

Л. Н. Никифорова

Оптимальное управление в построении траекторий перелета вертолета в заданную точку пространства

Аннотация. В статье представлено построение оптимальной пространственной траектории при соблюдении всех заданных ограничений (по расходу ускорению, по расходу управления и др.). Тем же методом последовательного улучшения управления определена траектория маловысотного полета по цифровой карте местности, построенная из условия минимизации времени полета при соблюдении энергетических ограничений вертолета.

Ключевые слова и фразы: пространственная траектория, маловысотный полет, карта местности, вертолет.

Введение

Рассматривается постановка и решение задач определения оптимального управления при изменении основных параметров полета — направления, скорости, высоты полета, изменения траектории с целью перехода на другую траекторию, обхода препятствий или изменения траектории, а также построение оптимальной траектории маловысотного полета по данным цифровой карты местности [1–6].

Принятые обозначения

$Xg, Yg = H, Zg$ — земные координаты;

$Va, Vx(Vxa), Vy(Vya), Vz(Vza)$ — воздушная скорость полета и три ее составляющие;

$Vg, Vxg, Vyg, Vzг$ — скорость в земной системе и три ее составляющие;

Xgo, Zgo — координаты начальной точки траектории на земной поверхности;

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 11-07-00721-а, Государственно-контракта № 14.740.11.0401 и проекта №2.10 Программы ОНИТ РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация».

Xgk, Zgk — координаты конечной точки траектории на земной поверхности;

H_g, H_b — геометрическая и барометрическая высоты полета;

θ_{tr} — угол наклона траектории;

N — мощность на вертолете;

ν, γ, ψ — угол тангажа, крена и курса вертолета;

W, δ_w — модуль (величина) и направление ветра.

1. Перелет вертолета из одной (начальной) точки в другую (конечную)

Задача состоит в получении оптимальной по быстродействию траектории перелета из одной (начальной) точки пространства в другую (конечную). Модель вертолета принимаем в максимально упрощенном виде, как движение материальной точки в земной системе координат с ограничениями по скорости полета, по располагаемому ускорению, по скорости изменения этого ускорения, по диапазону изменения координат.

1.1. Уравнения движения

Пусть X_g, Y_g, Z_g — перемещения вертолета по осям OX, OY, OZ ; Vx_g, Vy_g, Vz_g — скорости этих перемещений; а Ux, Uy и Uz — располагаемые ускорения по осям. Тогда

- (1) $dX_g/dt = Vx_g,$
- (2) $dH/dt = dY_g/dt = Vy_g,$
- (3) $dZ_g/dt = Vz_g,$
- (4) $dVx_g/dt = Ux,$
- (5) $dVy_g/dt = Uy,$
- (6) $dVz_g/dt = Uz.$

1.2. Ограничения

Ограничения накладываются как на составляющие скорости перемещения (Vx_g, Vy_g, Vz_g), так и на составляющие ускорения (Ux, Uy, Uz), а также на скорости изменения ускорений:

$$\chi_i^{max} \geq \chi_i \geq \chi_i^{min};$$

здесь вектор $\chi_i = (X_g, Y_g, Z_g, Vx_g, Vy_g, Vz_g, Ux, Uy, Uz)$, т.е. ограничение по 9 параметрам: трем перемещениям, трем скоростям и трем ускорениям.

1.3. Начальные условия

Начальные условия — начальные значения координат вертолета и скоростей полета в земной системе координат:

$$\begin{aligned} \chi_{io} &= (X_{go}, Y_{go}, Z_{go}, Vx_{go}, Vy_{go}, Vz_{go}, Ux, Uy, Uz), \\ Vx_{gmax} &> Vx_g > Vx_{gmin}, \quad Vy_{gmax} > Vy_g > Vy_{gmin}, \\ Vz_{gmax} &> Vz_g > Vz_{gmin}, \\ Vx_{go} &= Vxz_{go} * \cos(\psi_o), \quad Vz_{go} = Vxz_{go} * \sin(\psi_o), \quad Vy_{go} = 0, \end{aligned}$$

где χ_{io} — вектор начальных значений параметров, Vxz_{go} — начальное значение скорости полета в земной системе координат, ψ_o — начальное значение путевого угла.

