



А. А. Ардентов, И. С. Губанов

Моделирование парковки автомобиля с прицепом вдоль путей Маркова-Дубинса и Ридса-Шеппа

Аннотация. Рассмотрены три классические модельные задачи, описывающие оптимальную парковку автомобиля: задача Маркова, задача Дубинса, задача Ридса-Шеппа. Исследованы кинематические законы поведения прицепа при движении автомобиля вдоль рассматриваемых оптимальных путей. В программной среде Mathematica разработан интерфейс, который по граничным условиям строит соответствующий оптимальный путь и анимацию движения автомобиля (с прицепом) вдоль него.

Ключевые слова и фразы: оптимальное управление, задача быстродействия, Wolfram Mathematica, кинематика.

Введение

Рассматривается модель автомобиля,двигающегося по однородной плоскости (ровной горизонтальной поверхности без препятствий). Положение автомобиля на плоскости определяется элементом группы движений плоскости $q = (x, y, \theta) \in \text{SE}(2)$, который соответствует координатам центра автомобиля $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и углу ориентации автомобиля $\theta \in S^1$. В работе формулируется задача наискорейшей парковки автомобиля, т.е. задача перевода автомобиля из заданного начального положения q_0 в некоторое конечное положение q_1 за минимальное время. При этом предполагается, что автомобиль движется вперёд и назад с единичной скоростью, а угловая скорость ограничена по модулю заданной величиной $1/R$, т.е. автомобиль не может двигаться вдоль окружности с радиусом, меньшим R . Таким образом, искомое решение $q(t), t \in [0, T]$ минимизирует не только время, но и расстояние на плоскости (x, y) .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

© А. А. Ардентов, И. С. Губанов, 2019

© Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, 2019

© Программные системы: теория и приложения (дизайн), 2019

 10.25209/2079-3316-2019-10-4-97-110



Решение этой задачи получено Ридсом и Шеппом в 1990 году в работе [?Reeds-Shepp], а соответствующая модель получила впоследствии название машина Ридса-Шеппа. Они показали, что оптимальная траектория может состоять из 48 вариантов последовательного соединения дуг окружностей радиуса R и отрезков прямых линий. Годом позже Суссман и Танг [?Sussmann-Tang] показали, что достаточно рассмотреть 46 вариантов.

Родственная задача исследовалась раньше, в 1957 году Дубинс [?Dubins] рассмотрел аналогичную модель (получившую название машина Дубинса), в которой автомобиль может двигаться только вперёд. Оптимальное решение состоит из 6 вариантов последовательного соединения дуг окружностей и отрезков прямых линий. Однако еще раньше в 1889 году Марков [?Markov] рассмотрел аналогичную модель, в которой конечный угол ориентации автомобиля не фиксирован, при этом он показал, что возможно всего два варианта: дуга окружности и отрезок прямой либо две дуги окружностей.

В данной работе представлен разработанный в программной среде Mathematica интерфейс, включающий в себя решения всех трех задач. Кроме того, в интерфейсе имеется опция добавления к автомобилю прицепа. В зависимости от начального положения прицепа вычисляется закон поведения прицепа вдоль рассматриваемых оптимальных путей для автомобиля.

Интерфейс можно разместить на сайте Wolfram Demonstrations Project, на котором из рассматриваемых моделей представлена только модель Дубинса [?Dubins-link].

1. Постановка задач быстродействия

Опишем модель машины Ридса-Шеппа как следующую задачу оптимального управления. Задана дифференциальная система уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t) \cos \theta(t), \\ \dot{y}(t) = u_1(t) \sin \theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = u_2(t), \end{cases}$$

где $u_1(t), u_2(t)$ есть функции линейной и угловой скоростей автомобиля. Также зафиксирован набор граничных условий

$$(2) \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

$$(3) \quad x(T) = x_1, \quad y(T) = y_1, \quad \theta(T) = \theta_1,$$

а оптимальность в задаче быстродействия соответствует минимизации времени

$$(4) \quad T \rightarrow \min .$$

Также имеются следующие ограничения на искомые оптимальные управления:

$$(5) \quad |u_1(t)| = 1, \quad u_2(t) \leq 1/R,$$

где $R > 0$ некоторая заданная константа.

