

О. В. Моржин
**Вычислительные аспекты
 нелокального улучшения управления
 в дифференциальных системах**

Аннотация. Статья посвящена реализации одного подхода к нелокальному улучшению управления в нелинейных дифференциальных системах.

Ключевые слова и фразы: управляемые системы, нелокальное улучшение.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления дифференциальной системой:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$(2) \quad I(v) = F(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf,$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$. Моменты t_0 , t_1 и состояние x_0 заданы. Множество $U \subseteq R^r$ выпуклое. Функции $F(x)$, $f^0(t, x, u)$, $f(t, x, u)$ удовлетворяют стандартным условиям [1].

Обозначим через \mathcal{U} множество допустимых управлений, через \mathcal{D} — множество допустимых процессов. В задаче (1), (2) рассматриваются кусочно-непрерывные управления. Изучается задача улучшения заданного процесса $v^I = (x^I, u^I) \in \mathcal{D}$: требуется вычислить процесс $v^{II} = (x^{II}, u^{II}) \in \mathcal{D}$ такой, что $\Delta I(v^{II}) = I(v^{II}) - I(v^I) < 0$.

Начиная с 1960-х гг. было разработано большое число разнообразных численных и приближенных методов решения задач оптимального управления [1–6].

В методах нелокального улучшения [3, 4, 6, 7], в отличие от методов условного градиента и других методов локального улучшения [1],

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-90718-моб_ст).

не рассматриваются (трудоемкие) операции варьирования управления относительно улучшаемого управления с параметрическим поиском.

Конструктивной основой нелокального улучшения в различных классах задач оптимального управления является получение точных (без остаточных членов разложений по x , u) формул приращения целевых функционалов. Результаты по нелокальному улучшению в линейных, линейно-квадратических и полиномиальных по состоянию задачах оптимального управления на основе точных формул приращения были получены А.С. Булдаевым, В.А. Срочко [4, 6]. Открывается возможность улучшения неоптимальных управлений, удовлетворяющих принципу максимума.

Данная статья посвящена результатам вычислительных экспериментов по нелокальному улучшению на основе подхода, предложенного в [8–11].

1. Точные формулы приращения, специальные сопряженные системы

Основой аппарата улучшения управлений в непрерывной задаче (1), (2) выступает обобщенный лагранжиан [3]:

$$L(v) = G(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t)) dt,$$

$$G(x) = F(x) + \varphi(t_1, x) - \varphi(t_0, x_0),$$

$$R(t, x, u) = \langle \varphi_x(t, x), f(t, x, u) \rangle - f^0(t, x, u) + \varphi_t(t, x),$$

где функция $\varphi(t, x)$ — непрерывная по (t, x) , непрерывно-дифференцируемая по x и кусочно-дифференцируемая по $t \in [t_0, t_1]$. Для любых $\varphi(t, x)$ и $v = (x, u) \in D$ имеем $L(v) \equiv I(v)$ [3].

В нелинейной задаче (1), (2) с функцией $\varphi(t, x) = \langle p(t), x \rangle$, линейной по x , в работах [8–11] предложены точные (без остаточных членов разложений) формулы приращения целевого функционала при специальных дифференциально-алгебраических сопряженных системах.

Точные формулы приращения в непрерывной задаче (1), (2):

$$(3) \quad \Delta I(v) = - \int_{t_0}^{t_1} (H(t, p(t), x(t), u(t)) - H(t, p(t), x(t), u^I(t))) dt,$$

$$(4) \quad \Delta I(v) = - \int_{t_0}^{t_1} \langle H_u(t, p(t), x(t), u^I(t)) + d(t), \Delta u(t) \rangle dt.$$

Дифференциально-алгебраическая сопряженная система в связи с формулой (3) (предложена А.С. Булдаевым в [8]):

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{p}(t) &= -H_x(t, p(t), x^I(t), u^I(t)) - r(t), \\ p(t_1) &= -F_x(x^I(t_1)) - q, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} H(t, p(t), x(t), u^I(t)) - H(t, p(t), x^I(t), u^I(t)) &= \\ = \langle H_x(t, p(t), x^I(t), u^I(t)), \Delta x \rangle + \langle r(t), \Delta x(t) \rangle, \end{aligned}$$

$$(7) \quad F(x(t_1)) - F(x^I(t_1)) = \langle F_x(x^I(t_1)), \Delta x(t_1) \rangle + \langle q, \Delta x(t_1) \rangle.$$

