ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 2(6), 2011, с. 89–95

УДК 517.956.3, 514.763.85

В. А. Юмагужин, В. Н. Юмагужина

Новые решения без кручения 2-мерных уравнений газовой динамики

Аннотация. В настоящей работе получены новые решения без кручения системы уравнений адиабатического движения политропного газа в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Ключевые слова и фразы: Система уравнений адиабатического движения газа, политропный газ, геометрическая структура, дифференциальный инвариант, явное решение.

Введение

Как известно [1], характеристические ковекторы системы уравнений 2-мерного адиабатического движения газа порождают на каждом ее решении, рассматриваемом как 3-мерная поверхность, геометрическую структуру. Эта структура состоит из плоскости и конуса в каждом кокасательном пространстве к этой поверхности, пересекающихся только в нуле.

В работе [2] показано, что первыми дифференциальными инвариантами этой структуры на решении рассматриваемой системы являются линейная связность и ее тензор кручения. Далее в этой работе, для политропного газа постоянного обьема находится класс явных решений этой системы с нулевым тензором кручения.

В настоящей работе получены новые явные решения без кручения для системы уравнений 2-мерного адиабатического движения политропного газа без предположения о постоянстве объема.

В разделе 1 мы излагаем необходимые сведения из работы [2]. Раздел 2 содержит основные результаты.

1. Дифференциальные инварианты на решениях уравнений газовой динамики

1.1. Адиабатическое движение газа

Система дифференциальных уравнений адиабатического движения газа в пространстве $\mathbb{R}^2$, связывающая компоненты вектора скорости u, v, плотность ρ и давление p как функции точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и времени t, такова (см. [1]):

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + p_x/\rho = 0, \\ &v_t + uv_x + vv_y + p_y/\rho = 0, \\ &\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0, \\ &p_t + up_x + vp_y + A(\rho, p)(u_x + v_y) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $A(\rho, p)/\rho = -(\partial S/\partial\rho)/(\partial S/\partial p)$ и $S(\rho, p)$ — энтропия.

Геометрически эта система может быть представлена следующим образом.

Рассмотрим тривиальное расслоение

$$\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi : (t, x, y, u, v, \rho, p) \mapsto (t, x, y).$$

Пусть S — произвольное сечение расслоения π и $b = (t, x, y)$ — точка из области определения S. Через $j_b^1 S$ обозначим 1-джет сечения S в точке b. Через $J^1\pi$ обозначим множество всех 1-джетов всех сечений расслоения π. Тогда

$$\pi_1 : J^1\pi \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_1 : j_b^1 S \mapsto b$$

— расслоение 1-джетов сечений расслоения π. Теперь система (1) может быть рассмотрена как подмногообразие $\mathcal{E}$ в расслоении $J^1\pi$.

1.2. Характеристические ковекторы

Пусть $\theta_1 \in \mathcal{E}$, $b = \pi_1(\theta_1)$, а T_b и T_b^* — касательное и кокасательное пространства к базе расслоения π в точке b соответственно. Рассмотрим произвольный ненулевой ковектор $\xi_0 dt + \xi_1 dx + \xi_2 dy \in T_b^*$. Напомним, см. [1], что этот ковектор называется характеристическим в точке θ_1, если он удовлетворяет условию

$$\det\left(\frac{\partial\Phi^i}{\partial w_t^j}\xi_0 + \frac{\partial\Phi^i}{\partial w_x^j}\xi_1 + \frac{\partial\Phi^i}{\partial w_y^j}\xi_2\right)(\theta_1) = 0\,,$$

где $\Phi^1, \ldots, \Phi^4$ — левые части уравнений системы (1), $w^1 = u$, $w^2 = v$, $w^3 = \rho$ и $w^4 = p$.