Отметим, что в задаче Дубинса условие на управление (??) следует заменить на следующее:

$$(6) \quad u_1(t) = 1, \quad u_2(t) \leq 1/R.$$

При этом в задаче Маркова условие на конечную точку (??) следует заменить на следующее:

$$(7) \quad x(T) = x_1, \quad y(T) = y_1.$$

Таким образом, рассматриваются следующие задачи:

- (1) Маркова (??)–(??), (??), (??)–(??);
- (2) Дубинса (??)–(??), (??);
- (3) Ридса-Шеппа (??)–(??).

Мы не будем детально описывать решение каждой задачи, которые подробно описаны в первоисточниках [?Reeds-Shepp, ?Dubins, ?Markov]. Отметим, что при реализации интерфейса использовалось компактное описание решений, представленное в книге [?LaValle, раздел 15.3]. Далее опишем расширение рассматриваемых моделей автомобиля, учитывающее поведение прицепа, добавленного к автомобилю.

2. Поведение прицепа вдоль оптимальных путей

Расширенная модель автомобиля с прицепом описывается дополнительным дифференциальным уравнением на угол ориентации прицепа относительно автомобиля:

$$(8) \quad \dot{\varphi}(t) = -u_1(t) \frac{\sin \varphi(t)}{l_t} - u_2(t) \left(\frac{l_r \cos \varphi(t)}{l_t} + 1 \right),$$

где l_r, l_t суть расстояния от центра робота до точки связки робота с прицепом и от точки связки до центра колесной пары прицепа соответственно.

При движении вдоль прямой линии ($u_1(t) = \pm 1, u_2(t) = 0$) уравнение (??) легко интегрируется:

$$(9) \quad \varphi(t) = 2 \operatorname{arccotg}(e^{\pm t/l_t} \cot \frac{\varphi_0}{2}),$$

где φ_0 есть начальный угол прицепа.

Далее рассмотрим случай движения автомобиля вдоль окружности ($u_1(t) = 1, u_2(t) = \pm 1/R$). Введём обозначение $l_R := l_r^2 - l_t^2 + R^2$. При $l_R > 0, l_r \neq l_t$ уравнение (??) также можно проинтегрировать, получив следующее выражение для угла:

$$(10) \quad \varphi(t) = \pm 2 \operatorname{arctg} \frac{R - \sqrt{l_R} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{l_R} t}{2l_t R} + \operatorname{arctg} \frac{R \mp (l_r - l_t) \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{l_R}} \right)}{l_r - l_t},$$

Далее опишем работу интерфейса, решающего поставленные задачи, и его основные функции.

3. Решение задач в среде Mathematica

3.1. Работа интерфейса

На рисунке ?? представлено рабочее поле разработанного интерфейса. В верхней части расположена панель управления, а в нижней части активная часть плоскости (x, y) , в которой анимируются решения поставленных в разделе ?? задач (Маркова, Дубинса, Ридса-Шеппа).

Для работы интерфейса используются следующие основные элементы управления:

- Таймер **Time** позволяет воспроизводить движения автомобиля (в том числе с прицепом) вдоль найденных путей.
- Ползунок **Radius** дает возможность изменять максимальный угол поворота передних колес автомобиля.
- Существует возможность переключения между задачами Маркова и задачами Дубинса с помощью клавиши **FinalAngle**, что позволяет включать и отключать конечное направление.
- При включенном конечном направлении есть возможность выбора, какую задачу необходимо решить, задачу Дубинса или задачу Ридса-Шеппа, выбрав стиль передвижения **MoveStyle**: \rightarrow или \leftrightarrow соответственно.
- Поскольку при некоторых конфигурациях существует несколько оптимальных решений, была реализована возможность переключения отображения одного или всех возможных путей, с помощью кнопки **AllWays**. Так же при включенном отображении нескольких путей можно переключаться между ними,

