ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 1(1), 2010, с. 75–84

УДК 51-77

С. А. Амелькин

Предельные возможности активной подсистемы (фирмы) в открытой микроэкономической системе

Аннотация. Рассмотрена экономическая система, состоящая из активной подсистемы (фирмы), обменивающейся двумя ресурсами — товаром и деньгами — с окружением: двумя экономическими резервуарами (рынками) с разными оценками товара. Рассмотрены случаи, когда оценки рынков постоянны (стационарный режим), и когда задано распределение оценки одного из рынков (нестационарный режим). Получены выражения для максимальной прибыли фирмы и максимальной рентабельности при заданной прибыли. Для нестационарного режима рассмотрена также задача о минимизации риска убытков фирмы. Для этой задачи получены условия оптимальности.

Ключевые слова и фразы: экономические макросистемы, предельные возможности.

1. Введение

Традиционно предполагается, что целью деятельности фирмы является получение наибольшей прибыли [1]. Однако, результаты деятельности фирмы могут быть оценены с помощью других критериев, учитывающих не только интенсивность целевого потока, но и условия при которых такая интенсивность может быть достигнута. К таким критериям, прежде всего относится рентабельность производства — отношение прибыли к производственным издержкам. И прибыль, и рентабельность удобны в том случае, когда экономическая система, в которой функционирует фирма, стационарна, т. е. ее параметров не изменяются во времени. В противном случае прибыль и рентабельность будут зависеть от значений этих параметров. В реальных условиях параметры экономической системы требуется прогнозировать, поэтому в экономических расчетах их можно представить, как случайные величины. Даже в условиях, когда известны

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №10-06-00161а.

все распределения этих случайных величин, фирма несет риск, связанный с возможностью убытков (отрицательной прибыли) при выбранной ценовой политике. Так, наряду с критериями: прибылью и рентабельностью, которые в нестационарном случае также случайны и могут быть представлены через математическое ожидание и дисперсию, требуется определить и величину риска - вероятность того, что прибыль фирмы окажется отрицательной. Далее рассмотрены две задачи: для стационарного случая определить зависимость между предельными значениями прибыли и рентабельности; для нестационарного случая определить зависимость между предельными значениями прибыли, рентабельности и риска.Решение этих задач представляют собой множества Парето для многокритериальных задач, описывающих результативность деятельности фирмы в различных условиях.

2. Описание модели.

Рассмотрим открытую экономическую систему, представляющую собой активную подсистему (фирму) [2], обменивающуюся ресурсами — товаром и деньгами — с окружением. Окружение системы представляет собой два экономических резервуара (рынка) с постоянными оценками v_1, v_2 $(v_2 > v_1)$.Интенсивность обмена ресурсами g_1, g_2 между фирмой и рынками зависит от разности между оценкой v_i рынка и ценой p_i, устанавливаемой фирмой на товары $i \in \{1, 2\}$. Будем предполагать эти зависимости линейными:

$$
\begin{array}{lll}
g_1 = \alpha_1(p_1 - v_1) & — & \text{интенсивность покупки товара:} \\
 & & \text{функция предложения} \\
g_2 = \alpha_2(v_2 - p_2) & — & \text{интенсивность продажи товара:} \\
 & & \text{функция спроса.}
\end{array}
\tag{1}
$$

Как в любой экономической системе, обмен между системой и окружением производится двумя ресурсами. Интенсивности потоков денег, противоположно направленных потокам товара, равны $p_1 g_1$ и $p_2 g_2$, соответственно. Эти потоки представляют собой производственные издержки и доход — выручку от продажи товара. Фирма характеризуется производственной функцией — зависимостью выпуска продукции от интенсивности покупки сырья $g_2(g_1)$. Назовем производственным отношением функцию

$$\frac{g_2(g_1)}{g_1} = \phi(g_1). \tag{2}$$

Если запас готовой продукции измерять в единицах запаса сырья, то производственное отношение можно принять равным единице. Тогда уравнения материального и финансового балансов запишутся в виде:

$$g_1 = g_2 = g \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1(p_1 - v_1) = \alpha_2(v_2 - p_2); \tag{3}$$

$$\pi = p_2 g_2 - p_1 g_1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi = \alpha_1(p_2 - p_1)(p_1 - v_1). \tag{4}$$

Здесь π — прибыль, получаемая фирмой.