Вычисляя этот определитель, мы получим следующее условие характеристичности:

$$(\xi_0 + u\xi_1 + v\xi_2)^2 \big((\xi_0 + u\xi_1 + v\xi_2)^2 - \frac{A(\rho,p)}{\rho}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\big) = 0.$$

Оно означает, что множество характеристических ковекторов в точке θ_1 отождествляется с парой, состоящей из гиперплоскости $\mathcal{P}_{\theta_1}$ в кокасательном пространстве T_p^*, определяемой уравнением

$$\xi_0 + u\xi_1 + v\xi_2 = 0\,,$$

и конуса $\mathcal{V}_{\theta_1}$ в T_p^*, определяемого уравнением

$$(\xi_0 + u\xi_1 + v\xi_2)^2 - \frac{A(\rho,p)}{\rho}(\xi_1^2 + \xi_2^2) = 0.$$

Очевидно,

$$\mathcal{P}_{\theta_1} \cap \mathcal{V}_{\theta_1} = \{0\}.$$

1.3. Геометрические структуры на решениях

Пусть $S(t,x,y) = \big(u(t,x,y), v(t,x,y), \rho(t,x,y), p(t,x,y)\big)$ — произвольное решение системы (1), $b = (t,x,y)$ — произвольная точка из области его определения и $\theta_1 = j_b^1 S$. Тогда в кокасательном пространстве T_b^* к базе расслоения π определены гиперплоскость $\mathcal{P}_{\theta_1}$ и конус $\mathcal{V}_{\theta_1}$. Т.о. на области определения решения S определена геометрическая структура, состоящая из плоскости и конуса, пересекающихся только в нуле, в каждом кокасательном пространстве к этой области.

Пусть L_S — график решения S в пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ переменных t, x, y, u, v, ρ, p. Поскольку L_S диффеоморфен области определения решения S, то можно считать, что эта геометрическая структура определена на графике L_S.

1.4. Дифференциальные инварианты

В работе [2] доказано следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть $S(t,x,y) = \big(u, v, \rho, p\big)$ — произвольное решение системы* (1). *Тогда на его графике L_S естественно определена линейная связность, тензор кручения которой определяется* *формулой*

$$\omega_S = \frac{1}{(u)^2+(v)^2}\Big(\big(u(u_y+v_x)-v(u_x-v_y)\big)\frac{\partial}{\partial x} - \big(v(u_y+v_x)+u(u_x-v_y)\big)\frac{\partial}{\partial y}\Big)\otimes(dx\wedge dy).$$

Следствие 1.2. *Пусть $S=(u,v,\rho,p)$ — решение системы* (1). *Тогда условие $\omega_S=0$ эквивалентно условию*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x\,. \tag{2}$$

Выполнение условий (2) для компонент u,v скорости газа означает, что $u+iv$ — комплексно-аналитическая функция по переменным x,y.

2. Явные решения со связностями без кручения

В этом разделе мы рассматриваем практически важный класс адиабатических течений газа — политропное движение газа, см. [1], т.е. мы будем предполагать, что в системе (1)

$$A(\rho,p)=\gamma p, \quad \gamma \text{ — постоянная.} \tag{3}$$

Мы будем искать решения системы (1), дополненной уравнениями (2), в предположении (3). В результате получим следующие классы явных решений.

2.1.

$$u = \frac{x+k_3}{t+k_1} - \frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3-2\gamma}(t+k_1)^{1-2\gamma}|t+k_1|,$$
$$v = \frac{y+k_4}{t+k_1} - \frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3-2\gamma}(t+k_1)^{1-2\gamma}|t+k_1|,$$
$$\rho = \frac{e^{-2k_2+k_5}}{(t+k_1)^2}\exp\Big(e^{-k_2}\frac{x+y+k_3+k_4}{|t+k_1|} + e^{-2\gamma k_2}\frac{2(t+k_1)^{2-2\gamma}}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)}\Big),$$
$$p = \frac{e^{-2\gamma k_2+k_5}}{(t+k_1)^{2\gamma}}\exp\Big(e^{-k_2}\frac{x+y+k_3+k_4}{|t+k_1|} + e^{-2\gamma k_2}\frac{2(t+k_1)^{2-2\gamma}}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)}\Big),$$

где $k_1,\dots,k_5$ — произвольные константы,

2.2.