Дополнительное уравнение к сопряженной системе (5)–(7) в связи с (4) [9]:

$$(8) \quad \begin{aligned} H(t, p(t), x(t), u(t)) - H(t, p(t), x(t), u^I(t)) &= \\ = \langle H_u(t, p(t), x(t), u^I(t)) + d(t), \Delta u(t) \rangle. \end{aligned}$$

Вводятся максимизирующее отображение

$$u^*(t, p, x) = \arg \max_{u \in U} H(t, p, x, u), \quad t \in [t_0, t_1],$$

обобщенное проекционное отображение

$$u^\alpha(t, p, x) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(t, p, x, u^I(t)) + d(t))), \quad \alpha > 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

операторы

$$A^\alpha : u \mapsto u_\alpha, \quad A^{\alpha, \tau} : u \mapsto u_\alpha, \quad \tau \neq 0,$$

где

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= u^\alpha(t, p(t), x(t)), \quad u_{\alpha, \tau}(t) = P_U(u(t) + \tau(u_\alpha(t) - u(t))), \\ \alpha &> 0, \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned}$$

P_U — оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество U в евклидовой метрике.

2. Условия и процедуры улучшения

В терминах формул приращения и специальных сопряженных систем формулируются условия улучшения процесса $v^I \in \mathcal{D}$.

Сформулируем общее условие улучшения в непрерывной задаче (1), (2).

Утверждение. Для того, чтобы в задаче (1), (2) процесс $v \in \mathcal{D}$ был лучше заданного процесса $v^I \in \mathcal{D}$, достаточно существования такой функции $\varphi(t, x)$, при которой

$$\begin{aligned} \Delta G(x(t_1)) &= G(x(t_1)) - G(x^I(t_1)) \leq 0, \\ \Delta R(t, x(t), u(t)) &= R(t, x(t), u(t)) - R(t, x^I(t), u^I(t)) \geq 0 \\ &\forall t \in [t_0, t_1], \end{aligned}$$

причем функция $\Delta R(t, x(t), u(t)) > 0$ на некотором ненулевой меры подмножестве из $[t_0, t_1]$.



Рис. 1.

Данное утверждение в терминах полученных конструкций для задачи (1), (3) может быть представлено в форме операторных уравнений в пространстве управлений [9]:

$$(9) \quad u = A^\alpha(u), \quad u = A^{\alpha,\tau}(u), \quad u \in \mathcal{U},$$

где \mathcal{U} — класс L_1 -измеримых управлений.

Реализация условий улучшения, с учетом свойств максимизирующих и проекционных зависимостей, представляет алгоритмы нелокального улучшения [9] двух категорий: 1) решение краевых задач для сопряженных систем, связанных с фазовыми системами максимизирующим или проекционным отображениями; 2) построение последовательных проекционных приближений в пространстве (u) для решения операторных уравнений (9). На рис. 1 схематически представлены процедуры нелокального улучшения.

Описанный подход тесно связан с известным методом глобального улучшения В.Ф. Кротова [3] в смысле задания определенным образом функции $\varphi(t, x)$.

Развивая подход, названный В.А. Срочко фазовой регуляризацией [4], а также связанный с принципом локализации в терминологии В.И. Гурмана [2], рассмотрим вспомогательный целевой критерий [10]:

$$(10) \quad I^\gamma(v, v^I) = I(v) + \gamma_1 \|\Lambda \Delta x(t_1)\|^2 + \gamma_2 \int_{t_0}^{t_1} \|\Xi \Delta x(t)\|^2 dt \rightarrow \inf,$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$; Λ, Ξ — диагональные матрицы, причем по главной диагонали 0, 1.

