

О. В. Батурина, А. В. Булатов, О. В. Моржин

**Алгоритмы нелокального улучшения управлений  
в классах нелинейных дифференциальных систем**

Аннотация. Статья посвящена алгоритмам нелокального улучшения управлений в нелинейных системах, включая билинейные системы в контексте проблем оптимального управления квантовыми (спиновыми) системами.

*Ключевые слова и фразы:* управляемые системы, алгоритмы улучшения, вычислительные эксперименты.

**Введение**

Задачи улучшения и оптимизации управлений в динамических системах представляют одно из основных направлений системного анализа. Объект исследования в данной статье представлен нелинейными детерминированными задачами оптимального управления дифференциальными системами со свободным правым концом траектории. В качестве управлений выступают управляющие функции и параметры. Идеи, на которых основана работа, происходят из трудов В.Ф. Кротова, В.И. Гурмана [1, 2], О.В. Васильева, О.В. Срочко [3, 4], А.С. Булдаева [5] и других по методам улучшения управлений.

Рассмотрим следующий достаточно общий класс оптимизационных задач [6]:

$$(1) \quad I(\sigma) = F(x(t_1), w) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t), w) dt \rightarrow \inf,$$

$$(2) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), w), \quad x(t_0) = a, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$(3) \quad u(t) \in U \subseteq E^m, \quad t \in T, \quad w \in W \subseteq E^z, \quad a \in A \subseteq E^n,$$

где  $\sigma = (x(\cdot), u(\cdot), w, a)$  — управляемый процесс, который будем называть допустимым, если управляющая функция  $u(t)$ ,  $t \in T$ , — кусочно-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-08-90030-Бел\_a, 11-01-90718-моб\_ст).

непрерывная, удовлетворяет поточечному ограничению  $u(t) \in U$  на  $T$  из (3), при этом траектория  $x(t)$ ,  $t \in T$ , системы (2) — непрерывная и кусочно-дифференцируемая, а управляющие векторные параметры  $w$ ,  $a$  удовлетворяют включениям  $w \in W$ ,  $a \in A$  из (3). Отрезок  $T$  считается фиксированным, множества  $U$ ,  $A$ ,  $W$  полагаются выпуклыми и замкнутыми. Обозначим множество допустимых процессов через  $D$ , допустимых управляющих функций — через  $V$ .

На функции  $F(x, w)$ ,  $f^0(t, x, u, w)$ ,  $f(t, x, u, w)$  вводятся стандартные теоретико-функциональные условия следующего вида:

- а) функция  $F(x, w)$  — непрерывно-дифференцируемая по  $(x, w)$  на  $E^n \times W$ ;
- б) функции  $f^0(t, x, u, w)$ ,  $f(t, x, u, w)$  и их производные по  $x, u, w$  — непрерывные по совокупности аргументов  $(t, x, u, w)$  на  $T \times E^n \times U \times W$ ;
- в) функция  $f(t, x, u, w)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x \in E^n$  на  $T \times E^n \times U \times W$  с общей константой  $L > 0$ .

В общем случае решением задачи (1)–(3) считается минимизирующая последовательность  $\{\sigma^s\} \in D$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , на которой целевой функционал  $I(\sigma)$  стремится к  $\inf_D I(\sigma)$  (вообще говоря, к глобальному). Задача улучшения заданного процесса  $\sigma^I \in D$  состоит в следующем: найти процесс  $\sigma^{II} \in D$  с условием  $\Delta I(\sigma^{II}) = I(\sigma^{II}) - I(\sigma^I) \leq 0$ . Отметим, что к задаче с параметром сводится задача с нефиксированным моментом окончания процесса управления через замену переменной времени.

Улучшение состоит в вычислении процесса, на котором функционал уменьшается. Основная цель исследования состоит в разработке нелокальных алгоритмов улучшения. Под нелокальным понимаем улучшение управления без осуществления трудоемкой операции (параметрического) варьирования в достаточно малой окрестности улучшаемого управления (в отличие, например, от метода условного градиента). В локальных методах с помощью варьирования ищется в такой окрестности тот элемент, который нам дает улучшение (так в методе условного градиента). Конструктивной основой нелокального улучшения в задаче (1)–(3) выступает получение точной формулы приращения целевого функционала.

В результате получается улучшающая последовательность, которая может быть минимизирующей последовательностью. Таким образом, при помощи последовательных улучшений можно построить

приближенное решение оптимизационной задачи. Кроме того, отдельные нелокальные методы [7] позволяют улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума Л.С. Понтрягина, включая особые управления.

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим класс задач, ориентированных на исследования по оптимизации квантовых систем, включая спиновые системы [8–11]:

$$(4) \quad \begin{aligned} I(\sigma) &= \langle x(t_1), Qx(t_1) \rangle \rightarrow \inf, \\ \dot{x}(t) &= (A + Bu(t))x(t), \quad x(0) = x_0, \end{aligned}$$

где  $x \in R^n$ , управление скалярное,  $u(t) \in E$ ,  $t \in [0, t_1]$ , момент  $t_1$  может быть не фиксированным;  $(n \times n)$ -мерные матрицы  $Q$ ,  $A$ ,  $B$  — числовые. Заметим, что матрица  $Q$  может оказаться отрицательно определенной. В работе [11] при заданном  $t_1$  применяется нелокальный метод, предложенный в [10].