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{x+k_3}{t+k_1} - k_6\frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3-2\gamma}(t+k_1)^{1-2\gamma}|t+k_1|,\\
v &= \frac{y+k_4}{t+k_1} - k_6\frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3-2\gamma}(t+k_1)^{1-2\gamma}|t+k_1|,\\
\rho &= \frac{e^{-2k_2}}{(t+k_1)^2}\Big(e^{-k_2}\frac{x+y+k_3+k_4}{|t+k_1|}\\
&\qquad\qquad + e^{-2\gamma k_2}\frac{2k_6(t+k_1)^{2-2\gamma}}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)} + k_5\Big)^{k_6-1},\\
p &= \frac{e^{-2\gamma k_2}}{(t+k_1)^{2\gamma}}\Big(e^{-k_2}\frac{x+y+k_3+k_4}{|t+k_1|}\\
&\qquad\qquad + e^{-2\gamma k_2}\frac{2k_6(t+k_1)^{2-2\gamma}}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)} + k_5\Big)^{k_6},
\end{aligned}
$$

где $k_1, \ldots, k_6$ — произвольные константы.

2.3.

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,y + c(t)\,,\ k_2 \neq 0\,,\\
v &= \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2-k_2^2}\,y + d(t)\,,\\
\rho &= \frac{e^{-2k_3+k_4}}{(t+k_1)^2+k_2^2}\ \exp(f)\,,\\
p &= \frac{e^{-2\gamma k_3+k_4}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\gamma}}\ \exp(f)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f = {}& \frac{e^{-k_3}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{1/2}}\big(\,x(\cos\beta-\sin\beta)+y(\cos\beta+\sin\beta)\,\big)\\
&-\int\frac{e^{-k_3}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{1/2}}\big(\,c(t)(\cos\beta-\sin\beta)+d(t)(\cos\beta+\sin\beta)\,\big)dt\,,
\end{aligned}
$$

где

$$
\beta = \operatorname{arctg}\Big(\frac{t+k_1}{k_2}\Big) + k_5\,,
$$

$$c(t) = \big((e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_c+k_6)\cos\beta-(e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_d+k_7)\sin\beta\big)\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$d(t) = \big((e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_c+k_6)\sin\beta+(e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_d+k_7)\cos\beta\big)\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma_c = \frac{1}{\delta^2+1}\int \frac{1}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\gamma+1}}\big((\delta^2-2\delta-1)(t+k_1)^2 + 2k_1(-\delta^2-2\delta+1)(t+k_1)+k_1^2(-\delta^2+2\delta+1)\big)dt\,,$$

$$\Gamma_d = \frac{1}{\delta^2+1}\int \frac{1}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\gamma+1}}\big((\delta^2+2\delta-1)(t+k_1)^2 + 2k_1(\delta^2-2\delta-1)(t+k_1)+k_1^2(-\delta^2-2\delta+1)\big)dt\,,$$

$\delta = \mathrm{tg}(k_5)$ и $k_1, \ldots, k_7$ — произвольные константы.

2.4.

$$u = \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,y + k_4c(t)\,,\ k_2 \neq 0\,,$$

$$v = \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2-k_2^2}\,y + k_4d(t)\,,$$

$$\rho = \frac{e^{-2k_3}}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,f^{k_4-1}\,,$$

$$p = \frac{e^{-2\gamma k_3+k_4}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\gamma}}\,f^{k_4}\,,$$

где $k_1, \ldots, k_4$ — произвольные константы, а функции $c(t)$, $d(t)$ и f вычисляются по тем же формулам, что и выше.

Список литературы

[1] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М. : Наука, 1981.— 368 с. ↑[], 1.1, 1.2, 2

[2] Lychagin V., Yumaguzhin V. *On geometric structures of 2-dimensional gas dynamics equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2009. **30**, no. 4, p. 327–332. ↑[], 1.4

V. A. Yumaguzhin, V. N. Yumaguzhina. *New torsion free explicit solutions of 2-dimensional gas dynamics equations.*

Abstract. In this work, it is represented new torsion free solutions for the system of equations of adiabatic polytropic gas motion.

Key Words and Phrases: System of equations of adiabatic gas motion, polytropic gas, geometric structure, differential invariant, explicit solution .

Образец ссылки на статью:

В. А. Юмагужин, В. Н. Юмагужина. *Новые решения без кручения 2-мерных уравнений газовой динамики* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 2(6), с. 89–95. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_2_89-95.pdf