Модифицированная сопряженная система [10]:

$$\begin{aligned} \dot{p}^\gamma(t) &= -H_x(t, p^\gamma(t), x^I(t), u^I(t)) - r^\gamma(t, p^\gamma(t), x^\gamma(t)), \\ p^\gamma(t_1) &= -F_x(x^I(t_1)) - q^\gamma(x(t_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t, p^\gamma(t), x(t), u^I(t)) - \gamma_2 \|\Xi \Delta x(t)\|^2 - H(t, p^\gamma(t), x^I(t), u^I(t)) &= \\ = \langle H_x(t, p^\gamma(t), x^I(t), u^I(t)), \Delta x(t) \rangle + \langle r^\gamma(t, p^\gamma(t), x^\gamma(t)), \Delta x(t) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x(t_1)) + \gamma_1 \|\Lambda \Delta x(t_1)\|^2 - F(x^I(t_1)) &= \\ = \langle F_x(x^I(t_1)), \Delta x(t_1) \rangle + \langle q^\gamma(x(t_1)), \Delta x(t_1) \rangle. \end{aligned}$$

Формула приращения функционала в связи с (10):

$$\Delta I(v) = -\gamma_1 \|\Lambda \Delta x(t_1)\|^2 - \int_{t_0}^{t_1} (H(t, p^\gamma(t), x(t), u(t)) - H(t, p^\gamma(t), x(t), u^1(t)) + \gamma_2 \|\Xi \Delta x(t)\|^2) dt.$$

3. Вычислительные эксперименты

Сравнительная эффективность того или иного метода зависит от алгоритмов, используемых для решения вспомогательных задач (интегрирование дифференциальных систем, интерполяция и т.д.). Так, в методе игольчатой линеаризации [1, 4] рассматривается вспомогательная задача минимизации функции от параметра игольчатого варьирования, причем эта функция не обязана быть унимодальной; и от качестве решения этой вспомогательной задачи зависит эффективность самого метода. За единицу трудоемкости взято решение задачи Коши отдельно для фазовой и сопряженной систем [5]. Трудоемкость того или иного метода зависит от алгоритмической реализации метода.

В плане изучения сравнительной эффективности автором проведена программно-алгоритмическая реализация новых, нелокальных методов и стандартных методов условного градиента, проекции градиента, игольчатой линеаризации [1, 4].

Программа разработана на языке Fortran современного стандарта, ориентирована на Microsoft Visual Studio 2008 [12] с интегрированным компилятором Intel Visual Fortran 11 (2009). Современная среда программирования позволяет автоматически распараллеливать потоки (директива `/qparallel` компилятору в Windows), что существенно повышает скорость выполнения программы. Вообще говоря, распараллеливание — это современный инструмент вычислительных экспериментов.

Программа достаточно универсальная: постановка задачи вида (1), (2) осуществляется в отдельном `f90`-файле, в основной программе используются абстрактные конструкции с динамическими массивами, а при выполнении программы из указанного файла передаются конкретные данные. Результаты расчетов записываются в текстовый файл `results.m` по правилам представления массивов в языке Matlab. Открывается возможность применения средств системы

Matlab 7 по графической визуализации числовой информации и обработке графики. Программа по ходу расчетов создает протокол в XML-формате.

Решены тестовые задачи оптимального управления дифференциальными системами: стабилизация маятниковых систем (с учетом трения и без); стабилизация шагового электродвигателя при минимальных энергозатратах; стабилизация вращения спутника с тремя реактивными двигателями, моделируемого при помощи управляемых уравнений типа Эйлера; оптимизация управления потоком хладагента в химическом реакторе; максимизация массы выходного продукта химической реакции; типовые задачи при реализации алгоритма сечений по аппроксимации границ множеств достижимости.