1.4. Конечные условия

$\chi_{ik} = (X_{gk}, Y_{gk}, Z_{gk}, Vx_{gk}, Vy_{gk}, Vz_{gk})$ — вектор конечных значений параметров,

$$Vx_{gk} = Vxz_{gk} * \cos(\psi_k), \quad Vz_{gk} = Vxz_{gk} * \sin(\psi_k), \quad Vy_{gk} = 0,$$

где Vxz_{gk}, Vy_{gk} — конечные значения составляющих скорости полета в земной системе координат, ψ_k — конечное значение угла курса, Vxz_{gk} — конечное значение скорости полета в земной системе координат.

Расчеты представлены для двух вариантов, исходные данные которых приведены в табл. 1.

Учет всех ограничений в виде штрафных функций приводит к следующему выражению для штрафного функционала:

$$I = F_k(t_k) + \int f^o dt,$$

где терминальная часть $F_k(t_k)$ учитывает основное требование — равенство конечных значений заданным координатам:

$$F_k(t_k) = -q * \sum_1^6 Bi * (\chi_i(t_k) - \chi_{ik})^2,$$

ТАБЛИЦА 1. Исходные данные

Обозначение	Вариант 1	Вариант 2
$Vxzo$	0	20
Vyo	0	0
ψo	120	0
Xgo	0	0
Ygo	0	50
Zgo	0	0
$Vxzk$	20	0
Vyk	0	0
ψk	0	150
Xgk	200	200
Ygk	50	0
Zgk	100	200

где $\chi_i = (X_g, H, Z_g, Vx_g, Vy_g, Vz_g)$, а интегральная часть функционала f^o учитывает все ограничения текущих параметров (как управления, так и фазовых координат):

$$f^o = (1 - q) * \sum_1^9 Bi * [e^{\alpha i * (\chi_i - \chi_{i \max})} + e^{\alpha i * (\chi_{i \min} - \chi_i)}],$$

1.5. Результаты расчета

Результаты определения траекторий и параметров движения для разгона с режима висения с набором высоты над конечной точкой (вариант 1) представлены на рис. 1-3.

Аналогичные зависимости представлены на рис. 4-6 для второго расчетного случая, возникающего при снижении с торможением до зависания в заданной точке (вариант 2).

Несмотря на довольно простой вид уравнений движения вертолета, благодаря выдерживанию заданных ограничений параметров движения (составляющим скорости, углов тангажа и крена), полученные траектории реализуемы по основным энергетическим характеристикам вертолета, что показывает моделирование по более сложным моделям динамики полета вертолета.

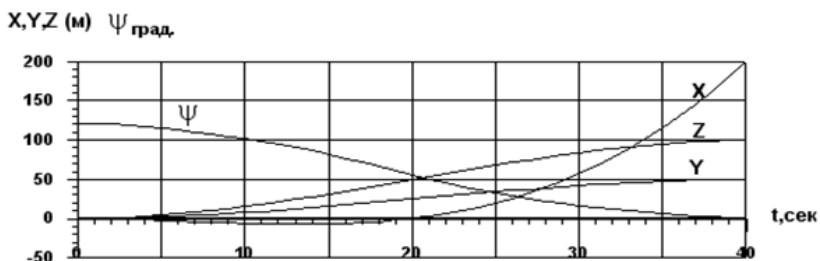


Рис. 1. Перемещения вертолета в земной системе координат (X, Y, Z) и изменение угла курса ψ

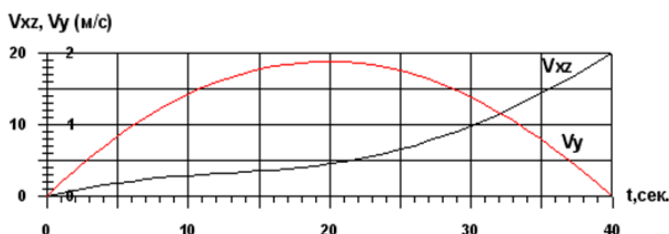


Рис. 2. Горизонтальная V_{xz} и вертикальная V_y составляющие скорости полета

2. Траектории маловысотного полета по данным цифровой карты местности

Метод определения оптимальной траектории маловысотного полета (МВП) вертолета по данным цифровой карты рельефа местности (ЦКМ) разработан на основе методов теории оптимального управления с учетом основных энергетических ограничений, существующих на вертолете. На рис. 7 показана заданная в расчетах модель цифровой карты местности с указанием линий равных высот.

Анализ ограничений вертолета позволяет выделить основные из них, определяющие успех решения задачи:

- по скорости полета;
- по располагаемой мощности;
- по величине располагаемой вертикальной скорости на данной поступательной скорости, определяемой по энергетическим характеристикам.