## 1. Нелокальные вычисления в задачах (1)–(3) и (4)

Следуя работам [6, 7], образуем конструкции алгоритмов улучшения сначала для задачи (1)–(3). Вводится обобщенный лагранжиан [2] в следующем виде:

$$L(\sigma) = G(x(t_1), w, a) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t), w) dt,$$

$$G(x(t_1), w, a) = F(x(t_1), w) + \varphi(t_1, x(t_1)) - \varphi(t_0, a),$$

$$R(t, x, u, w) = \langle \varphi_x(t, x), f(t, x, u, w) \rangle - f^0(t, x, u, w) + \varphi_t(t, x).$$

Пусть  $\Delta L(\sigma)$  — приращение целевого функционала на улучшаемом процессе  $\sigma^I \in D$  и некотором допустимом процессе  $\sigma$ .

Предполагаем существование такой непрерывной кусочно-дифференцируемой функции  $p(t)$  на  $T$ , что  $\varphi(t, x) = \langle p(t), x \rangle$  и на допустимом процессе  $(x(t), u(t), w, a)$ ,  $t \in T$ , справедлива дифференциально-алгебраическая сопряженная система [6]

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{p}(t) &= -H_x(t, p(t), x^I(t), u^I(t), w^I) - r(t), \\ p(t_1) &= -F_x(x^I(t_1), w^I) - q, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} &F(x(t_1), w^I) - F(x^I(t_1), w^I) = \\ &= \langle F_x(x^I(t_1), w^I), \Delta x(t_1) \rangle + \langle q, \Delta x(t_1) \rangle, \end{aligned}$$

$$(7) \quad F(x(t_1), w) - F(x(t_1), w^I) = \langle F_w(x(t_1), w^I) + l, \Delta w \rangle,$$

$$(8) \quad \begin{aligned} H(t, p(t), x(t), u^I(t), w^I) - H(t, p(t), x^I(t), u^I(t), w^I) = \\ = \langle H_x(t, p(t), x^I(t), u^I(t), w^I), \Delta x(t) \rangle + \langle r(t), \Delta x(t) \rangle, \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} H(t, p(t), x(t), u(t), w^I) - H(t, p(t), x(t), u^I(t), w^I) = \\ = \langle H_u(t, p(t), x(t), u^I(t), w^I) + d(t), \Delta u(t) \rangle, \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} H(t, p(t), x(t), u(t), w) - H(t, p(t), x(t), u(t), w^I) = \\ = \langle H_w(t, p(t), x(t), u(t), w^I) + b, \Delta w \rangle, \end{aligned}$$

связанная с формулой приращения

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta I(\sigma) = & \left\langle F_w(x(t_1), w^I) + \right. \\ & + l - \int_{t_0}^{t_1} (H_w(t, p(t), x(t), u(t), w^I) + b) dt, \Delta w \rangle - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \langle H_u(t, p(t), x(t), u^I(t), w^I) + d(t), \Delta u(t) \rangle dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle, \end{aligned}$$

где «добавки»  $l \in E^z$ ,  $q \in E^n$ ,  $b \in E^z$ ,  $d(t) \in E^m$ ,  $r(t) \in E^n$ ,  $\Delta x(t) = x(t) - x^I(t)$ ,  $\Delta w = w - w^I$ ,  $\Delta u(t) = u(t) - u^I(t)$ ,  $t \in T$ ; функция Понтрягина  $H(t, p, x, u, w) = \langle p, f(t, x, u, w) \rangle - f^0(t, x, u, w)$ .

Точная (без остаточных членов разложений) формула приращений (11), нестандартная дифференциально-алгебраическая сопряженная система (5)–(10) являются основой для новых методов нелокального улучшения — в дополнение к известному глобальному методу В.Ф. Кротова [2]. Сопряженная система учитывает нелинейный характер изучаемого класса задач оптимального управления.

Алгебраические уравнения (6)–(10) разрешаются в общем случае неоднозначно: например, уравнение (8) связывает  $n$  неизвестных  $r_1(t), \dots, r_n(t)$ . Введенные добавки к градиентам, посчитанным с учетом улучшаемого процесса  $\sigma^I$ , определяются совместно с решением  $p(t)$  сопряженной системы. Сформулируем практическое правило разрешения алгебраических уравнений на примере уравнения (8): для определения компоненты  $r_j(t)$ , отвечающей компоненте  $x_j$ , по которой функция  $H(t, p, x, w)$  нелинейная, через некоторую зависимость  $\bar{r}_j(t, p, x, w)$  можно занулить компоненты  $\bar{r}_i(t, p, x, w)$ ,  $i = \bar{1}, \bar{n}$ ,  $i \neq j$ , отвечающие таким  $x_i$ , по которым функция  $H(t, p, x, w)$  нелинейная, а затем выразить  $\bar{r}_j(t, p, x, w)$  при условии, что  $\Delta x_j \neq 0$ . Функции  $r(t)$ ,  $d(t)$  будем полагать кусочно-дифференцируемыми.

