ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 1(5), 2011, с. 19–26

УДК 517.977

Д. О. Трунин

Нелокальное улучшение управлений в полиномиальных по состоянию системах с терминальными ограничениями

Аннотация. Предлагаются методы нелокального улучшения в классе полиномиальных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Эти методы имеют возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума и не содержат процедуру варьирования управлений.

Ключевые слова и фразы: задача оптимального управления, нелокальное улучшение, терминальные ограничения.

Рассматривается полиномиальная по состоянию задача оптимального управления с частично закрепленным правым концом:

$$\begin{gathered}\dot{x} = f(x,\ u,\ t),\ t \in T = [t_0,\ t_1],\\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\Phi(u) = \langle c,\ x(t_1)\rangle \to \min, \tag{2}$$

$$x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния, $u(t) \in R^r$ — вектор управления, $U \subset R^r$ — компактное множество, $x^0 \in R^n,\ c \in R^n,\ x^1 \in R^m$ — заданные векторы, $c_i = 0,\ i = \overline{1,m}$, интервал T фиксирован. Векторная функция $f(x,\ u,\ t)$ является полиномиальной степени $l \geq 1$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от (u,t) на $R^n \times U \times T$.

Множество доступных управлений имеет следующую структуру

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Будем считать, что каждому доступному управлению $u(t), t \in T$, соответствует единственное решение $x(t) = x(t,u)$ задачи Коши (1), которое определено всюду на T.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-90719-моб_ст).

В задаче (1)–(3) определим множество допустимых управлений

$$W = \{u \in V : x_i(t_1, u) = x_i^1,\ i = \overline{1,m}\}.$$

Введем в рассмотрение нормальный функционал Лагранжа

$$L(u,\ \lambda) = \langle c,\ x(t_1)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i(t_1) - x_i^1). \tag{4}$$

Образуем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi,\ f(x,\ u,\ t)\rangle$$

и стандартную сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t,u), u, t), \tag{5}$$

$$\psi_i(t_1) = -\lambda_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$\psi_j(t_1) = -c_j,\ j = \overline{m+1,n}. \tag{7}$$

Обозначим через $\psi(t, u, \lambda)$ решение задачи Коши (5)–(7) при $u = u(t)$.

Введем отображение

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi, x, v, t),\ \psi \in R^n, x \in R^n, t \in T. \tag{8}$$

Необходимое условие оптимальности — регулярный принцип максимума Понтрягина [1] — с помощью отображения (8) может быть сформулировано в виде:

Если управление $u^* \in W$ оптимально в задаче (1)– (3), то $\exists \lambda^* \in R^m$, такой, что

$$u^*(t) = u^*(\psi(t, u^*, \lambda^*), x(t, u^*), t),\ t \in T. \tag{9}$$

Пусть (u^0, v) пара доступных управлений в задаче (1)–(3).

В аналогии с [2] определим модифицированную сопряженную систему

$$\dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\langle\langle H_x, z\rangle_x,\ z\rangle_x - \ldots - \frac{1}{l!}\langle \ldots \langle\langle H_x, z\rangle_x,\ z\rangle_x \ldots, z\rangle_x, \tag{10}$$

$$p_i(t_1) = -\lambda_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

$$p_j(t_1) = -c_j,\ j = \overline{m+1,n}, \tag{12}$$

где частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t, u^0), u = u^0(t), t$ и $z = x(t, v) - x(t, u^0)$ с решением $p(t) = p(t, u^0, v, \lambda), t \in T$.

Очевидно, что $p(t, u^0, u^0, \lambda) = \psi(t, u^0, \lambda)$.

Рассмотрим приращение функционала Лагранжа (4) на паре доступных управлений $(u^0,\ v)$. В соответствии с формулами, полученными в [2] для задач со свободным правым концом, имеет место точная (без остаточных членов) формула приращения

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t,u^0,v,\lambda), x(t,v), u^0(t), t)dt. \tag{13}$$

Альтернативная формула приращения [2] имеет вид

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t,v,u^0,\lambda), x(t,u^0), u^0(t), t)dt, \tag{14}$$

где $p(t,v,u^0,\lambda)$ – решение модифицированной сопряженной системы (10)–(12) при значениях аргументов $p,\ x = x(t,u^0), u = v(t),\ t$ и $z = x(t,u^0) - x(t,v)$.

Поставим задачу улучшения управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством $\Phi(v) \le \Phi(u^0)$.

Первый метод нелокального улучшения

1. Найдем решение $(x(t),p(t)),\ t \in T$ краевой задачи

$$\dot{x} = f(x,\ u^*(p,x,t),\ t), \tag{15}$$

$$\dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\langle\langle H_x, z\rangle_x,\ z\rangle_x - ... - \frac{1}{l!}\langle ...\langle\langle H_x, z\rangle_x,\ z\rangle_x ..., z\rangle_x,$$

$$x(t_0) = x^0,\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1,m}, \tag{16}$$

$$p_j(t_1) = -c_j,\ j = \overline{m+1,n}, \tag{17}$$

где частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t,u^0), u = u^0(t), t$ и $z = x(t) - x(t,u^0)$.

