между подсистемами. будем предполагать систему замкнутой, в такой системе не существует обмена ресурсами между системой и ее окружением.

Для построения математической модели макросистемы требуется [1]:

- выделить среди переменных, характеризующих подсистемы, экстенсивные и интенсивные переменные;
- записать для подсистем уравнения состояния, связывающие экстенсивные переменные, и найти выражения, позволяющие с помощью уравнения состояния определить интенсивные переменные;
- выразить через интенсивные переменные величины потоков ресурсов между подсистемами;
- записать систему балансовых уравнений; среди этих уравнений выделить одно, содержащее неотрицательное слагаемое, характеризующее необратимость процесса.

Используя такую методику, рассмотрим систему передачи информации, как макросистему.

3. Математическая модель передачи информации

Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем A и B, обменивающихся друг с другом информацией. Каждая из подсистем заинтересована в решении определенных задач и характеризуется функцией P, описывающей результативность решения (экономический эффект, вероятность решения задачи и т. д.) в зависимости от имеющейся у подсистемы информации. В зависимости от вида этой функции подсистема заинтересована в передаче, получении или охране информации от другой подсистемы.

Пусть подсистема A передает информацию подсистеме B. Объем информации, находящийся в распоряжении подсистем можно разделить на

- информацию, которая имеется только у подсистемы i ($i \in \{A, B\}$); обозначим запас такой информации K_i;
- информацию, переданную подсистеме B; обозначим количество этой информации — J_A;
- информацию, которая воспринята подсистемой B (обозначим количество такой информации I) - эта информация является общей для подсистем A и B.

Результативность решения задач подсистемой A зависит от информации, имеющейся в ее распоряжении и переданной информации подсистеме B, однако, эта подсистема не может контролировать восприятие информации подсистемой B. Поэтому целесообразно использовать оценку результативности подсистемой A, так что $P_A = P_A(K_A, J_A)$. Для подсистемы B зависимость результативности решения задач $P_B = P_B(K_B, I)$.

В замкнутой системе количества информации $K_A + J_A$, K_B не изменяются во времени, поэтому по одному аргументу из уравнений состояния можно сократить. Таким образом, уравнения состояния подсистем A, B, можно записать как

$$P_A = P_A(J_A) \quad P_B = P_B(I). \tag{2}$$

Введем также величину S_A, представляющую собой потери информации, то есть часть информации, которая была передана подсистемой A, но не воспринята подсистемой B.

Изменения величины P_i $(i \in \{A, B\})$ за счет обмена информацией представляют собой ценность информации [3]:

$$v_A = \frac{dP_A}{dJ_A}, \quad v_B = \frac{dP_B}{dI}. \tag{3}$$

Положительное значение v_i $i \in \{A, B\}$ соответствует положительной мотивации i-ой подсистемы к обмену информацией, в случае, когда $v_i < 0$, i-ая подсистема препятствует передаче или приему информации. Поэтому интенсивность потока информации $q_A(v_A, v_B)$ можно представить в простейшем случае, как

$$q_A(v_A, v_B) = \alpha(v_A + v_B). \tag{4}$$

где α — размерный коэффициент пропорциональности.

Интенсивность потока информации q_A определяет изменение запасов информации у подсистемы A:

$$\frac{dJ_A}{dt} = -\frac{dK_A}{dt} = q_A(v_A, v_B). \tag{5}$$

Интенсивность получения информации подсистемой B $q_B < q_A(v_A, v_B)$, так как существует доля информации, не воспринимаемая получателем [4]. Эта доля возрастает с увеличением интенсивности информационного потока. При обратимом процессе обмена информацией, когда $q_A = 0$ вся переданная информация может быть воспринята; в случае, когда $q_A \to \infty$, доля воспринимаемой информации стремится к нулю:

$$q_B = p(q_A)q_A; \quad \lim_{q_A \to 0} p(q_A) = 1, \quad \lim_{q_A \to \infty} p(q_A) = 0. \tag{6}$$

Величина $p(q_A)$ может иметь вероятностный смысл, как вероятность того, что элементарное количество информации, отправленное подсистеме B, будет ею воспринято. Одной из возможных функций $p(q_A)$, является экспоненциальная

$$p(q_A) = e^{-kq_A}. \tag{7}$$

В каждый момент времени значение p показывает эффективность процесса обмена, однако среднее значение p за все время процесса неинформативно. Для определения показателя эффективности информационного обмена запишем баланс для величины $S_A = J_A - I$:

$$\frac{dS_A}{dt} = (1 - p(q_A))q_A = \sigma > 0. \tag{8}$$

Величина σ представляет собой скорость потерь информации за счет необратимости связанной с восприятием информации. По аналогии с термодинамическими и экономическими системами эту величину можно назвать диссипацией информации.