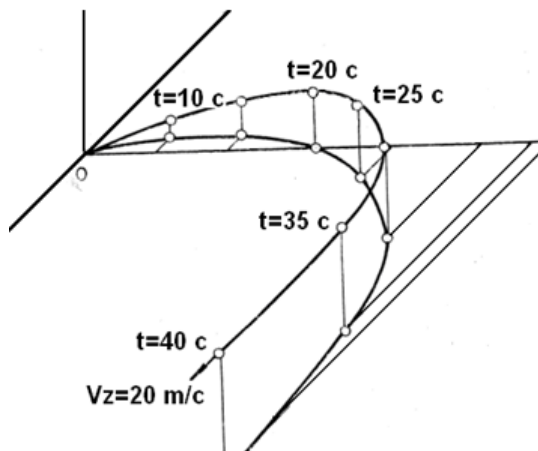
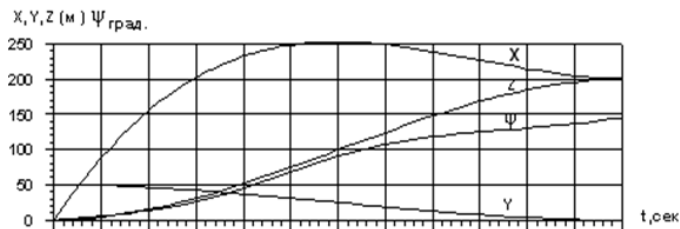


Рис. 3. Пространственная траектория полета

Рис. 4. Перемещения вертолета в земной системе координат (X, Y, Z) и изменение угла курса ψ

Эти ограничения можно определить из данных, которые представляют энергетические характеристики и определяют возможности МВП вертолета: $Va = f(H, N)$. Рис. 8 представляет пример зависимости, определяющей диапазон допустимых скоростей полета в функции угла наклона траектории полета ($H_2 > H_1$, $N_2 > N_1$, $N = N_1$, $H = H_1$, $N = N_1$, $H = H_2$, $N = N_2$, $H = H_1$).

Очевидно, как и следует из рис. 8, более крутому наклону траектории полета по маршруту соответствует допустимая меньшая скорость полета по энергетическим ограничениям: $Va = f(\theta_{tr}, N, H)$,

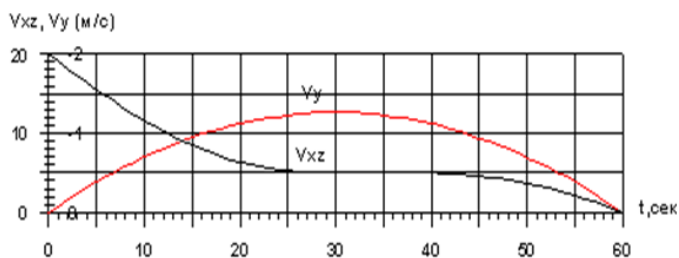


Рис. 5. Горизонтальная V_{xz} и вертикальная V_y составляющие скорости полета

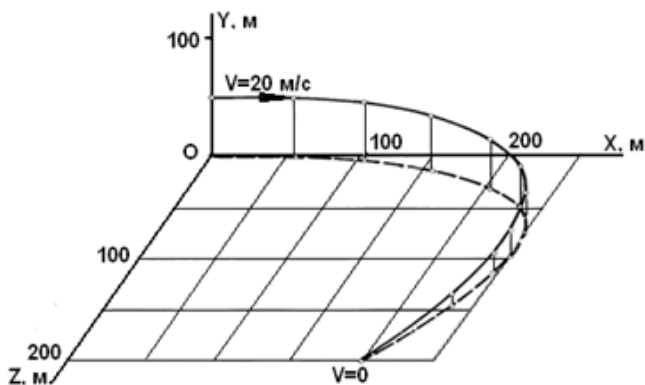


Рис. 6. Пространственная траектория полета

$H = H_b$. График отражает зависимость энергетических характеристик от располагаемой мощности вертолета и барометрической высоты полета. По данным ЦКМ можно определить зависимость суммарной скорости в земной системе координат (V_{xz}) от направления полета ψ (рис. 9) для принятой в расчете ЦКМ. Можно видеть, что по разным направлениям возможна различная допустимая скорость полета, что вносит в модель дополнительную нелинейную зависимость.