2. Сформируем управление

$$v(t) = u^*(p(t),x(t),t), t \in T.$$

Предположим, что решение краевой задачи (15)–(17) (возможно, не единственное) существует на T и управление $v(t)$ является кусочно-непрерывной функцией.

Рассмотрим множество управлений на выходе процедуры улучшения

$$V_1(u^0) = \{u \in V : u(t) = u^*(p(t),x(t),t), t \in T\}$$

и сформулируем следующие предложения.

Предложение 1. Если $v \in V_1(u^0)$, то $v \in W$ (управление $v = v(t)$ является допустимым).

Действительно, в силу краевых условий (16) имеем $x_i(t_1) = x_i^1$, $i = \overline{1,m}$, и, так как $x(t) = x(t,v)$, то $v \in W$.

Обоснуем свойство улучшения для выходных управлений.

Предложение 2. Для любого $v \in V_1(u^0), \Phi(v) \leq \Phi(u^0)$.

Действительно, решение $p = p(t)$ краевой задачи (15)–(17) является решением системы дифференциальных уравнений (10) при $u = u^0(t), v = v(t)$ и удовлетворяет краевым условиям (12). Сформируем соответствующий вектор множителей

$$\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_m),\ \ \overline{\lambda}_i = -p_i(t_1), i = \overline{1,m}.$$

Таким образом, условия (11) выполняются и $p(t) = p(t,u^0,v,\overline{\lambda})$.

Согласно формуле приращения (13) управление $v = v(t)$ обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v,\overline{\lambda}) \leq L(u^0,\overline{\lambda}).$$

В силу допустимости управлений u^0, v имеем

$$\Phi(v) \leq \Phi(u^0).$$

С учетом предложений 1, 2 множество $V_1(u^0)$ имеет следующую структуру

$$V_1(u^0) = \{u \in W : u(t) = u^*(p(t,u^0,u,\overline{\lambda}), x(t,u), t), t \in T\}.$$

Предложение 3. Управление $u^0 \in W$ удовлетворяет регулярному принципу максимума тогда и только тогда, когда $u^0 \in V_1(u^0)$.

Действительно, пусть $u^0 \in V_1(u^0)$. Тогда

$$u^0(t) = u^*(p(t,u^0,u^0,\overline{\lambda}), x(t,u^0), t) = u^*(\psi(t,u^0,\overline{\lambda}), x(t,u^0), t)$$

и в силу (9) управление $u^0 = u^0(t)$ удовлетворяет регулярному принципу максимума с вектором множителей $\overline{\lambda}$.

Обратно, пусть управление $u^0 \in W$ удовлетворяет регулярному принципу максимума с вектором множителей $\overline{\lambda}$. Тогда в силу (9) $u^0(t) = u^*(\psi(t,u^0,\overline{\lambda}), x(t,u^0), t) = u^*(p(t,u^0,u^0,\overline{\lambda}), x(t,u^0), t)$, т.е. $u^0 \in V_1(u^0)$.

Следствие 1.

Если краевая задача (15)–(17) не имеет решения, то управление $u^0 = u^0(t)$ не удовлетворяет регулярному принципу максимума.

Свойство неединственности решения краевой задачи (15)–(17) дает возможность улучшения управления u^0, удовлетворяющего принципу максимума.

Следствие 2.

Краевая задача (15)–(17) улучшения управления $u^0 \in W$, удовлетворяющего регулярному принципу максимума, имеет в качестве решения пару функций $(x(t,u^0),\ \psi(t,u^0,\overline{\lambda}))$, $t \in T$.

Это свойство дает возможность строго улучшать управления, удовлетворяющие регулярному принципу максимума, в случае неединственности решения соответствующей краевой задачи.

В случае скалярного управления ($r = 1$) в подклассе линейных по управлению задач можно указать простые условия, при которых имеет место строгое улучшение $\Phi(v) < \Phi(u^0)$.

Формула приращения (13) в данном случае имеет вид

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_T g(p(t,u^0,v,\lambda),x(t,v),t)(v(t)-u^0(t))dt, \tag{18}$$

причем на управлениях $v \in V_1(u^0)$ подынтегральная функция в (18) неотрицательна на T.

Образуем множества

$$T_1 = \{t \in T : g(p(t,u^0,v,\overline{\lambda}),x(t,v),t) \neq 0,\ v \in V_1(u^0)\},$$
$$T_2 = \{t \in T : v(t) \neq u^0(t),\ v \in V_1(u^0)\},$$
$$T_{u^0,v} = T_1 \cap T_2.$$

Предложение 4 (условие строгого улучшения). Если $mes\ T_{u^0,v} > 0$, то $\Phi(v) < \Phi(u^0)$.

Утверждение очевидно в силу формулы (18).

Построим второй метод нелокального улучшения на основе альтернативной формулы приращения (14).