Пример 1 (улучшение неособой экстремали Понтрягина). Требуется улучшить процесс $(x^I(t) \equiv 0, u^I(t) \equiv 0)$ в невыпуклой задаче

$$I = \int_0^{\pi} (u^2 - x^2) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in R, \quad t \in [0, \pi].$$

Функция Понтрягина $H(t, p, x, u) = pu - u^2 + x^2$. Следуя принципу максимума и соответствующему определению особого управления [1, с. 184], покажем, что управление $u^I(t) \equiv 0$ удовлетворяет принципу максимума, но не является особым:

$$\begin{aligned} \max_{u \in E^1} H(t, \psi^I(t), x^I(t), u) &= H(t, \psi^I(t), x^I(t), u^I(t)), \quad t \in [0, \pi], \\ H(t, \psi^I(t), x^I(t), u) - H(t, \psi^I(t), x^I(t), u^I(t)) &= \\ &= \psi^I(t) (u - u^I(t)) - u^2 + (u^I(t))^2 = -u^2 \neq 0, \quad u \in R. \end{aligned}$$

В классическом смысле на улучшаемом управлении получаем

$$\begin{aligned} H_u(t, \psi^I(t), x^I(t), u^I(t)) &= 0, \\ H_{uu}(t, \psi^I(t), x^I(t), u^I(t)) &= -2, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Применены процедуры, основанные на решении краевых задач для дифференциально-алгебраических систем с максимизирующим и проекционным отображениями.

В случае максимизирующего отображения положительный результат достигается [10] после модификации с целевым функционалом $I^\gamma = \int_0^{\pi} (u^2 - x^2) dt + \gamma_2 \int_0^{\pi} (\Delta x(t))^2 dt, \gamma_2 > 0$.

В случае проекционного отображения параметр проектирования $\alpha > 0$ позволяет регулировать вопрос о разрешимости краевой задачи, и в результате без модификации получаем улучшение экстремали.

Рассматривается краевая задача улучшения [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u^\alpha(t, x, p), \quad x(0) = 0, \quad \dot{p} = -r, \quad p(\pi) = 0, \quad rx = x^2, \\ u^\alpha(t, p(t), x(t))(p(t) - u^\alpha(t, p(t), x(t))) &= (p(t) + d(t))u^\alpha(t, p(t), x(t)), \end{aligned}$$

где отображение u^α имеет вид

$$u^\alpha(t, p, x) = u^I(t) + \alpha(p - 2u^I(t) + d(t)) = \alpha(p + d(t)), \quad \alpha > 0.$$

Переходим к вспомогательной краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u^\alpha(t, p(t), x(t)), \quad x(0) = 0, \quad \dot{p}(t) = -x(t), \quad p(\pi) = 0, \\ u^\alpha(t, p(t), x(t))(d(t) + u^\alpha(t, p(t), x(t))) &= 0. \end{aligned}$$

Задача допускает тривиальное решение, соответствующее улучшаемому управлению. Другое решение определяется условием

$$d(t) + u^\alpha(t, p(t), x(t)) = d(t) + \alpha(p(t) + d(t)) = 0.$$

Отсюда получаем выражение $d(t) = -\frac{\alpha}{\alpha+1}p(t)$ и краевую задачу

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+1}p(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{p}(t) = -x(t), \quad p(\pi) = 0.$$

Для решения этой задачи рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$\ddot{p} + wp = 0, \quad w = \frac{\alpha}{\alpha+1} > 0, \quad p(\pi) = 0, \quad \dot{p}(0) = 0.$$

Данное уравнение имеет решение $p(t) = C \cos(\sqrt{w}t)$, где константа C определяется из граничного условия $C \cos \sqrt{w}\pi = 0$. Ненулевое решение соответствует случаю $\sqrt{w}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решение для $k = 0$ соответствует значению $\alpha = \frac{1}{3}$ и имеет вид $p(t) = C \cos \frac{t}{2}$, $C \neq 0$. Соответствующее решение $x(t) = -\dot{p}(t) = \frac{C}{2} \sin \frac{t}{2}$. При этом получаем выходное управление

$$u^{\text{II}}(t) = u_\alpha(t) = -d(t) = \frac{\alpha}{\alpha+1}p(t) = \frac{C}{4} \cos \frac{t}{2}, \quad t \in [0, \pi], \quad C \neq 0,$$

со свойством строгого улучшения:

$$I(\sigma^{\text{II}}) = \int_0^\pi \left(\left(\frac{C}{4} \cos \frac{t}{2} \right)^2 - \left(\frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) dt = -\frac{3C^2\pi}{32} < I(\sigma^{\text{I}}) = 0, \quad C \neq 0.$$

Отметим наличие бесконечного множества других строго улучшающих ненулевых выходных управлений в применяемом проекционном методе, определяющихся при значениях $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, а также комбинациями приравнивания к нулю множителей левой части в уравнении $u^\alpha(t, p(t), x(t)) (d(t) + u^\alpha(t, p(t), x(t))) = 0$ на различных подынтервалах отрезка $[0, \pi]$.