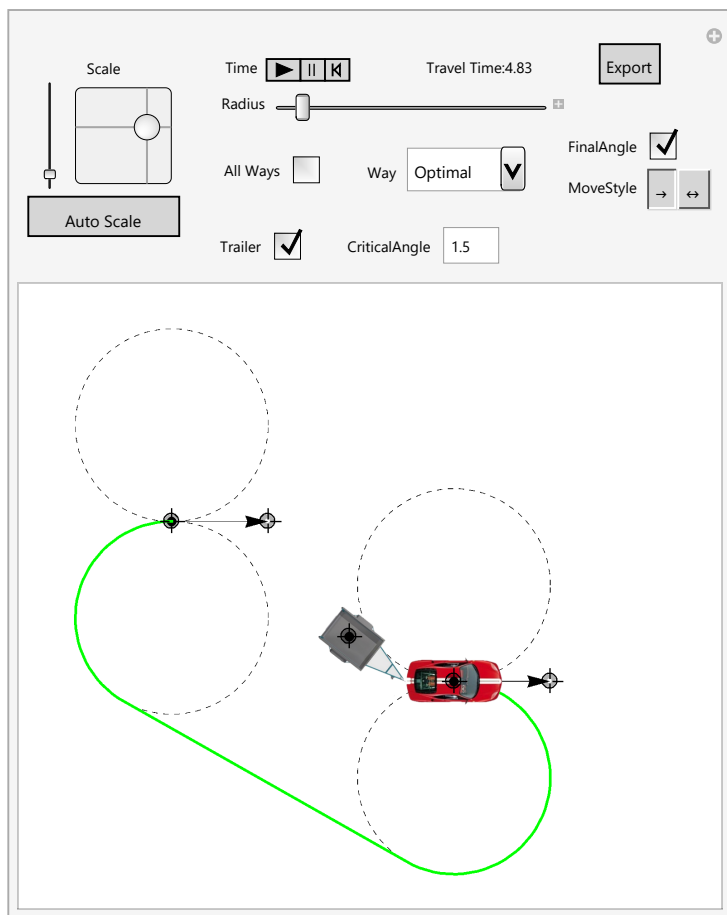


Рисунок 1. Интерфейс программы

используя выпадающее меню **Way**, где можно выбрать любой из интересующих путей и проследить траекторию движения автомобиля.

- Кнопка **Trailer** добавляет к автомобилю прицеп. При включении этой кнопки есть возможность задать угол критического отклонения, который называется **CriticalAngle**. Если прицеп выходит за границы заданного угла, то возникает сообщение об ошибке.
- Изменение граничных условий (x_0, y_0, θ_0) , (x_1, y_1) , θ_1 (если вклю-

чено конечное направление **FinalAngle**), а также начальное положение прицепа φ_0 (при включенной кнопке **Trailer**) осуществляются путем передвижения локатора по видимой части плоскости.

Для удобства работы с программой дополнительно добавлена возможность масштабирования (см. рисунок ??):

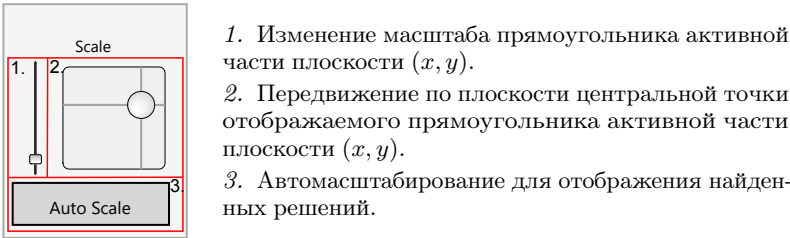


Рисунок 2. Масштаб

3.2. Работа методов

Для работы интерфейса были разработаны три основные процедуры Markov, Dubins и Reeds.

Основная логика работы у всех методов одинаковая. Методы отличаются только количеством путей и способом передвижения автомобиля. Рассмотрим все возможные способы передвижения для трех задач.

Для задачи Маркова существует всего два возможных типа движения [?Markov]: по стартовой окружности (C_1) и прямой (S) либо по стартовой окружности и вспомогательной окружности (C_H). Автомобиль может начинать свое движение как влево (L), так и вправо (R), итого имеем всего 4 возможных пути (см. таблицу ??). Для задачи Дубинса, помимо стартовой окружности есть еще конечная окружность (C_2), и как следствие существует 6 возможных путей (см. таблицу ??).