Второй метод нелокального улучшения

1. Сформируем отображение

$$v^*(p,t) = u^*(p,x(t,u^0),t),\ t \in T.$$

2. Найдем решение $(x(t), p(t)),\ t \in T$ краевой задачи

$$\dot{x} = f(x,\ v^*(p,t),\ t), \tag{19}$$

$$\dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\langle\langle H_x, z\rangle_x,\ z\rangle_x - \dots - \frac{1}{l!}\langle \dots \langle\langle H_x, z\rangle_x,\ z\rangle_x \dots, z\rangle_x,$$

$$x(t_0) = x^0,\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1,m}, \tag{20}$$

$$p_j(t_1) = -c_j,\ j = \overline{m+1,n}, \tag{21}$$

где частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t), u = v^*(p,t),\ t$ и $z = x(t,u^0) - x(t)$.

3. Сформируем управление

$$v(t) = v^*(p(t),t),\ t \in T.$$

Предположим, что решение краевой задачи (19)–(21) (возможно, не единственное) существует на T и управление $v(t)$ является кусочно-непрерывной функцией.

Рассмотрим множество управлений на выходе второго метода улучшения

$$V_2(u^0) = \{u \in V : u(t) = v^*(p(t),t), t \in T\}.$$

Имеют место следующие предложения.

Предложение 5. Если $v \in V_2(u^0)$, то $v \in W$ (управление $v = v(t)$ является допустимым).

Действительно, в силу краевых условий (20) имеем $x_i(t_1) = x_i^1$, $i = \overline{1,m}$, и, так как $x(t) = x(t,v)$, то $v \in W$.

Обоснуем свойство улучшения для выходных управлений.

Предложение 6. Для любого $v \in V_2(u^0), \Phi(v) \le \Phi(u^0)$.

Действительно, решение $p = p(t),\ t \in T$ краевой задачи (19)–(21) является решением системы дифференциальных уравнений (10) при $u = v(t), v = u^0(t)$ и удовлетворяет краевым условиям (12). Сформируем соответствующий вектор множителей

$$\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_m),\ \overline{\lambda}_i = -p_i(t_1), i = \overline{1,m}.$$

Таким образом, условия (11) выполняются и $p(t) = p(t, v, u^0, \overline{\lambda})$.

Согласно формуле приращения (14) управление $v = v(t)$ обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v, \overline{\lambda}) \le L(u^0, \overline{\lambda}).$$

В силу допустимости управлений $u^0,\ v$ имеем

$$\Phi(v) \le \Phi(u^0).$$

Далее аналогично первому методу можно сформулировать связь с принципом максимума и дать условия строгого улучшения управлений.

Выделим особенности краевых задач улучшения.

1. Рассматриваемые краевые задачи улучшения разрешимы для управлений u^0, удовлетворяющих регулярному принципу максимума.

2. В случае неединственности решения краевой задачи появляется возможность строго улучшать управления u^0, удовлетворяющие регулярному принципу максимума.

3. Отсутствие решения хотя бы одной краевой задачи означает, что управление u^0 не удовлетворяет регулярному принципу максимума.

4. В краевой задаче (15)–(17) уравнения для сопряженных переменных $p(t)$ являются полиномиальными степени $l-1$ по x и линейными по p.

5. В краевой задаче (19)–(21) уравнения для фазовых переменных $x(t)$ являются полиномиальными степени l по x. Уравнения для сопряженных переменных $p(t)$ являются полиномиальными степени $l-1$ по x.

Последние две особенности краевых задач улучшения, упрощающие их по сравнению с краевой задачей принципа максимума, в которой правые части уравнений для фазовой и сопряженной переменных в общем случае являются разрывными функциями по этим переменным, позволяют применить и обосновать для решения данных краевых задач специальную итерационную процедуру, базирующуюся на известном подходе возмущений [2].

Заключение

Выделим основные свойства построенных методов нелокального улучшения управлений.

(1) Нелокальность улучшения допустимых управлений: отсутствует малый параметр, обеспечивающий близость улучшаемого и улучшающего управлений.

(2) Отсутствие процедуры слабого или игольчатого варьирования.

(3) Возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума (в том числе особых управлений).

Предложенные процедуры указывают на принципиальную возможность осуществления нелокального улучшения на множестве допустимых управлений в рассматриваемом классе задач. Трудоемкость построения улучшающего управления определяется трудоемкостью решения краевой задачи улучшения, которая проще по свойствам гладкости, чем краевая задача принципа максимума. Процедуры имеют возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума, в случае неединственности решения краевой задачи улучшения.

Список литературы

[1] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. — 160 с. ↑[]

[2] Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ : Изд-во БГУ, 2008. — 260 с. ↑[]

D. O. Trunin. *Nonlocal improving controls of polynomial by a state systems with terminal constraints.*

Abstract. Methods of nonlocal improvement in polynomial optimal control problems with terminal constraints are proposed. This methods have a possibility to improve controls, satisfying a maximum principle and not contain procedure of control variation.

Key Words and Phrases: optimal control problem, nonlocal improvement, terminal contraints.

Образец ссылки на статью:

Д. О. Трунин. *Нелокальное улучшение управлений в полиномиальных по состоянию системах с терминальными ограничениями* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 1(5), с. 19–26. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_1_19-26.pdf