Предложенный подход применяется при решении более сложных задач, например, по аппроксимации множеств достижимости [13].

Пример 2 (аппроксимация скользящим режимом особого оптимального управления). Рассматривается задача оптимального управления (предложена автору В.И. Гурманом):

$$\begin{aligned} I(v) &= x_2(10) \rightarrow \inf, \\ \dot{x}_1 &= ux_2, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2 = -ux_1 - 1, \quad x_2(0) = 0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, 10], \quad u^I(t) \equiv 1. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина и (стандартная) сопряженная система:

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 ux_2 + \psi_2(-ux_1 - 1), \quad H_u = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 u, \quad \psi_1(10) = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 u, \quad \psi_2(10) = -1. \end{aligned}$$

Максимизирующее отображение:

$$u^*(t, \psi, x) = \arg \max_{u \in [-1, 1]} ((\psi_1 x_2 - \psi_2 x_1)u - \psi_2);$$

проекционное отображение

$$u^\alpha(t, \psi, x) = P_{[-1, 1]} (u^I(t) + \alpha(\psi_1 x_2 - \psi_2 x_1)), \quad \alpha > 0.$$

Краевая задача улучшения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u^{\{*, \alpha\}}(t, \psi, x)x_2, \quad x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 &= -u^{\{*, \alpha\}}(t, \psi, x)x_1 - 1, \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{p}_1 &= \psi_2 u^I, \quad \psi_1(10) = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 u^I, \quad \psi_2(10) = -1. \end{aligned}$$

Эта краевая задача «распадается» на две задачи Коши: для сопряженной системы на улучшаемом управлении u^I и для фазовой системы.

Проведены численные расчеты, показывающие улучшения как с максимизирующим, так и с проекционным отображениями.

С начальным приближением $u^{(0)} \equiv 1$ метод улучшения с максимизирующей зависимостью $u^*(t, \psi, x)$, которая строится в форме

граничных участков управления $(-1, 1)$, останавливается на управлении, доставляющем значение $I = -3.704$. С начальным приближением $u^{(0)}(t) \equiv 0.6$ метод улучшения с максимизирующей зависимостью $u^*(t, \psi, x)$ приводит к аппроксимации оптимального особого управления скользящим режимом (частые переключения между ± 1). Применение проекционной зависимости $u^\alpha(t, \psi, x)$ дает лучшее приближение к оптимальному управлению в силу непрерывности $u^\alpha(t, \psi, x)$ по ψ, x .

Этот пример иллюстрирует связь глобального метода В.Ф. Кротова с описанным подходом: в данной задаче с билинейной системой, линейным терминальным целевым функционалом имеем «поправки» $r(t) \equiv 0, q = 0$.

Пример 3 (оптимальное управление потоком хладагента в химическом реакторе). Рассматривается задача [14, с. 407 – 409] стабилизации химического реактора, представляющего собой аппарат с мешалкой и подведенным каналом поступления хладагента:

$$I = \int_0^{0.78} (x_1^2 + x_2^2) dt \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1 = -2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} - (x_1 + 0.25)u,$$

$$x_1(0) = 0.05,$$

$$\dot{x}_2 = 0.5 - x_2 - (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2}, \quad x_2(0) = 0,$$

$$x_1(0.78) = 0, \quad x_2(0.78) = 0,$$

$$u(t) \in [-1, 1], \quad t \in [0, 0.78].$$

Функции $x_1(t), x_2(t)$ описывают соответственно отклонения температуры и концентрации. Управление $u(t)$ характеризует поток хладагента, регулирующего необратимую экзотермическую реакцию.