В плане вывода конструкций, позволяющих улучшать управления на основе точной формулы приращения (11), связанной с сопряженной системой (5)–(10), проведем последовательно оценки для  $\Delta I(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \Delta I(\sigma) \leq & -\frac{1}{\beta} \left\langle P_W \left( w^I + \beta \int_{t_0}^{t_1} (H_w(t, p(t), x(t), u(t), w^I) + b) dt - \right. \right. \\ & \left. \left. - F_w(x(t_1), w^I) - l \right) - w^I, \Delta w \right\rangle - \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle P_U (u^I(t) + \right. \\ & \left. + \alpha (H_u(t, p(t), x(t), u^I(t), w^I) + d(t))) - u^I(t), \Delta u(t) \right\rangle dt - \\ & - \frac{1}{\mu} \left\langle P_A (a^I + \mu p(t_0)) - a^I, \Delta a \right\rangle, \end{aligned}$$

где алгоритмические параметры  $\alpha, \beta, \mu$  положительны. В связи с сопряженной системой (5)–(10) рассмотрим проекционные зависимости

$$\begin{aligned} w_\beta &= P_W \left( w^I + \beta \int_{t_0}^{t_1} (H_w(t, p(t), x(t), u(t), w^I) + b) dt - \right. \\ & \left. - F_w(x(t_1), w^I) - l \right), \\ u_\alpha(t) &= P_U \left( u^I(t) + \alpha (H_u(t, p(t), x(t), u^I(t), w^I) + d(t)) \right), \\ a_\mu &= P_A (a^I + \mu p(t_0)), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \mu > 0, \quad t \in T. \end{aligned} \tag{12}$$

В терминах зависимостей (12) получаем мажорирующую оценку

$$\begin{aligned} \Delta I(\sigma_{\alpha, \beta, \mu}) \leq & -\frac{1}{\beta} \|w_\beta - w^I\|^2 - \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \|u_\alpha(t) - u^I(t)\|^2 dt - \\ & - \frac{1}{\mu} \|a_\mu - a^I\|^2 \leq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \mu > 0, \end{aligned} \tag{13}$$

на приращение функционала, положив  $u = u_\alpha, w = w_\beta, a = a_\mu$  (процесс  $\sigma_{\alpha, \beta, \mu} = (x_{\alpha, \beta, \mu}, u_\alpha, w_\beta, a_\mu)$ ).

В соответствии с (11)–(13) рассматривается условие улучшения заданного процесса  $\sigma^I$  в форме векторного операторного уравнения

$$(u, w, a) = A^{\alpha, \beta, \mu}(u, w, a), \quad A^{\alpha, \beta, \mu} : (u, w, a) \mapsto (u_\alpha, w_\beta, a_\mu). \tag{14}$$

Оператор  $(u, w, a) \mapsto (u_\alpha, w_\beta, a_\mu)$  можно считать однозначным (если, в частности, указан конкретный способ разрешения алгебраических уравнений в сопряженной системе).

Для улучшения заданного процесса  $\sigma^I \in D$  достаточно решить (14) при фиксированных  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\mu > 0$ . Предлагается итерационный процесс типа метода простой итерации:

$$(15) \quad \begin{aligned} (u^{(k+1)}, w^{(k+1)}, a^{(k+1)}) &= A^{\alpha, \beta, \mu}(u^{(k)}, w^{(k)}, a^{(k)}), \\ u^{(k)} &\in V, \quad w^{(k)} \in W, \quad a^{(k)} \in A, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения можно взять  $u^{(0)} = u^I$ ,  $w^{(0)} = w^I$ ,  $a^{(0)} = a^I$ .

Построим модификацию предложенного проекционного метода нелокального улучшения, базирующуюся на дополнительном параметре регулировки сходимости итерационного процесса. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta I(\sigma) &\leq -\frac{1}{\tau_\beta \beta} [\langle P_W(w + \tau_\beta(w_\beta - w)), \Delta w \rangle - \langle w, \Delta w \rangle + \tau_\beta \|\Delta w\|^2] - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_\alpha \alpha} \int_{t_0}^{t_1} [\langle P_U(u(t) + \tau_\alpha(u_\alpha(t) - u(t))), \Delta u(t) \rangle - \\ &\quad - \langle u(t), \Delta u(t) \rangle + \tau_\alpha \|\Delta u(t)\|^2] dt - \frac{1}{\tau_\mu \mu} [\langle P_A(a + \tau_\mu(a_\mu - a)), \Delta a \rangle - \\ &\quad - \langle a, \Delta a \rangle + \tau_\mu \|\Delta a\|^2]. \end{aligned}$$

Вводятся проекционные зависимости

$$\begin{aligned} u_{\alpha, \tau_\alpha}(t) &= P_U(u(t) + \tau_\alpha(u_\alpha(t) - u(t))), \quad \tau_\alpha \neq 0, \quad t \in T, \\ w_{\beta, \tau_\beta} &= P_W(w + \tau_\beta(w_\beta - w)), \quad \tau_\beta \neq 0, \\ a_{\mu, \tau_\mu} &= P_A(a + \tau_\mu(a_\mu - a)), \quad \tau_\mu \neq 0. \end{aligned}$$

Справедлива мажорирующая оценка типа (13):

$$\begin{aligned} \Delta I(\sigma_{\alpha, \beta, \mu, \tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\mu}) &\leq -\frac{1}{\beta} \|\beta, w_{\tau_\beta} - w^I\|^2 - \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \|u_{\alpha, \tau_\alpha}(t) - u^I(t)\|^2 dt - \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \|a_{\mu, \tau_\mu} - a^I\|^2 \leq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \mu > 0, \end{aligned}$$

где процесс  $\sigma_{\alpha, \beta, \mu, \tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\mu} = (x_{\alpha, \beta, \mu, \tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\mu}, u_{\alpha, \tau_\alpha}, w_{\beta, \tau_\beta}, a_{\mu, \tau_\mu})$ .

Для улучшения предлагается решить параметризованное векторное уравнение

$$(u, w, a) = A^{\alpha, \tau_\alpha, \beta, \tau_\beta, \mu, \tau_\mu}(u, w, a)$$

с определенными значениями  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\tau_\alpha \neq 0$ ,  $\tau_\beta \neq 0$ ,  $\tau_\mu \neq 0$ .

В данных алгоритмах улучшения параметры проектирования считаются фиксированными.