3. Стационарный режим

Рассмотрим стационарный режим, когда параметры окружения системы — оценки v_1 и v_2 — постоянны. Решим две задачи: в первой единственным критерием является прибыль фирмы, во второй ищем максимум рентабельности при заданной прибыли.

3.1. Условия максимума прибыли фирмы

Рассмотрим задачу поиска таких цен p_1, p_2 которые соответствуют наибольшей прибыли фирмы:

$$\pi(p_1, p_2) \to \max_{p_1, p_2}. \tag{5}$$

На множество допустимых решений задачи наложим ограничение (3), соответствующее условию отсутствия складов товаров на входе и выходе фирмы (все закупленное сырье идет сразу на переработку, вся произведенная продукция сразу идет на продажу). Для линейных функций спроса и предложения удобно выразить одну из цен через другую (например p_2 через p_1) и, тем самым, свести задачу (5), (3) к безусловной:

$$\begin{aligned} p_2 &= v_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(v_1 - p_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \pi(p_1) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Big(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) p_1\Big)(p_1 - v_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим

$$\beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)}, \qquad p_0 = \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Величина p_0 соответствует цене, котораая установится при обмене ресурсами между экономическими резервуарами, с заданными (3) функциями спроса и предложения, в отсутствие фирмы: $p_1 < p_0 < p_2$ [2]. С учетом этих обозначений задача (5), (3) перепишется в виде:

$$\pi = \frac{1}{\beta}(p_0 - p_1)(p_1 - v_1) \to \max_{p_1}. \tag{7}$$

Необходимое условие оптимальности $d\pi/dp_1 = 0$ приводит к решению:

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{v_1 + p_0}{2}, \qquad p_2^* = \dfrac{v_2 + p_0}{2}, \\[2ex] \pi^* = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{(p_0 - v_1)^2}{4} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\dfrac{(v_2 - v_1)^2}{4}. \end{cases} \tag{8}$$

Этот результат известен и приведен в [3]. Рентабельность, соответствующая максимальной прибыли, определяется любым из следующих выражений:

$$\begin{aligned} \rho^* = \frac{\pi^*}{p_1^* g(p_1^*)} &= \frac{p_2^* - p_1^*}{p_1^*}\frac{(v_2 - v_1)}{p_0 + v_1} = \\ = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0 - v_1}{p_0 + v_1}\right) &= \frac{v_2 - v_1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}(v_2 - v_1) + 2v_1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Это монотонно возрастающая функция от разности $v_2 - v_1$, такая, что

$$\begin{cases} \lim\limits_{v_2 - v_1 \to \infty} \rho^* = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} > 1, \\ \rho^* = 1 \text{ при } v_2 - v_1 = 2\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}v_1. \end{cases} \tag{10}$$

3.2. Зависимость рентабельности от прибыли

Рассмотрим теперь, как будет меняться предельное значение рентабельности при фиксированной прибыли $\pi^0 \in [0, \pi^*]$. Для этого надо решить задачу

$$\rho(p_1, p_2) \to \max_{p_1, p_2} \left| \begin{array}{l} \pi(p_1, p_2) = \pi^0, \\ g_1(p_1) = g_2(p_2). \end{array} \right. \tag{11}$$