Таблица 1. Классификация путей

тип	пути	тип	пути
C_1S	LS, RS	C_1SC_2	$LSL, RSR,$ LSR, RSL
C_1C_H	LR, RL	$C_1C_HC_2$	LRL, RLR

(a) Маркова

(b) Дубинса

В задаче Ридса-Шеппа автомобиль может двигаться в обе стороны, поэтому для описания всех маршрутов воспользуемся следующими обозначениями: вперед $+$, назад $-$ и смена направления $|$. В таблице ?? приведено описание всех возможных путей, согласно работе [?Reeds-Shepp].

ТАБЛИЦА 2. Классификация путей Ридса-Шеппа

тип	пути
$C_1 C_H C_2$	$L^+R^-L^+, L^-R^+L^-, R^+L^-R^+, R^-L^+R^-$
$C_1C_H C_2$	$L^+R^+L^-, L^-R^-L^+, R^+L^+R^-, R^-L^-R^+$
$C_1 C_HC_2$	$L^+R^-L^-, L^-R^+L^+, R^+L^-R^-, R^-L^+R^+$
C_1SC_2	$L^+S^+L^+, L^-S^-L^-, R^+S^+R^+, R^-S^-R^-,$ $L^+S^+R^+, L^-S^-R^-, R^+S^+L^+, R^-S^-L^-$
$C_1C_{H_1} C_{H_2}C_2$	$L^+R^+L^-R^-, L^-R^-L^+R^+,$ $R^+L^+R^-L^-, R^-L^-R^+L^+$
$C_1 C_{H_1}C_{H_2} C_2$	$L^+R^-L^-R^+, L^-R^+L^+R^-,$ $R^+L^-R^-L^+, R^-L^+R^+L^-$
$C_1 C_HSC_2$	$L^+R^-S^-L^-, L^-R^+S^+L^+,$ $L^+R^-S^-R^-, L^-R^+S^+R^+,$ $R^+L^-S^-R^-, R^-L^+S^+R^+,$ $R^+L^-S^-L^-, R^-L^+S^+L^+$
$C_1SC_H C_2$	$L^+S^+R^+L^-, L^-S^-R^-L^+,$ $L^+S^+L^+R^-, L^-S^-L^-R^+,$ $R^+S^+L^+R^-, R^-S^-L^-R^+,$ $R^+S^+R^+L^-, R^-S^-R^-L^+$
$C_1 C_{H_1}SC_{H_2} C_2$	$L^+R^-S^-L^-R^+, L^-R^+S^+L^+R^+,$ $R^+L^-S^-R^-L^+, R^-L^+S^+R^+L^-$

В таблицах ??,?? представлены логические и оптимальные ограничения. В таблицах используются следующие обозначения: $O_{C_1}, O_{C_2}, O_{C_H}$ суть центры окружностей C_1, C_2, C_H соответственно, $t_{C_1}, t_{C_2}, t_{C_H}$ ($t_{C_{H_1}}, t_{C_{H_2}}$) суть нормированные длины дуг окружностей, выраженные в угловых координатах, т.е. 2π соответствует длине всей окружности.

Прежде чем перейти к объяснению метода реализации процедур, необходимо уточнить, что существует 3 состояния пути:

1. Путь не существует (не выполняются условия из таблицы ??).
2. Путь существует, но заведомо не оптимален (справедливы условия таблицы ??, но не выполнены условия таблицы ??).
3. Путь существует и возможно оптимален (выполнены условия обеих таблиц ?? и ??).

ТАБЛИЦА 3. Описание условий существования путей

тип	пути	Логические условия
<i>Марков:</i>		
C_1S	все	$d(O_{C_1}, (x_1, y_1)) \geq \text{Radius}$
C_1C_H	все	$d(O_{C_1}, (x_1, y_1)) \leq 3\text{Radius}$
<i>Дубинс:</i>		
C_1SC_2	LSL, RSR	True
	LSR, RSL	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \geq 2\text{Radius}$
$C_1C_HC_2$	все	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) < 4\text{Radius}$
<i>Ридс-Шенн:</i>		
$C_1C_HC_2$	все	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \leq 4\text{Radius}$
C_1SC_2	LSL, RSR	True
	LSR, RSL	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) > 2\text{Radius}$
$C_1C_{H_1} C_{H_2}C_2$	все	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \leq 6\text{Radius}$
$C_1 C_{H_1}C_{H_2} C_2$	все	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \in [2\text{Radius}, 6\text{Radius}]$
$C_1 C_HSC_2$	$LRLS, RLRS$	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \geq 3\text{Radius}$
	$LRSR, RLRL$	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \geq 2\text{Radius}$
$C_1SC_H C_2$	$LSLR, RSRL$	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \geq 2\text{Radius}$
	$LSRL, RSLR$	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \geq 3\text{Radius}$
$C_1 C_{H_1}SC_{H_2} C_2$	все	$d(O_{C_1}, O_{C_2}) \geq 4.5\text{Radius}$