В книге [14, с. 407 – 409] производится редукция к задаче конечномерной оптимизации за счет дискретизации по функциям состояния и управления, замены производных конечными разностями по схеме Эйлера. Число моментов дискретизации не указано. Конечно, такая схема является грубым приближением непрерывной задачи, но при реализации более точных схем интегрирования задача конечномерной оптимизации получилась бы сложнее. В книге указаны следующие результаты: $I^* \approx 0.00220$, $x_1(0.78) = -6.167 \cdot 10^{-6}$, $x_2(0.78) = -0.631 \cdot 10^{-6}$.

Следуя методу штрафов, перейдем к вспомогательной задаче со свободным правым концом при достаточно большом фиксированном штрафном коэффициенте $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} I^\beta &= \beta(x_1^2(0.78) + x_2^2(0.78)) + x_3(0.78) \rightarrow \inf, \\ \dot{x}_1 &= -2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} - (x_1 + 0.25)u, \\ x_1(0) &= 0.05, \\ \dot{x}_2 &= 0.5 - x_2 - (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2}, \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2, \quad x_3(0) = 0, \quad u(t) \in [-1, 1], \quad t \in [0, 0.78]. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина и ее градиенты (символ “ β ” не пишем):

$$\begin{aligned} H &= p_1 \left[-2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} - (x_1 + 0.25)u \right] + \\ &+ p_2 \left[0.5 - x_2 - (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} \right] + p_3 [x_1^2 + x_2^2], \\ \left[\exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} \right]_{x_1} &= \frac{50}{(x_1 + 2)^2} \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2}, \\ H_{x_1} &= (p_1 - p_2) \frac{50(x_2 + 0.5)}{(x_1 + 2)^2} \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} - (2 + u)p_1 + 2p_3x_1, \\ H_{x_2} &= (p_1 - p_2) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} - p_2 + 2p_3x_2, \quad H_{x_3} = 0, \\ H_u &= -p_1(x_1 + 0.25). \end{aligned}$$

Стандартная сопряженная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= (\psi_2 - \psi_1) \frac{50(x_2 + 0.5)}{(x_1 + 2)^2} \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} + \\ &+ (2 + u)\psi_1 - 2\psi_3x_1, \quad \psi_1(0.78) = -2\beta x_1(0.78), \\ \dot{\psi}_2 &= (\psi_2 - \psi_1) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} + \psi_2 - 2\psi_3x_2, \quad \psi_2(0.78) = -2\beta x_2(0.78), \\ \dot{\psi}_3 &= 0, \quad \dot{\psi}_3(0.78) = -1. \end{aligned}$$

Организуем проекционные приближения в пространстве управлений на основе дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \left[2 - (x_2^I + 0.5) \frac{50}{(x_1^I + 2)^2} \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} + u \right] p_1 + \\ &\quad + 50p_2 \frac{x_2^I + 0.5}{(x_1^I + 2)^2} \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} - 2p_3x_1^I - r_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} + p_2 \left[1 + \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} \right] - 2p_3x_2^I - r_2, \\ \dot{p}_3 &= -r_3, \quad p_i(0.78) = -2\beta x_i^I(0.78) - q_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad p_3(0.78) = -1 - q_3, \\ \xi(t, p, x) &= \sum_{i=1}^3 H_{x_i}(t, p, x^I, u^I) \Delta x_i + \sum_{i=1}^3 r_i \Delta x_i, \\ \beta [(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2] + \Delta x_3 &= \Delta x_3 + \sum_{i=1}^3 q_i \Delta x_i, \\ \xi(t, p, x) &= H(t, p, x, u^I) - H(t, p, x^I, u^I) = \\ &= -p_1 \Delta x_1 (2 + u^I) + (x_2 + 0.5) \exp \frac{25x_1}{x_1 + 2} [p_1 - p_2] + \\ &\quad + (x_2^I + 0.5) \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} [p_2 - p_1] - p_2 \Delta x_2 + \\ &\quad + p_3 [(x_1 + x_1^I) \Delta x_1 + (x_2 + x_2^I) \Delta x_2]. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина не зависит от x_3 , и полагаем $r_3(t) \equiv 0$.