Однако, число переменных в задаче равно числу ограничений, т. е. степень свободы задачи (11) равна нулю. Это означает, что, используя ограничения, мы можем получить счетное число решений, среди которых выбрать то, которое соответствует максимуму ρ. Действительно, с учетом 3 финансовый баланс фирмы запишется, как

$$(p_0 - p_1)(p_1 - v_1) - \beta\pi^0 = 0. \tag{12}$$

Из этого уравнения, во-первых, можно выразить $p_1(\pi^0)$:

$$p_1(\pi^0) = p_1^* - \sqrt{p_1^{*2} - (p_0 v_1 + \beta\pi^0)}, \tag{13}$$

где p_1^* рассчитывается по формуле (8).Минус в этой формуле связан с тем, что $p_1 < p_1^*$; именно это решение соответствует наибольшей рентабельности.Во-второых, выразив из (12) π^0 и подставив ее в выражение для рентабельности $\rho = \pi^0/(p_1 g)$, получаем:

$$\rho = \frac{\frac{1}{\beta}(p_0 - p_1)(p_1 - v_1)}{\alpha_1 p_1 (p_1 - v_1)} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right). \tag{14}$$

Таким образом, подставляя (13)в (14) получаем

$$\rho(\pi^0) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}\left[\frac{p_0}{p_1^* - \sqrt{p_1^{*2} - (p_0 v_1 + \beta\pi^0)}} - 1\right]. \tag{15}$$

С учетом (8) эту зависимость можно переписать, как

$$\rho(\pi^0) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}\left[\frac{p_0}{p_1^* - \sqrt{\beta(\pi^* - \pi^0)}} - 1\right].$$

Отсюда видно, что при $\pi^0 = \pi^*$ эта зависимость сводится к (9), а при $\pi^0 = 0$ (т. е. при $p_1 = v_1$)

$$\rho(0) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0}{v_1} - 1\right) > \rho(\pi^*). \tag{16}$$

Легко показать, что $\rho(\pi^0)$ является монотонно убывающей функцией при $\pi^0 \in [0, \pi^*)$. Зависимость (15) определяет множество Парето решений задачи

$$\rho(p_1, p_2) \to \max_{p_1, p_2}, \qquad \pi(p_1, p_2) \to \max_{p_1, p_2}$$

при условии (3).

4. Нестационарный режим

Рассмотрим теперь как изменится решение задач о максимуме прибыли и максимуме рентабельности в нестационарном случае, когда параметры рынков случайны. Будем считать, что один из рынков — а именно рынок сырья — нестационарен. Оценка стоимости товара на нем — величина случайная, плотность распределения которой $f(v_1)$ задана, а, следовательно, математическое ожидание $\overline{v}_1$ и дисперсия σ_1^2 — известны. Рассмотрим три задачи определения предельных возможностей фирмы, работающей на нестационарном рынке:

- определить максимальное значение средней прибыли $\overline{\pi}$ (математического ожидания прибыли фирмы);
- определить максимальное значение средней (математического ожидания) рентабельности $\overline{\rho}$, как функции от средней прибыли $\overline{\pi}$;
- определить минимальное значение риска получения убытков, т. е. вероятности $P(\pi < 0)$.

Управлениями во всех задачах являются цены p_1, p_2, устанавливаемые фирмой.

4.1. Условия максимума средней прибыли

Поскольку при любом значении v_1 должны выполняться балансовые уравнения (3), (4), то выражение

$$\pi(v_1, p_1) = \frac{1}{\beta}(p_0(v_1) - p_1)(p_1 - v_1) \tag{17}$$

Описывает зависимость прибыли от независимого параметра v_1 и управления p_1. Задача максимизации средней прибыли с учетом (17) имеет вид:

$$\overline{\pi}(p_1) = \frac{1}{\beta}\left[-p_1^2 + p_1\overline{(p_0(v_1) + v_1)} - \overline{p_0(v_1)v_1}\right] \to \max_{p_1}. \tag{18}$$

Здесь черта сверху обозначает операцию усреднения по множеству V всех возможных значений v_1. Например,

$$\overline{\pi}(p_1) = \int_V \pi(v_1, p_1) f(v_1) dv_1. \tag{19}$$

Необходимое условие оптимальности $d\overline{\pi}/dp_1 = 0$ приводит к уравнению

$$p_1^* = \frac{1}{2}\overline{(p_0(v_1) + v_1)}.$$

Поскольку $p_0(v_1)$ зависит линейно от v_1, решение задачи (18):

$$p_1^* = \frac{p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1}{2} \quad \Rightarrow \quad p_2^* = \frac{p_0(\overline{v}_1) + v_2}{2}. \tag{20}$$