В зависимости от состояния пути выпадающее меню Way будет изменяться. В первом случае номер пути будет удален из списка. Во втором случае номер пути в списке будет отмечен красным цветом, но путь будет отображаться при условии, что выбран именно этот путь во вкладке Way. В третьем номер пути останется в списке без изменений.

Движение автомобиля осуществляется с единичной скоростью, так что длина дуги окружности соответствует времени прохождения отрезка.

После вызова процедуры, которая отрисовывает выбранный путь, на выходе будут получены следующие данные: время, за которое автомобиль достигнет конечной точки, и состояние пути либо маршрут, либо движение автомобиля.

Построение маршрута осуществляется по одному принципу, отличающемуся только точки касания, рассмотрим на примере задачи Маркова более подробно.

Для движения C_1S необходима касательная, то есть два отрезка пути разделяет одна точка касания, следовательно, зная её, программа

ТАБЛИЦА 4. Описание условий оптимальности путей

тип пути	Условия оптимальности
<i>Марков:</i> C_1C_H	$d(O_{C_1}, (x_1, y_1)) < \text{Radius}$
<i>Дубинс:</i> $C_1C_HC_2$	$\pi \leq t_{C_H} \leq 2\pi$
<i>Ридс-Шенн:</i> $C_1 C_H C_2$	$t_{C_1}, t_{C_H}, t_{C_2} \in [0, \pi]$
$C_1 C_HC_2, C_1C_H C_2$	$t_{C_H} \in [0, \frac{\pi}{2}]; t_{C_1}, t_{C_2} \in [0, t_{C_H}]$
C_1SC_2	$t_{C_1}, t_{C_2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$C_1C_{H_1} C_{H_2}C_2, C_1SC_H C_2$	$t_{C_{H_1}} = t_{C_{H_2}} \in [0, \frac{\pi}{2}]; t_{C_1}, t_{C_2} \in [0, t_{C_{H_1}}]$
$C_1 C_HSC_2, C_1SC_H C_2$	$t_{C_1}, t_{C_2} \in [0, \frac{\pi}{2}], t_{C_H} = \frac{\pi}{2}$
$C_1 C_{H_1}SC_{H_2} C_2$	$t_{C_1}, t_{C_2} \in [0, \frac{\pi}{2}], t_{C_{H_1}} = t_{C_{H_2}} = \frac{\pi}{2}$

рисует дугу с центром O_{C_1} от стартовой точки до точки касания, далее прямую от точки касания до конечной точки.

Однако для движения по C_1C_H используется вспомогательная окружность. Два отрезка пути также разделяет точка касания, но необходимо знать еще и центр O_{C_H} . В этом случае программа рисует дугу с центром O_{C_1} от стартовой точки до точки касания, а далее дугу с центром O_{C_H} от точки касания до конечной точки.

Как следствие, получаем отличие в возвращаемых значениях, которые используются для подсчета времени. Это либо точки касания, либо центр окружности и точка касания.

Дальнейшие вычисления происходят по аналогичному алгоритму. Рассчитываются два времени: t_{C_1} и t_S или же t_{C_H} , сумма которых дает общее время t_0 . Движение осуществляется по первому отрезку пока время не примет значение t_{C_1} и по второму отрезку от t_{C_1} до t_0 .

Для остальных методов может варьироваться количество отрезков пути. Ниже представлена таблица процедур, определяющих точки касания (P) для всех возможных методов.

Рассмотрим принцип работы процедур *Marcov*, *Dubins* и *Reeds* на задаче Дубинса.

При начальном положении $\text{Time} = 0$ вычисляются все 6 времен и состояния путей, далее находится минимальное время из всех возможных, и определяется, какой из путей соответствует этому времени.