Нетрудно показать, что величина σ и показатель эффективности p связанны монотонно. Выразим σ через p. Получим

$$\sigma = -\frac{1}{k}(1-p)\ln p. \tag{9}$$

Производная $\dfrac{d\sigma}{dp} = -\dfrac{1}{kp}\left[1 - p(1+\ln p)\right]$ Поскольку $p \in [0,1]$ то $\ln p \leq 0$ и выражение в квадратных скобках всегда положительно. Поэтому $\dfrac{d\sigma}{dp} < 0$ при всех возможных значениях p.

4. Предельная эффективность информационного обмена в замкнутой системе

Информация является одним из основных факторов, влияющих на поведение экономических агентов [5]. Одним из процессов информационного обмена в экономических системах является рекламная деятельность. Задача рекламодателя—обеспечить максимальную эффективность рекламы, при заданном объеме доведенной до потребителя информации о товаре. При этом ценность этой информации для потребителя может меняться (снижаться вплоть до отрицательных значений при недобросовестной рекламе или повышаться, когда информация, содержащаяся в рекламе, совпадает с ожиданиями потребителей):

$$v_B = v_B(I). \tag{10}$$

Это означает, что потребитель рассматривается, как пассивная подсистема с заданной функцией $P_B(I)$, а рекламодатель—как активная подсистема, имеющая возможность произвольно изменять v_A. В качестве критерия оптимальности выберем среднее за промежуток времени τ значение диссипации информации $\bar{\sigma}$. Задачу рекламодателя можно формализовать следующим образом:

$$\bar{\sigma} = \int\limits_0^{\tau} \left[1 - p\Big(q_A\big(v_A, v_B(I)\big)\Big)\right] q_A\big(v_A, v_B(I)\big)dt \to \max_{v_A} \tag{11}$$

при условии

$$(12)\qquad \dot{I} = p\Big(q_A\big(v_A, v_B(I)\big)\Big) q_A\big(v_A, v_B(I)\big), \quad I(0) = I_0, \quad I(\tau) = I_F.$$

Значение I_F задано, так как общее количество доведенной до потребителя информации фиксировано.

Поскольку направление потока информации в ходе процесса не изменяется, можно провести замену переменной интегрирования в задаче (11), (12):

$$(13)\qquad dt = \frac{dI}{p(q_A(v_A, v_B(I)))q_A(v_A, v_B(I))}$$

С учетом этой замены задача примет изопериметрическую форму. Учтем также, что управление v_A не содержится явно в задаче (11), (12). Поэтому, в качестве управления можно использовать поток информации q_A. Перепишем постановку задачи:

$$(14)\qquad \int_{I_0}^{I_F} \frac{1 - p(q_A)}{p(q_A)} dI \to \max_{q_A} \quad \Bigg| \quad \int_{I_0}^{I_F} \frac{dI}{p(q_A) q_A} = \tau\ .$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$(15)\qquad L = \frac{1}{p(q_A)} \left[1 - p(q_A) - \frac{\lambda}{q_A}\right],$$

а условие $\dfrac{dL}{dq_A} = 0$, определяющее оптимальное решение приводит к требованию

$$(16)\qquad \frac{1}{q_A}\left[\frac{1}{E(q_A)} + 1\right] = \frac{1}{\lambda} = \text{const},$$

где $E(q_A) = \dfrac{dp}{dq_A}\dfrac{q_A}{p}$ представляет собой величину эластичности восприятия информации потребителем. Для зависимости $p(q_A)$ вида (7) решение задачи имеет вид

$$\frac{1 - kq_A}{q_A} = \text{const}.$$

Это решение совместно с ограничением на время процесса позволяет найти оптимальную зависимость $v_A(I)$, а с учетом (13) искомую функцию $v_A(t)$.

Список литературы

[1] Цирлин А. М. Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и микроэкономике. Москва : Физматлит, 2003. ↑1, 2

[2] Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. М. : Наука, 1987. ↑1

[3] Харкевич А. А. *О ценности информации* // Проблемы кибернетики. — М. : Физматгиз, 1960. Т. **4**, с. 53–72. ↑3

[4] Plotkin H. Danvin Mashines and the Nature of Knowledge. Harvard : Harvard University Press, 1993. ↑3

[5] Орлов А. И. Эконометрика. М. : «Экзамен», 2002. ↑4

S. Amelkin, O. S. Ivanova. *Mathematical Model of information Exchange Processes in an Economic Macrosystem.*

Abstract. Information is very important resource in economic interaction. But the information is not usual resource, it requires formalization of a model taking account specific features of the information. This model based on balance equations is represented in the paper. A problem on extreme performance of a closed economic system where agents can exchange information is solved using the introduced model.

Key Words and Phrases: economic macrosystem, information exchange.

Поступила в редакцию 20.09.2010. *Образец ссылки на статью:*

С. А. Амелькин, О. С. Иванова. *Математическая модель процесса передачи информации в экономической макросистеме* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2010. № 3(3), с. 85–91. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2010_3_85-91.pdf (дата обращения: 10.10.2010)