Если $\Delta x_1(t) \neq 0$ и $\Delta x_2(t) \neq 0$, то можно положить, например, $r_2(t) = 0$. И тогда определяем

$$\bar{r}_1(t, p, x) = \frac{1}{\Delta x_1} [\xi(t, p, x) - H_{x_2}(t, p, x^I, u^I) \Delta x_2] - H_{x_1}(t, p, x^I, u^I).$$

Если одна компонента $\Delta x_i(t) = 0$, $i \in \overline{1, 2}$, а другая компонента $\Delta x_j(t)$ ($j \neq i$) не равна нулю, то рассматриваем

$$\bar{r}_j(t, p, x) = \frac{1}{\Delta x_j} \xi(t, p, x) - H_{x_i}(t, p, x^I, u^I), \quad r_i(t) = 0.$$

Если $\Delta x_1(t) = 0$, $\Delta x_2(t) = 0$, то считаем $r(t) = 0$.

Терминант функционала I^β линеен по x_3 , и считаем $q_3 = 0$. Полагаем $\beta \Delta x_i - q_i = 0$, $i = \overline{1, 2}$. Тогда $\bar{q}_i(x) = \beta \Delta x_i$.

При $r_3(t) \equiv 0$, $q_3 = 0$ определяем $p_3(t) \equiv -1$.

Вспомогательная система получается вида

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \left[2 - (x_2^I + 0.5) \frac{50}{(x_1^I + 2)^2} \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} + u \right] p_1 + \\ &+ 50p_2 \frac{x_2^I + 0.5}{(x_1^I + 2)^2} \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} + 2x_1^I - \bar{r}_1(t, p, x), \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} + p_2 \left[1 + \exp \frac{25x_1^I}{x_1^I + 2} \right] + 2x_2^I - \bar{r}_2(t, p, x), \\ p_i(0.78) &= -\beta(x_i(0.78) + x_i^I(0.78)), \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Организуем итерационный процесс

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(t) &= u^{(k)}(t) + \tau(A^\alpha(u^{(k)}(t)) - u^{(k)}(t)), \\ A^\alpha(u^{(k)}(t)) &= P_{[-1,1]}(u^I(t) - \alpha p_1^{(k)}(t)(x_1^{(k)}(t) + 0.25)), \\ \alpha > 0, \quad \tau &\in (0, 1], \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где функции $x^{(k)}(t)$, $p^{(k)}(t)$ находятся в результате интегрирования фазовой и сопряженной систем на текущем приближении.

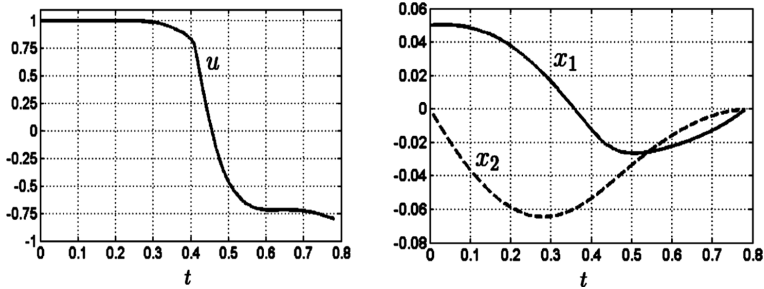


Рис. 2.

Пусть $\beta = 2$, $\alpha = 90$, $\tau = 0.05$ и начальное приближение $u^I(t) \equiv 1$. Шаг дискретизации $\Delta t = 10^{-3}$.

Ценою решения 90 задач Коши получаем $x_1(0.78) = -7.2737 \cdot 10^{-4}$, $x_2(0.78) = -4.3140 \cdot 10^{-4}$, $x_3(0.78) = 2.0084 \cdot 10^{-3}$. На рис. 2 представлен расчетный оптимальный процесс.