Для реализации подхода применительно к задаче (4) предлагается введение управляющего параметра  $w$  с заменой переменной времени:  $t = t_1\theta$ ,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $dt = w\theta$ ,  $w = t_1$ . В результате приходим к вспомогательной задаче

$$I(\sigma) = -\langle x(1), Qx(1) \rangle \rightarrow \inf, \quad \dot{x}(\theta) = w(A + Bu(\theta))x(\theta), \quad x(0) = x_0,$$

где  $\theta \in [0, 1]$ ,  $w \geq 0$ . Функция  $H(t, p, x, u, w) = p^T w(A + Bu)x$ . Рассматривается дифференциально-алгебраическая сопряженная система

$$\begin{aligned} \dot{p}(\theta) &= -w^I(A^T + B^T u^I(\theta))p(\theta), \quad p(1) = 2Qx^I(1) - q, \\ -\langle x(1), Qx(1) \rangle + \langle x^I(1), Qx^I(1) \rangle &= -\langle 2Qx^I(1), \Delta x(1) \rangle + \langle q, \Delta x(1) \rangle. \end{aligned}$$

Следуя (12), записываем проекционные зависимости

$$\begin{aligned} u_\alpha(\theta) &= u^I(\theta) + \alpha p^T(\theta)w^I Bx(\theta), \quad \alpha > 0, \\ w_\beta &= P_{[\underline{w}, \bar{w}]}(w^I + \beta \int_0^1 p^T(\theta)(A + Bu(\theta))x(\theta)d\theta), \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

где  $\underline{w}$ ,  $\bar{w}$  — некоторые положительные значения.

Далее составляется итерационный процесс, аналогичный (15):

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(\theta) &= u^I(\theta) + \alpha(p^{(k)})^T(\theta)w^I Bx^{(k)}(\theta), \quad \alpha > 0, \\ w^{(k+1)} &= P_{[\underline{w}, \bar{w}]}(w^I + \beta \int_0^1 (p^{(k)})^T(\theta)(A + Bu^{(k)}(\theta))x^{(k)}(\theta)d\theta), \\ &\beta > 0, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

## 2. Нелокальные улучшения в билинейной системе с учетом специфики задачи

В данном разделе, следуя публикациям [10, 11], опишем и применим алгоритм улучшения, который базируется не на получении точной формулы приращения целевого функционала, а на учете специфики класса задач (4), причем далее момент  $t_1$  будем считать фиксированным. На основе конструктивных результатов статьи [10] проиллюстрируем важное актуальное направление приложения теории и методов оптимального управления к проблемам проектирования оптимальных квантовых систем.

Рассматривается квантовая система [8, 11, 12]

$$(16) \quad i\hbar\dot{\psi}(t) = \hat{H}[u(t)]\psi(t), \quad \psi(0) = \xi,$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\hat{H}[u(t)]$  — гамильтониан,  $t \in [0, T]$ . Функция  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — кусочно-непрерывная, характеризует воздействие внешним полем. В рамках статьи функция  $u$  действительная и скалярная.

Вводится целевой критерий с вещественнозначным функционалом:

$$(17) \quad I(\psi, u) = 1 - |\langle \psi_G, \psi(T) \rangle|^2 = \\ 1 - \langle \psi(T), \psi_G \rangle \langle \psi_G, \psi(T) \rangle \rightarrow \inf, \quad |\psi_G|^2 = 1,$$

где  $\psi_G$  — заданный вектор,  $|\cdot|^2$  — модуль комплексного числа.

Будем исследовать случай  $n = 2$ . Рассматривается гамильтониан в форме Ландау-Зинера, использованный также в работе [12]:  $H = \begin{pmatrix} u & \omega \\ \omega & -u \end{pmatrix}$ . Система (16) в покомпонентной форме имеет вид:

$$(18) \quad i\hbar\dot{\psi}_1 = u\psi_1 + \omega\psi_2, \quad i\hbar\dot{\psi}_2 = \omega\psi_1 - u\psi_2, \\ \psi_1(0) = \xi_1, \quad \psi_2(0) = \xi_2.$$

Запишем целевой критерий (17) в двумерном случае:

$$(19) \quad I(\psi, u) = 1 - |(\overline{\psi_G})_1\psi_1(T) + (\overline{\psi_G})_2\psi_2(T)|^2 \rightarrow \inf.$$



Проведем замену  $\psi_1 = z_1 + iz_3$ ,  $\psi_2 = z_2 + iz_4$ , тогда управляемая система представится в виде

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{\hbar} (uz_3 + \omega z_4), & \dot{z}_2 &= \frac{1}{\hbar} (\omega z_3 - uz_4), \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{\hbar} (-uz_1 - \omega z_2), & \dot{z}_4 &= \frac{1}{\hbar} (-\omega z_1 + uz_2), \\ z(0) &= z_S = (\operatorname{Re} \psi_1(0), \operatorname{Re} \psi_2(0), \operatorname{Im} \psi_1(0), \operatorname{Im} \psi_2(0))^T. \end{aligned}$$

Полагаем в (19)  $\psi_G = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , где  $a_1, b_1, a_2, b_2$  — действительные числа, удовлетворяющие условию  $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 1$ . Целевой критерий принимает следующий вид:

$$(21) \quad \begin{aligned} I(z, u) &= 1 - [(a_1^2 + b_1^2)z_1^2(T) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)z_1(T)z_2(T) + \\ &+ 2(a_1b_2 - b_1a_2)z_1(T)z_4(T) + (a_2^2 + b_2^2)z_2^2(T) + \\ &+ 2(a_2b_1 - b_2a_1)z_2(T)z_3(T) + (b_1^2 + a_1^2)z_3^2(T) + \\ &+ 2(b_1b_2 + a_1a_2)z_3(T)z_4(T) + (b_2^2 + a_2^2)z_4^2(T)] = \\ &= 1 - \langle z(t_F), Lz(T) \rangle \rightarrow \inf, \end{aligned}$$

