ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 2(6), 2011, с. 31–35

УДК 517.977

Е. А. Трушкова

Синтез управления в окрестности приближенного решения задачи с частично закрепленным правым концом

Аннотация. Описан метод улучшения управления в окрестности траектории текущего приближения на основе замены задачи управления с частично закрепленным правым концом более простой линейно–квадратической задачей, для которой решение можно найти в явном аналитическом виде, а полученное управление применить к исходной модели. Рассматривается приложение соответствующего итерационного алгоритма к коррекции простой аппроксимации скользящего режима как обобщенного решения задачи управления.

Ключевые слова и фразы: оптимальное управление, синтез оптимального управления, улучшение управления.

1. Введение

В работе рассматривается задача локально–оптимального синтеза управления с частично фиксированным правым концом. Реализуется подход [1] к ее приближенному решению, состоящий в том, чтобы заменить сложную модель объекта управления более простой моделью, для которой решение можно найти в явном аналитическом виде, а полученное управление применить к исходной модели.

2. Постановка задачи локально–оптимального синтеза

Рассмотрим задачу оптимального управления следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in [t_I, t_F], \tag{1}$$

$$x(t_I) = x_I, \tag{2}$$

$$Qx(t_F) = Qx_F, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00170-а).

$$F\left(\overline{Q}x(t_F)\right) \to \min. \tag{4}$$

Предположим, что известно некоторое приближенное решение $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ задачи (1)–(4), которое не удовлетворяет условию (3). Поставим задачу наилучшего удовлетворения условию (3) (возможно с ухудшением значения функционала $F\left(\overline{Q}x(t_F)\right)$).

Проведем линеаризацию системы (1) в окрестности решения $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ и поставим задачу оптимального управления следующим образом:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + L(t), \quad t \in [t_I, t_F], \tag{5}$$

$$x(t_I) = x_I, \tag{6}$$

$$Qx(t_F) = Qx_F, \tag{7}$$

$$J = \int_{t_I}^{t_F} f_0\left(x(t), u(t)\right) dt \to \min, \tag{8}$$

где

$$A(t) = f_x^T\left(t, \tilde{x}, \tilde{u}\right), \quad B(t) = f_u^T\left(t, \tilde{x}, \tilde{u}\right),$$
$$L(t) = f\left(t, \tilde{x}, \tilde{u}\right) - f_x^T\left(t, \tilde{x}, \tilde{u}\right)\tilde{x} - f_u^T\left(t, \tilde{x}, \tilde{u}\right)\tilde{u},$$
$$f_0(x, u) = (x - \tilde{x})^T M(t)(x - \tilde{x}) + (u - \tilde{u})^T R(t)(u - \tilde{u}),$$

$M(t)$ — непрерывная неотрицательно определенная функциональная матрица, $R(t)$ — непрерывная положительно определенная функциональная матрица, имеющая обратную.

3. Решение задачи локально–оптимального синтеза

Предположим, что решение $(\hat{u}(t), \hat{x}(t))$ задачи оптимального управления (5)–(8) существует. Тогда оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = a(t)x(t) + \tfrac{1}{2}B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) + B(t)\tilde{u}(t) + L(t),\\
&\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) + 2M(t)(x(t) - \tilde{x}(t)),\\
&x(t_I) = x_I, \quad Qx(t_F) = Qx_F, \quad \overline{Q}\psi(t_F) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Общее решение системы (9) можно записать так:

$$x(t) = \Phi_1(t)C + g_1(t), \quad \psi(t) = \Phi_2(t)C + g_2(t),$$

где $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix}$ — фундаментальная матрица однородной системы диференциальных уравнений, соответствующей системе (9), $C = C(t_I, x_I, t_F, Qx_F)$ — произвольный постоянный вектор размера $2n$, $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$ — частное решение системы (9).

Замечание. В случае, когда $M(t) \equiv 0$, частное решение $g(t)$ можно искать в виде $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, где $g_1(t)$ — решение дифференциальной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\tilde{u}(t) + L(t)$.

Из граничных условий найдем

$$C(t_I, x_I, t_F, Qx_F) = \Delta(t_I, t_F)^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_I \\ Qx_F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(t_I) \\ Qg_1(t_F) \\ \overline{Q}g_2(t_F) \end{pmatrix} \right),$$

где $\Delta(t_I, t_F) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t_I) \\ Q\Phi_1(t_F) \\ \overline{Q}\Phi_2(t_F) \end{pmatrix}$. Следовательно, решение запишется в виде:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \Phi_1(t)C(t_I, x_I, t_F, Qx_F) + g_1(t), \\ \hat{u}(t) &= \tfrac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\left(\Phi_2(t)C(t_I, x_I, t_F, Qx_F) + g_2(t)\right) + \tilde{u}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Считая правый конец частично закрепленным, можно получить управление в форме синтеза

$$\hat{u}(t, x) = \frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\left(\Phi_2(t)C(t, x, t_F, Qx_F) + g_2(t)\right) + \tilde{u}(t).$$