Таблица 5. Описание процедур определения точек касаний в методах

Вход	Тип пути	Название	Выход
<i>Марков:</i>			
Point, Center, Radius, Side			
	C_1S	TangentToCircle	P_1
	C_1C_H	CircleToCircle	O_{C_H}, P_1
<i>Дубинс:</i>			
Center1, Center2, Radius, Side			
	C_1SC_2 (LSL или RSR)	OuterTangent	P_1, P_2
	C_1SC_2 (LSR или RSL)	InnerTangent	P_1, P_2
	$C_1C_HC_2$	CircleToDoubleCircle	O_{C_H}, P_1, P_2
<i>Ридс-Шенн:</i>			
Center1, Center2, Radius, Side			
	$C_1C_HC_2$	CircleToDoubleCircle	O_{C_H}, P_1, P_2
	C_1SC_2 (LSL или RSR)	OuterTangent	P_1, P_2
	C_1SC_2 (LSR или RSL)	InnerTangent	P_1, P_2
Center1, Center2, Radius, MoveStyle, Side			
	$C_1C_{H_1} C_{H_2}C_2$ или $C_1 C_{H_1}C_{H_2} C_2$	DoubleCircle	$O_{C_{H_1}}, O_{C_{H_2}}, P_1, P_H, P_2$
Center1, Center2,			
	Radius, Side, TangentType		
	$C_1 C_HSC_2,$	CircleLine	$O_{C_H}, P_1,$
	$C_1SC_H C_2$	CircleLine	P_H, P_2
Center1, Center2, Radius, Side			
	$C_1 C_{H_1}SC_{H_2} C_2$	LineDoubleCircle	$O_{C_{H_1}}, O_{C_{H_2}}, P_1, P_H, P_2$






Этот путь определяется как оптимальный и отрисовывается. При включенном значении `AllWays`, пути, состояние которых оценивается как возможно оптимальное, отрисовываются полупрозрачным цветом. Далее вызывается процедура движения автомобиля по оптимальному пути. При изменениях значения `Time` отрисовывается новое положение автомобиля.

Соответственно при указании конкретного значения `Way`, сравнения времен проводиться не будет, и оптимальное время примет значение выбранного пути.

Заключение

В данной работе представлена версия интерфейса для моделирования оптимальной парковки автомобиля. Программа разработана в системе Mathematica и в дальнейшем планируется выложить её на сайт Wolfram Demonstrations Project. Кроме рассмотренных путей Маркова-Дубинса и Ридса-Шеппа в интерфейс будут включены новые классы оптимальных траекторий: эластичности Эйлера [`?euler`], субримановы кратчайшие на группе $SE(2)$ [`?SR-SE2`], а также обобщение путей Ридса-Шеппа на субфинслеровы кратчайшие. Будет добавлена опция перепарковки прицепа из заданного начального положения φ_0 в заданное конечное φ_1 на основе алгоритма нильпотентной аппроксимации [`?nilpotent`].

Список литературы

- [1] J. A. Reeds III, L. A. Shepp. "Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards", *Pacific J. Math.*, **145**:2 (1990), pp. 367–393.  ↑
- [2] H. J. Sussmann, G. Tang. *Shortest paths for the Reeds-Shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control*, Report SYCON-91-10, SYCON, 1991, 72 pp.  ↑
- [3] L. E. Dubins. "On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents", *American Journal of Math.*, **79**:3 (1957), pp. 497–516.  ↑
- [4] А. А. Марков. «Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах», *Сообщ. Харьков. матем. общ. 2-я сер.*, **1**:2 (1889), с. 250–276.  ↑
- [5] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*, 1 ed., Cambridge University Press, 2006, ISBN 978-0521862059, 844 pp. ↑
- [6] A. T. Becker, Shiva Shahrokhi. *Shortest path for the dubins car*, December 2017.  ↑
- [7] A. A. Ardentov, Yu. L. Karavaev, K. S. Yefremov. "Euler elasticas for optimal control of the motion of mobile wheeled robots: the problem of

experimental realization”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **24**:3 (2019), pp. 312–328. doi ↑

- [8] Yu. L. Sachkov. “Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM: COCV*, **17**:2 (2011), pp. 293–321. doi ↑