где матрица коэффициентов

$$L = \begin{pmatrix} (a_1^2 + b_1^2) & (a_1a_2 + b_1b_2) & 0 & (a_1b_2 - b_1a_2) \\ (a_1a_2 + b_1b_2) & (a_2^2 + b_2^2) & (a_2b_1 - b_2a_1) & 0 \\ 0 & (a_2b_1 - b_2a_1) & (b_1^2 + a_1^2) & (b_1b_2 + a_1a_2) \\ (a_1b_2 - b_1a_2) & 0 & (b_1b_2 + a_1a_2) & (b_2^2 + a_2^2) \end{pmatrix}.$$

Запишем функцию Понтрягина:

$$\begin{aligned} H(p, z, u) &= \frac{1}{\hbar} [p_1(uz_3 + \omega z_4) + p_2(\omega z_3 - uz_4) + \\ &+ p_3(-uz_1 - \omega z_2) + p_4(-\omega z_1 + uz_3)]. \end{aligned}$$

Стандартная сопряженная система по Л.С. Понтрягину:

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{1}{\hbar} (up_3 + \omega p_4), & \dot{p}_2 &= \frac{1}{\hbar} (\omega p_3 - up_4), \\ \dot{p}_3 &= -\frac{1}{\hbar} (up_1 + \omega p_2), & \dot{p}_4 &= \frac{1}{\hbar} (up_2 - \omega p_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1(T) &= 2(a_1^2 + b_1^2)z_1(T) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)z_2(T) + \\
&\quad + 2(a_1b_2 - b_1a_2)z_4(T), \\
p_2(T) &= 2(a_1a_2 + b_1b_2)z_1(T) + 2(a_2^2 + b_2^2)z_2(T) + \\
&\quad + 2(a_2b_1 - b_2a_1)z_3(T), \\
p_3(T) &= 2(a_2b_1 - b_2a_1)z_2(T) + 2(b_1^2 + a_1^2)z_3(T) + \\
&\quad + 2(b_1b_2 + a_1a_2)z_4(T), \\
p_4(T) &= 2(a_1b_2 - b_1a_2)z_1(T) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)z_3(T) + \\
&\quad + 2(b_2^2 + a_2^2)z_4(T).
\end{aligned}$$

Для линейной по  $u$  задачи (20), (21) условно вводится ограничение

$$(23) \quad u(t) \in [-\nu, \nu], \quad t \in [0, T], \quad \nu > 0,$$

в плане построения зависимости  $\tilde{u}(t, z) = \nu \operatorname{sign} \mathcal{K}(p(t), z)$ ,  $t \in [0, T]$ , где функция переключения  $\mathcal{K}(p(t), z) = H_u(p(t), z, u)$ .

Максимизирующее отображение  $\tilde{u}(t, z)$  [10] записывается в форме

$$(24) \quad \tilde{u}(t, z) = \begin{cases} -\nu, & \mathcal{K}(p(t), z) < 0, \\ \text{любое из } [-\nu, \nu], & \mathcal{K}(p(t), z) = 0, \\ \nu, & \mathcal{K}(p(t), z) > 0. \end{cases}$$

В случае  $\mathcal{K}(p(t), z) = 0$  можно полагать  $\tilde{u}$  равным  $-\nu$  или  $\nu$ , при этом частые переключения управления с  $-\nu$  на  $\nu$  на особом режиме могут означать практическую нереализуемость расчетного управления. Поэтому вместо реализации таких переключений будем использовать специальную формулу для управления, предложенную в статьях [9, 10].

С вычислительной точки зрения равенство нулю понимается в смысле принадлежности некоторой достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестности нуля.

Представим алгоритм улучшения приближения  $u^{(k)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $k \geq 0$ , где  $k$  — это номер элемента улучшающей последовательности для оптимизационной задачи (20), (21), (23). Выполняются следующие шаги:

- (1) интегрирование системы (20) при управлении  $u^{(k)}$  для расчета траектории  $z^{(k)}$ ;
- (2) вычисление решения  $p^{(k)}$  сопряженной системы (22) на процессе  $(z^{(k)}, u^{(k)})$ ;

- (3) интегрирование системы (20) с отображением  $\tilde{u}^{(k)}(t, z)$ ,  $t \in [0, T]$ , в плане расчета траектории  $z^{(k+1)}$ ;
- (4) построение нового приближения  $u^{(k+1)}(t) = \tilde{u}^{(k)}(t, z^{(k+1)}(t))$ ,  $t \in [0, T]$ .

В алгоритме изучается поведение знака производной функции переключения, следуя формулам из статьи [10].