4. Пример улучшения простой аппроксимации скользящего режима

Решим задачу об улучшении простой аппроксимации скользящего режима [2]. Для этого рассмотрим задачу оптимального управления следующего вида:

$$\begin{gathered} \dot{x}^1 = \left((u)^2 - x^3\right)^2 + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}(\tau)^2\right)^2 + \tfrac{1}{2}(\tau)^2 u, \\ \dot{x}^2 = x^3, \quad \dot{x}^3 = u, \quad \tau \in [1, 2], \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} x^1(1) = 0,\ x^2(1) = \tfrac{1}{4},\ x^3(1) = \tfrac{1}{2}, \\ x^2(2) = 1,\ x^3(2) = 1,\ J(x(2)) = x^1(2) \to \inf. \end{gathered} \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что решением задачи (11), (12) будет скользящий режим

$$\hat{x}^1(\tau) = \frac{1-\tau^3}{6}, \quad \hat{x}^2(\tau) = \frac{\tau^2}{4}, \quad \hat{x}^3(\tau) = \frac{\tau}{2}, \quad \hat{u}_{0,1} = \pm \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Действительно, задав функцию Кротова в одноименных достаточных условиях в виде

$$\varphi(\tau, x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2}(\tau)^2 x^3,$$

получим

$$R(\tau, x, u) = \dot{x}^1 - \left((u)^2 - x^3\right)^2 - \left(x^2 - \frac{\tau^2}{4}\right)^2 + \tau x^3, \, G = const.$$

Видно, что на рассматриваемом режиме функция R при каждом τ имеет максимум, а функция G — тривиальный минимум, т. е. достаточные условия выполняются, и определяется $\inf J = -\frac{7}{6}$.

Рассмотрим простую аппроксимацию этого решения, построенную по стандартному правилу с числом $s = 5$ элементарных промежутков $[\tau_{2i}, \tau_{2i+2})$, $\tau_0 = 1, \tau_{2i} = \tau_{2i-2} + s^{-1}, i = \overline{1,5}$, основного разбиения отрезка $[1,2]$. Каждый промежуток в свою очередь делится на две части точками τ_{2i+1}, $i = \overline{0,4}$. Далее строится решение задачи (11), (12) при соответствующем базовом управлении $\hat{u}_{0,1}$ на каждой части элементарного промежутка. Тем самым получается кусочно-непрерывная программа управления

$$u_s(\tau) = \begin{cases} \hat{u}_0(\tau_{2i}), & \tau \in [\tau_{2i}, \tau_{2i+1}), \\ \hat{u}_1(\tau_{2i+2}), & \tau \in [\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2}), \quad i = \overline{0,4}, \end{cases}$$

и соответствующая ей кусочно-гладкая траектория

$$x_s(\tau) = r(\tau; \tau_j, x_s(\tau_j - 0), u_s(\tau_j)),$$
$$x_s(\tau_0 - 0) = \hat{x}(\tau_0), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{0,9},$$

где через $r(\tau; \tau^*, x^*, u^*)$ обозначено решение системы (11) при $u = u^*$ и условии $x(\tau^*) = x^*$. Точки τ_{2i+1}, $i = \overline{0,4}$, выбираются из условия

$$r^3(\tau_{2i+1}; \tau_{2i}, \hat{x}(\tau_{2i}), \hat{u}_0(\tau_{2i})) = r^3(\tau_{2i+1}; \tau_{2i+2}, \hat{x}(\tau_{2i+2}), \hat{u}_1(\tau_{2i+2})).$$

Таким образом, известно приближенное решение $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t)) = (u_s(\tau), x_s(\tau))$ задачи, которое не удовлетворяет условиям $x^2(2) = 1, x^3(2) = 1$ и представляет собой простую аппроксимацию скользящего режима, а именно:

$$\tilde{x}(2) = (0.560, 1.035, 1.014)^T.$$

Поставим задачу наилучшего (возможно с ухудшением значения функционала $J\left(x(2)\right)$) удовлетворения условиям $x^2(2) = 1$, $x^3(2) = 1$.

Был организован итерационный процесс, использующий в качестве начального приближения пару $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ и воспроизводящий на каждой итерации формулы (10). При этом для поиска матриц $\Phi(t)$ и $g(t)$ применялся численный метод Рунге–Кутта четвертого порядка решения задачи Коши. Уже на третьей итерации было достигнуто наилучшее выполнение требуемых условий:

$$\hat{x}(2) = (0.607, 1, 1)^T .$$

Отметим, что метод улучшения скользящего режима, представленный в [2], не дал настолько точных результатов.

Заключение

Получены явные аналитические формулы для синтеза в линейно–квадратической задаче оптимального управления с частично закрепленным правым концом. Написана программа, которая с помощью этих формул организует итерационный процесс приближенного решения задачи локально–оптимального синтеза управления с частично фиксированным правым концом для сложной модели объекта.

Список литературы

[1] Гурман В. И., Трушкова Е. А., Блинов А. О. *Приближенная глобальная оптимизация управления на основе преобразований модели объекта* // Автоматика и телемеханика, 2009, № 5, с. 13–23. ↑1

[2] Гурман В. И., Трушкова Е. А., Ухин М. Ю. *Улучшение управления, реализующего скользящий режим* // Автоматика и телемеханика, 2008, № 3, с. 161–171. ↑4, 4

E. A. Trushkova. *Synthesis of control in the vicinity of the approximate solution of the problem with partially fixed the right end.*

Abstract. The article is devoted to the method of improving control in the neighborhood of the trajectory of the current approximation. The method is based on the replacement of a control problem with a partially fixed the right end on a simple linear–quadratic problem. For a new problem, the solution can be found in explicit analytical form, and the resulting control applied to the original model. We consider the application of the algorithm for correcting a simple approximation of the sliding mode.

Key Words and Phrases: optimal control, synthesis of optimal control, control improvement.

Образец ссылки на статью:

Е. А. Трушкова. *Синтез управления в окрестности приближенного решения задачи с частично закрепленным правым концом* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 2(6), с. 31–35. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_2_31-35.pdf