Однако в этом случае

$$\overline{\pi}^* \neq \frac{1}{\beta} \frac{(p_0(\overline{v}_1) - \overline{v}_1)^2}{4}.$$

Действительно, выпишем выражение для средней прибыли и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} \overline{\pi}^* &= \frac{1}{\beta}\left[-\left(\frac{p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1}{2}\right)^2 + \frac{p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1}{2}\left(p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1\right) - \overline{p_0(v_1)v_1}\right] = \\ &= \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1}{2}\right)^2 - \overline{p_0(v_1)v_1}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Учитывая, что дисперсия $\sigma_1^2 = \overline{v_1^2} - \overline{v}_1^2$, выражение (21) можно переписать, как

$$\overline{\pi}^* = \frac{1}{\beta}\left[\frac{(p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1)^2}{4} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\sigma_1^2\right]. \tag{22}$$

Таким образом мы получаем значение максимальной средней прибыли фирмы. Отметим, что $\max \overline{\pi(v_1)} < \max \pi(\overline{v}_1)$, хотя

$$\frac{d^2\pi^*}{dv_1^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} > 0.$$

4.2. Зависимость средней рентабельности от средней прибыли

Задача о максимуме средней рентабельности при заданной средней прибыли с учетом материального баланса системы, так же, как и в стационарном случае, имеет нулевую степень свободы. Из уравнений (3), (4) с учетом усреднения можно вывести зависимость $\overline{\rho}(\overline{\pi}^0)$, где $\overline{\pi}^0$ — заданная средняя прибыль фирмы. Действительно решая уравнение

$$p_1^2 - p_1(p_0(\overline{v}_1) + \overline{v}_1) + (\overline{p_0(v_1)v_1} + \overline{\pi}^0\beta) = 0$$

Находим зависимость $p_1(\overline{\pi}^0)$:

$$p_1(\overline{\pi}^0) = p_1^* - \sqrt{p_1^{*2} - (\overline{p_0 v_1} + \beta\overline{\pi}^0)}, \tag{23}$$

где p_1^* рассчитывается по (20).Поскольку p_1 однозначно определяется значением средней прибыли, а рентабельность $\rho(v_1, \overline{\pi}^0)$

$$\begin{aligned} \rho(v_1,\overline{\pi}^0) &= \frac{\pi(v_1, p_1(\overline{\pi}^0))}{p_1(\overline{\pi}^0)g(p_1(\overline{\pi}^0))} = \\ &= \frac{\frac{1}{\beta}(p_0(v_1)-p_1(\overline{\pi}^0))(p_1(\overline{\pi}^0)-v_1)}{\alpha_1 p_1(\overline{\pi}^0)(p_1(\overline{\pi}^0)-v_1)} = \\ &= \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0(v_1)}{p_1(\overline{\pi}^0)}-1\right) \end{aligned} \tag{24}$$

линейно зависит от v_1, то средняя рентабельность

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(\overline{\pi}^0) &= \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0(\overline{v}_1)}{p_1(\overline{\pi}^0)}-1\right) \\ &= \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0(\overline{v}_1)}{p_1^*-\sqrt{p_1^{*2}-\left(\overline{p_0(v_1)v_1}+\beta\overline{\pi}^0\right)}}-1\right). \end{aligned} \tag{25}$$

С учетом(21) эту зависимость можно переписать в виде (аналогично случаю стационарного рынка):

$$\rho(\overline{\pi}^0) = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}\left(\frac{p_0(\overline{v}_1)}{p_1^*-\sqrt{\beta(\overline{\pi}^*-\overline{\pi}^0)}}-1\right). \tag{26}$$