Линейность задачи по  $u$  является положительным моментом для разрешения операции максимизации функции Понтрягина. С другой стороны, интегрирование системы (20) с зависимостью (24) имеет известные особенности [10]. В этой связи на практике известен подход с регуляризацией целевого функционала. Вводится в рассмотрение вспомогательный целевой критерий

$$(25) \quad J^\beta(z, u) = I(z, u) + \beta \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \inf, \quad \beta > 0.$$

Функция Понтрягина  $H^\beta(t, p, z, u) = H(t, p, z, u) - \beta u^2$ . Дифференцируя эту функцию по  $u$  и рассматривая  $p^{(k)}(t)$ , приходим к зависимости

$$(26) \quad u^\beta(t, z) = \frac{1}{2\beta} \mathcal{K}(t, p^{(k)}(t), z), \quad t \in [0, T], \quad \beta > 0.$$

Проведена программная реализация глобального метода (на языках Matlab, Fortran). Расчеты проведены для различных условных значений  $\psi_G$ ,  $\xi$ . Представим сравнительные результаты расчетов с условным набором

$$\begin{aligned} z_S &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)^T, \\ a_1 &= 0.6, \quad b_1 = -0.3, \quad a_2 = 0.1, \quad b_2 = \sqrt{0.54}, \\ \omega &= h = 1, \quad T = 1.5. \end{aligned}$$

Приближение  $u^{(0)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , представляет собой решение краевой задачи [12]:

$$\begin{aligned} \dot{u}^{(0)}(t) &= 4\gamma(\omega^2 + u^2(t)), \\ \gamma &= \frac{1}{4T\omega} \left[ \arctg \left( \frac{u^{(0)}(T)}{\omega} \right) - \arctg \left( \frac{u^{(0)}(0)}{\omega} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2T\omega} \arctg \left( \frac{u^{(0)}(0)}{\omega} \right), \quad u^{(0)}(0) = -u^{(0)}(T). \end{aligned}$$

Формирование начального приближения таким образом исходит из адиабатического приближения в квантовой механике. Общее решение

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{u^{(0)}(t)}{\omega} \right) = 4\gamma\omega t + C,$$

частное решение

$$(27) \quad u^{(0)}(t) = \omega \operatorname{tg} (2\gamma\omega(2t - T)), \quad t \in [0, T].$$

Функция  $u^{(0)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , формируется численно по формуле (27) в компьютерной программе.

Полагаем  $\varepsilon = 0.001$ . Интегрирование систем осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

**1. Глобальный метод с применением формулы для управления при особом режиме [10].** Считаем  $u^{(0)}(0) = -30$  в формуле (27) для  $\gamma$ . Задаем  $\nu = 30$  в условии (23).

На начальном приближении  $u^{(0)}(t)$  имеем значение  $I^{(0)} = 0.7681$ . В таблице 1 приведены результаты последовательных улучшений по первым итерациям (ГлМ — глобальный метод, ГрМ — градиентный метод). Рис. 1 иллюстрирует высокую сравнительную эффективность глобального метода. В отличие от градиентного метода, глобальный метод не зависит от алгоритмического параметра. Глобальный метод обеспечивает быструю релаксацию: на 9-й итерации получено значение  $I = 0.000952$ , что составляет 0.124% от  $I^{(0)}$ . Сравнение графиков управлений  $u^{(1)}$ ,  $u^{(9)}$ , полученных за первую итерацию и в результате серии итераций соответственно, показывает, что участок  $[0, t_1]$ , на котором управление принимает значение  $-\nu$ , важен в плане реализации выхода на особый режим.

ТАБЛИЦА 1. Сравнение результатов глобального и градиентного методов по итерациям

Номер $k$	$I(z^{(k)}, u^{(k)})$ по ГлМ	$I(z^{(k)}, u^{(k)})$ по ГрМ
0	0.7681	0.7681
1	0.1401	0.6911
2	0.0040	0.6107
3	0.0021	0.5421
4	0.0015	0.4913

На рис. 2 приведены графики управлений  $u^{(0)}(t)$  и  $u^{(9)}(t)$ . В точке  $t_1 = 0.0667$  происходит переключение с граничного управления

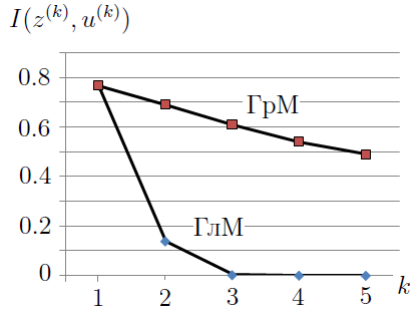


Рис. 1. Сравнение результатов глобального и градиентного методов по итерациям

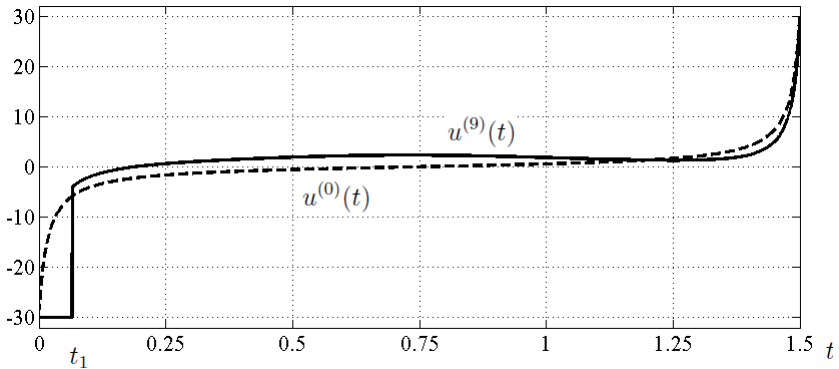


Рис. 2. Начальное приближение  $u^{(0)}$  и расчетное управление  $u^{(9)}$ , полученное на 9-й итерации

$u^{(9)}(t) = -30$  на внутреннее  $u^{(9)}(t) = \tilde{u}^{(9)}(t)$ , где функция  $\tilde{u}^{(9)}(t)$  определяется согласно теории [10]. Участку  $[0, t_1)$  соответствуют достаточно большие по модулю отрицательные значения функции переключения  $k^{(9)}(t) = \mathcal{K}(p^{(8)}(t), z^{(9)}(t))$ .