- [9] A. A. Ardentov. “Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21**:7–8 (2016), pp. 775–791. doi ↑

Поступила в редакцию 03.12.2019

Переработана 06.12.2019

Опубликована 11.12.2019

Рекомендовал к публикации

д.ф.-м.н. Ю. Л. Сачков

Пример ссылки на эту публикацию:

А. А. Ардентов, И. С. Губанов. «Моделирование парковки автомобиля с прицепом вдоль путей Маркова-Дубинса и Ридса-Шеппа». *Программные системы: теория и приложения*, 2019, **10**:4(43), с. 97–110.

doi 10.25209/2079-3316-2019-10-4-97-110

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2019_4_97-110.pdf

Об авторах:



Андрей Андреевич Ардентов

Старший научный сотрудник Исследовательского Центра Процесов Управления Института Программных Систем имени А. К. Айламазяна РАН



0000-0001-7808-7597

e-mail: aaa@pereslavl.ru



Иван Сергеевич Губанов

Инженер-исследователь Исследовательского Центра Процесов Управления Института Программных Систем имени А. К. Айламазяна РАН



0000-0003-3393-8313

e-mail: igubanov95@gmail.com

CSCSTI 27.37.17,28.17.19
UDC 004.94:519.711.2

Andrei A. Ardentov, Ivan S. Gubanov. *Modeling of car parking along Markov-Dubins and Reeds-Shepp paths.*

ABSTRACT. We examine three classical model problems to describe optimal car parking: the Markov problem, the Dubins problem, the Reeds-Shepp problem. We investigate the kinematic laws for the trailer when the car is moving along the examined optimal paths. An interface is developed as Mathematica software. It constructs the desired optimal paths and the animation of the car (with a trailer) movement.

Key words and phrases: optimal control, time-minimizing problem, Wolfram Mathematica, kinematic.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 49J21; 97P50, 70B15

References

- [1] J. A. Reeds III, L. A. Shepp. "Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards", *Pacific J. Math.*, **145**:2 (1990), pp. 367–393. doi↑
- [2] H. J. Sussmann, G. Tang. *Shortest paths for the Reeds-Shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control*, Report SYCON-91-10, SYCON, 1991, 72 pp. URL↑
- [3] L. E. Dubins. "On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents", *American Journal of Math.*, **79**:3 (1957), pp. 497–516. doi↑
- [4] A. A. Markov. "Neskol'ko primerov resheniya osobogo roda zadach o naibol'shikh i naimen'shikh velichinakh", *Soobshch. Khar'kov. matem. obshch. 2-ya ser.*, **1**:2 (1889), pp. 250–276. R↑
- [5] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*, 1 ed., Cambridge University Press, 2006, ISBN 978-0521862059, 844 pp.↑
- [6] A. T. Becker, Shiva Shahrokh. *Shortest path for the dubins car*, December 2017. URL↑
- [7] A. A. Ardentov, Yu. L. Karavaev, K. S. Yefremov. "Euler elasticas for optimal control of the motion of mobile wheeled robots: the problem of experimental realization", *Regular and Chaotic Dynamics*, **24**:3 (2019), pp. 312–328. doi↑
- [8] Yu. L. Sachkov. "Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane", *ESAIM: COCV*, **17**:2 (2011), pp. 293–321. doi↑
- [9] A. A. Ardentov. "Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation", *Regular and Chaotic Dynamics*, **21**:7–8 (2016), pp. 775–791. doi↑

This research was performed under Financial support from Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01387) in Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences.

© A. A. ARDENTOV, I. S. GUBANOV, 2019

© AILAMAZYAN PROGRAM SYSTEMS INSTITUTE OF RAS, 2019

© PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS (DESIGN), 2019

doi 10.25209/2079-3316-2019-10-4-97-110



Sample citation of this publication:

Andrei A. Ardentov, Ivan S. Gubanov. “Modeling of car parking along Markov-Dubins and Reeds-Shepp paths”. *Program Systems: Theory and Applications*, 2019, **10**:4(43), pp. 97–110. (*In Russian*).



10.25209/2079-3316-2019-10-4-97-110



http://psta.psiras.ru/read/psta2019_4_97-110.pdf