Проведем расчет стандартным методом условного градиента. Погрешность метода золотого сечения 10^{-3} в схеме параметрической оптимизации. На 5-й итерации метод условного градиента (МУГ) имеем $x_1(0.78) = 2.2773 \cdot 10^{-3}$, $x_2(0.78) = 2.3493 \cdot 10^{-3}$, $x_3(0.78) =$

$= 2.2553 \cdot 10^{-3}$ с трудоемкостью 96 задач Коши. На 27-й итерации МУГ вычисляем $x_1(0.78) = -4.7247 \cdot 10^{-4}$, $x_2(0.78) = -2.4720 \cdot 10^{-3}$, $x_3(0.78) = 2.0003 \cdot 10^{-3}$ с трудоемкостью 514 задач Коши; на 53-й итерации МУГ дает $x_1(0.78) = -6.7428 \cdot 10^{-4}$, $x_2(0.78) = -1.9587 \cdot 10^{-3}$, $x_3(0.78) = 1.9947 \cdot 10^{-3}$ ценою решения 1008 задач Коши. В табл. 1 сведены сравнительные результаты. Проекционный метод нелокального улучшения (МНУ) оказывается менее трудоемким.

Таблица 1.

Метод	Задачи Коши	Значение I	$x_1(0.78)$	$x_2(0.78)$
МНУ	90	$2.0084 \cdot 10^{-3}$	$-7.2737 \cdot 10^{-4}$	$-4.3140 \cdot 10^{-4}$
МУГ	96	$2.2553 \cdot 10^{-3}$	$2.2773 \cdot 10^{-3}$	$2.3493 \cdot 10^{-3}$

Заключение

Статья представляет некоторые результаты вычислительных экспериментов, проведенных с использованием нового подхода с точными формулами приращения и специальными сопряженными системами, предложенного в работах [8–11]. Отмечена связь данного подхода с известным глобальным методом В.Ф. Кротова. Вычислительные эксперименты иллюстрируют высокую эффективность подхода.

Список литературы

- [1] Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск : Изд-во Иркутск. ун-та, 1994. — 344 с. ↑[1](#), [3](#)
- [2] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М. : Наука, 1985. — 288 с. ↑[2](#)
- [3] Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York : Marcel Dekker, 1996. — 408 p. ↑[1](#), [1](#), [2](#)
- [4] Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Наука, 2000. — 160 с. ↑[1](#), [2](#), [3](#)
- [5] Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск, 1997. — 175 с. ↑[3](#)
- [6] Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ, 2008. — 256 с. ↑[1](#)

- [7] Булдаев А. С., Трунин Д. О. *Нелокальное улучшение управлений в линейных по состоянию системах с терминальными ограничениями* // Автоматика и телемеханика, 2009, № 5, с. 7–12. ↑↑
- [8] Булдаев А. С., Моржин О. В. *Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач* // Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика, 2009. **2**, № 1, с. 94–107. ↑↑, 1, 1, 3
- [9] Моржин О. В. *Методы нелокального улучшения управлений дифференциальными и дискретными системами* // Управление, информация и оптимизация // Сб. тр. II Всерос. традиционной молодежной летней школы. — М. : Изд-во ИПУ РАН, 2010. ↑1, 2, 2
- [10] Моржин О. В. *Нелокальное улучшение нелинейных управляемых процессов на основе достаточных условий оптимальности* // Автоматика и телемеханика, 2010, № 8, с. 24–37. ↑2, 2, 3
- [11] Булдаев А. С., Моржин О. В. *Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений* // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика, 2010, с. 10–17. ↑↑, 1, 3, 3
- [12] Пауэрс Л., Снелл М. Microsoft Visual Studio 2008. СПб. : БХВ-Петербург, 2009. — 1200 с. ↑3
- [13] Моржин О. В., Тягюшкин А. И. *Алгоритм метода сечений и программные средства для построения множеств достижимости* // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2008, № 1, с. 5–11. ↑3
- [14] Kirk D. *Optimal control theory. An introduction*. New York : Dover Publ., 2004. — 472 p. ↑3

O. V. Morzhin. *Computational aspects of nonlocal improvement for control in differential systems*.

ABSTRACT. The article is devoted to realization of an approach for nonlocal improvement of control in nonlinear differential systems.

Key Words and Phrases: control systems, nonlocal improvement.

Образец ссылки на статью:

О. В. Моржин. *Вычислительные аспекты нелокального улучшения управления в дифференциальных системах* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 2(6), с. 37–51. URL: http://psta.psir.ru/read/psta2011_2_37-51.pdf