На рис. 3 показаны графики функций  $z_j^{(9)}(t)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , соответствующих управлению  $u^{(9)}(t)$ . Графики иллюстрируют достаточно быстрое изменение траектории на участке  $[0, t_1)$ , где применяется управление, равное  $-\nu$ . Это необходимо для выхода на особый режим при заданном начальном состоянии.

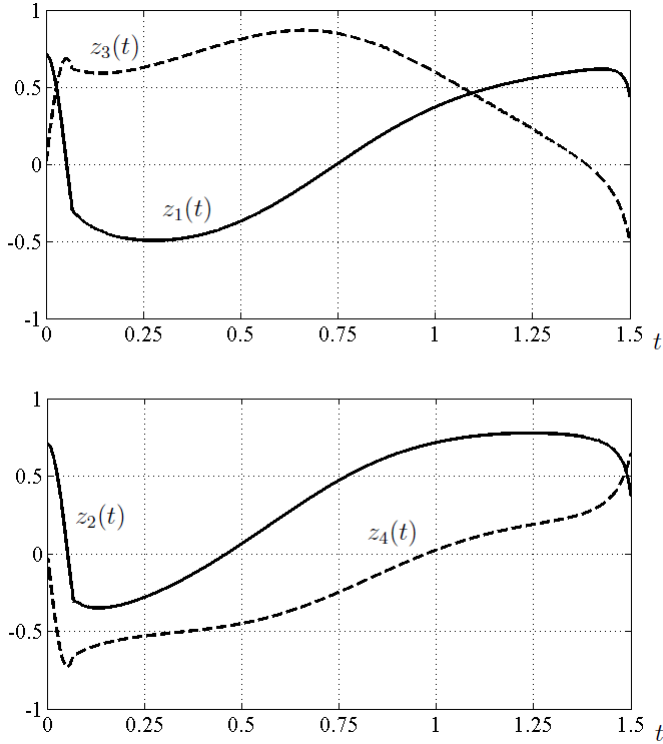


Рис. 3. Графики функций  $z_j^{(9)}(t)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , соответствующих управлению  $u^{(9)}(t)$

Сравнительные эксперименты с привлечением градиентного метода [9] показывают, что глобальный метод надежнее, так как, во-первых, учитывает специфику особого оптимального управления и, во-вторых, не требует настройки алгоритмического параметра (в нерегуляризованной, исходной формулировке).

## 2. Глобальный метод с регуляризацией по управлению.

Полагаем значение  $u^{(0)}(0) = -30$  в формуле для  $\gamma$  в (27). Рассматриваемая модификация глобального метода не требует условного ограничения (23); тем не менее, в контексте с изложенными выше результатами расчетов полагаем  $\nu = 30$  в ограничении (23).

Рассматриваем сначала  $\beta = 0.0055$ . В таблице 2 показаны последовательные улучшения по итерациям, а на рис. 4 — график управления  $u^{(9)}(t)$ .

Регуляризация требует настройки параметра в (25), (26), причем проигрывает стандартному глобальному методу и по шагам уменьшения функционала  $I$ , что обусловлено влиянием добавочного слагаемого в функционале  $I^\beta$ . Положительной чертой модификации является непрерывность функции  $\tilde{u}^{(k)}(t, z)$  по  $z$ .

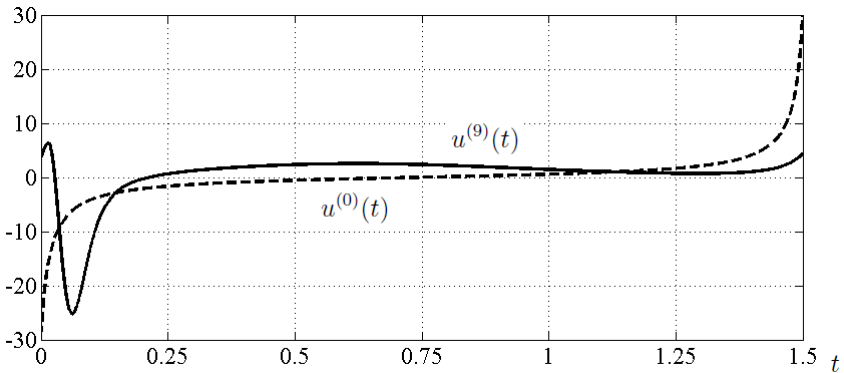


Рис. 4. Начальное приближение  $u^{(0)}$  и расчетное управление  $u^{(9)}$ , полученное на 9-й итерации при  $\beta = 0.0055$

Таблица 2. Результаты глобального метода по итерациям при  $\beta = 0.0055$

Номер $k$	Значение $I(z^{(k)}, u^{(k)})$	Номер $k$	Значение $I(z^{(k)}, u^{(k)})$
0	0.7681	5	0.0027
1	0.0614	6	0.0017
2	0.0242	7	0.0014
3	0.0119	8	0.0013
4	0.0057	9	0.0012

Далее, рассматриваем меньшее значение  $\beta = 0.002$ . В таблице 3 показаны последовательные улучшения по итерациям. Рис. 5 иллюстрирует учет ограничения (23) при данном значении  $\beta$ .