Отсюда видно, что

- рентабельность, соответствующая максимальной прибыли, определяется выражением (9) так же, как и для стационарного случая, несмотря на то, что прибыль фирмы при работе на нестационарном рынке меньше, чем соответствующая стационарная прибыль;
- если средняя прибыль фирмы стремится к нулю, то в нестационарном случае рентабельность производства оказывается ниже, чем в стационарном:

$$\min \overline{\rho}(\overline{v}_1, \sigma_1) = \min \rho(\overline{v}_1);$$

$$\max \overline{\rho}(\overline{v}_1, \sigma_1) < \max \rho(\overline{v}_1).$$

4.3. Условие минимизации риска убыточного производства

Рассмотрим теперь задачу выбора таких цен покупки и продажи ресурсов, которые позволят минимизировать риск получения убытков, т. е. вероятность того, что прибыль фирмы будет отрицательна:

$$P(\pi(v_1, p_1) < 0) \to \min_{p_1}. \tag{27}$$

Так же, как и в рассмотренных ранее задачах, используя уравнение материального баланса (3) здесь можно выразить p_2, как функцию p_1, тем самым сведя задачу к безусловной. Поскольку плотность распределения оценки $f(v_1)$ задана, то искомая вероятность равна

$$P(\pi(v_1, p_1) < 0) = 1 - \int\limits_{V_+} f(v_1) dv_1, \tag{28}$$

где V_+ — множество всех оценок v_1, при которых заданная ценовая политика фирмы обеспечивает ей неотрицательную прибыль. Для определения этого множества воспользуемся уравнением финансового баланса фирмы

$$\beta\pi = (p_0(v_1) - p_1)(p_1 - v_1) \tag{29}$$

Относительно v_1 при фиксированной цене p_1 зависимость (29) представляет собой параболу, поэтому область V_+ — это такой отрезок $[\check{v}_1, \hat{v}_1]$, концы которого соответствуют нулевому значению прибыли:

$$\check{v}_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} p_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 < \hat{v}_1 = p_1. \tag{30}$$

Необходимое условие оптимальности для задачи (27) приводит к неравенству:

$$\left[f(p_1) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} f\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} p_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 \right) \right] \delta p_1 \leqslant 0, \tag{31}$$

где δp_1 — допустимая вариация цены p_1. Решение неравенства (31) зависит от вида распределения оценки v_1. Уравнение (31) может быть решено численно. Решение его в общем случае не соответствует условию $\overline{\pi} \to \max$, что означает, что существует такой отрезок $[\check{p}_1, \hat{p}_1]$, на котором увеличение средней прибыли фирмы приводит к увеличению риска получения убытка. На этом отрезке значения прибыли и уровня риска образуют множество Парето решений задачи о предельных возможностях фирмы, работающей на нестационарном рынке.

Список литературы

[1] Samuelson P., Nordhaus W. D. Economics: An Introductory Analysis. Oxford : Oxford University Press, 2005. ↑1

[2] Миронова В. А., Амелькин С. А., Цирлин А. М. Математические методы термодинамики при конечном времени. Москва : Химия, 2000. ↑2, 3.1

[3] Цирлин А. М. Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и микроэкономике. Москва : Физматлит, 2003. ↑3.1

S. Amelkin. *Extreme Performance of an Active Subsystem (a Firm) in an Open Microeconomic System.*

Abstract. An economic system is considered. The system consists of an active subsystem (a firm). There exists exchange between the firm and two economic reservoirs (markets) which are in environment of the system. Two cases are investigated; they are stationary and nonstationary regimes of the system functioning. The parameters of the market are constant in the stationary regime. Parameters of the market in the nonstationary regime are random; their distributions are known. Expressions for maximal profit and maximal profitability at given profit are obtained. Additional problem is considered for nonstationary regime. It is minimization of risks problem. Optimality conditions for this problem are obtained.

Key Words and Phrases: economic macrosystem, extreme performance.

Образец ссылки на статью:

С. А. Амелькин. *Предельные возможности активной подсистемы (фирмы) в открытой микроэкономической системе* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2010. № 1(1), с. 75–84. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2010_1_75-84.pdf