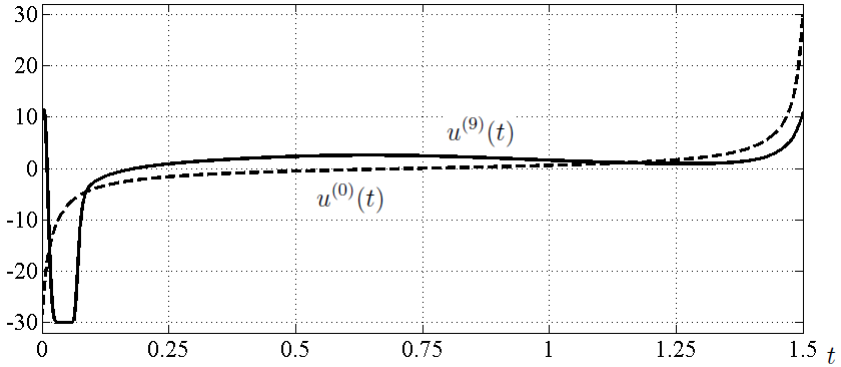


Рис. 5. Начальное приближение  $u^{(0)}$  и расчетное управление  $u^{(9)}$ , полученное на 9-й итерации при  $\beta = 0.002$

ТАБЛИЦА 3. Результаты глобального метода по итерациям при  $\beta = 0.002$

Номер $k$	Значение $I(z^{(k)}, u^{(k)})$	Номер $k$	Значение $I(z^{(k)}, u^{(k)})$
0	0.7681	5	0.0027
1	0.0876	6	0.0019
2	0.0122	7	0.0015
3	0.0068	8	0.0013
4	0.0042	9	0.0012

Рис. 4, 5 показывают наличие участка управления с достаточно быстрым изменением в некоторой полукрестности  $[0, t_1)$ , что обусловлено учетом начального условия  $z(0) = z_S$ .

### Заключение

Изложенные в данной статье результаты применительно к разным классам нелинейных управляемых систем объединяет задание линейной по переменной состояния функции  $\varphi(t, x)$  в задачах улучшения управлений. Вопрос о сходимости улучшающей последовательности к оптимальному процессу в нелинейных задачах оптимального управления нами не рассматривался. Предположим, что заданы некоторое допустимое управление и соответствующее значение целевого функционала, тогда решение серии задач улучшения может дать



с практической точки зрения ощутимый результат. Как показывают расчеты по ряду модельных задач оптимального управления, в результате последовательных улучшений можем получить существенно меньшее значение целевого функционала, а не просто «сдвинуться» на некоторую малую величину. Если исходить с этой позиции, а также из того, что математические модели только приближенно отражают реальный мир, то вычисление такого допустимого управления, на котором целевой функционал принимает ощутимо меньшее значение по сравнению с тем значением, которое было на начальном приближении, — может быть очень серьезным результатом для практики.

Разработка новых, более эффективных алгоритмов улучшения управлений остается актуальной проблемой, поскольку требования к эффективности вычислений постоянно возрастают с развитием прикладных проблем. В частности, такие исследования выступают очень важной основой для квантовых вычислений, поскольку для эффективной передачи квантовой информации (технологии будущего) нужны соответствующие математические оптимальные алгоритмы.

### Список литературы

- [1] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М. : Наука, 1973. — 448 с. ↑[]
- [2] Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York : Marcel Dekker, 1996. — 408 p. ↑[], 1, 1
- [3] Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск : Изд-во Иркутск. ун-та, 1994. — 344 с. ↑[]
- [4] Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Физматлит, 2000. — 108 с. ↑[]
- [5] Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ : Изд-во Бурятского гос. ун-та, 2008. — 256 с. ↑[]
- [6] Моржин О. В. *Проекционные методы нелокального улучшения управляющих функций и параметров* // Математика и информатика. Вестник Бурятского государственного университета, 2011 Т. 9, с. 31–35 ↑[], 1
- [7] Моржин О. В. *Нелокальное улучшение нелинейных управляемых процессов на основе достаточных условий оптимальности* // Автоматика и телемеханика, 2010, № 8, с. 24–37 ↑[], 1
- [8] Кротов В. Ф. *Об оптимизации управления квантовыми системами* // ДАН, 2008. 423, № 3, с. 316–319 ↑[], 2
- [9] Кротов В. Ф. *Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления* // Автоматика и телемеханика, 2009, № 3, с. 15–23 ↑2, 2

- [10] Батурина О. В., Булатов А. В., Кротов В. Ф. *К оптимизации линейных систем с управляемыми коэффициентами* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с. 64–78 ↑[\[](#), [2](#), [2](#), [2](#), [2](#), [2](#)
- [11] Батурина О. В., Моржин О. В. *Оптимальное управление системой спинов на основе метода глобального улучшения* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с. 79–86 ↑[\[](#), [2](#)
- [12] Caneva T., Murphy M., Calarco T., etc. *Optimal control at the quantum speed limit* // Physical Review Lett., 2009. **103** ↑[2](#), [2](#), [2](#)

O. V. Baturina, A. V. Bulatov, O. V. Morzhin. *Algorithms for nonlocal improvement of controls in classes of nonlinear differential systems.*

АБСТРАКТ. The article is devoted to algorithms for nonlocal improvement in nonlinear systems, including bilinear systems according to optimal control problems for quantum (spin) systems.

*Key Words and Phrases:* control systems, improvement algorithms, computer experiments.

*Образец ссылки на статью:*

О. В. Батурина, А. В. Булатов, О. В. Моржин. *Алгоритмы нелокального улучшения управлений в классах нелинейных дифференциальных систем* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 5(9), с. 31–48.

URL: [http://psta.pspiras.ru/read/psta2011\\_5\\_31-48.pdf](http://psta.pspiras.ru/read/psta2011_5_31-48.pdf)