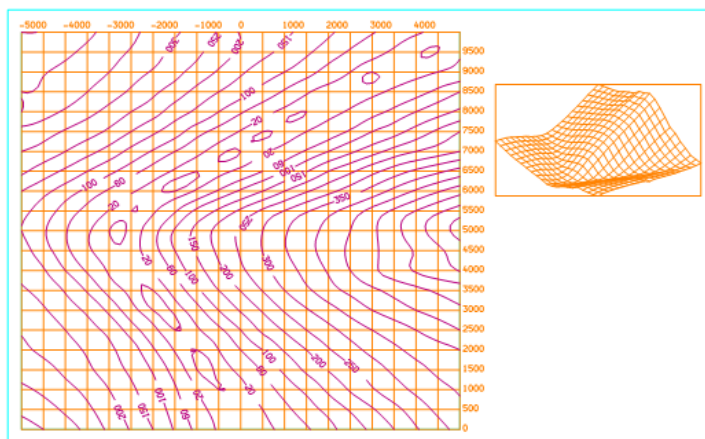


Рис. 7. Модель цифровой карты местности

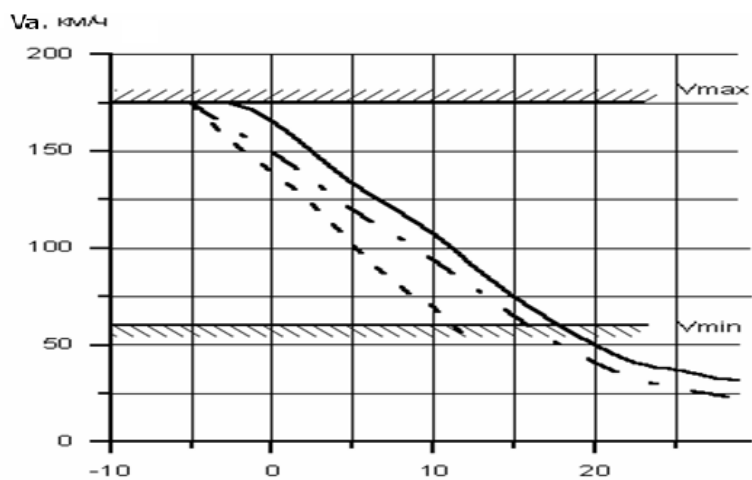


Рис. 8. Пример зависимости

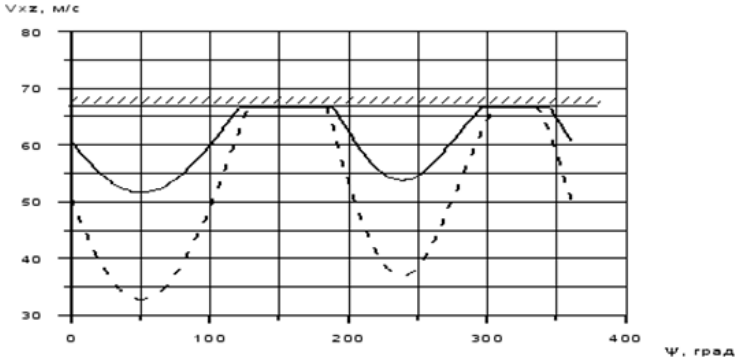


Рис. 9. Зависимость суммарной скорости в земной системе координат от направления полета

2.1. Алгоритм решения задачи

В силу специфики задачи алгоритм ее решения несколько отличается от обычного алгоритма решения задачи определения оптимального управления. Алгоритм решения данной задачи был разработан профессором В. И. Гурманом [1, 5].

- (1) Заданы начальная ($X_o = X_{go}, Z_o = Z_{go}$) и конечная ($X_k = X_{gk}, Z_k = Z_{gk}$) точки маршрута (траектории) на ЦКМ (рис. 7).
- (2) Определяются ограничения воздушной скорости полета: Va_{min} и Va_{max} , исходя из характеристик конкретного вертолета (пример на рис. 8).
- (3) Задаются ограничения по располагаемой вертикальной скорости в зависимости от скорости полета $Vy_{gmax} = f(Va)$ (также исходя из энергетических характеристик рассматриваемого вертолета) и ограничений «зоны вихревого кольца» (рис. 10).
- (4) Основная система дифференциальных уравнений, которая определяет скорости перемещения в земной системе координат, имеет вид

$$\begin{cases} dX(1)/dt = Vxg, \\ dX(2)/dt = Vzг \end{cases}$$

и интегрируется от $t = 0$ до $t = t_k$. Составляющие вектора скорости в земной системе координат:

$$Vxg = Vxa + Wx, \quad Vzг = Vza + Wz.$$

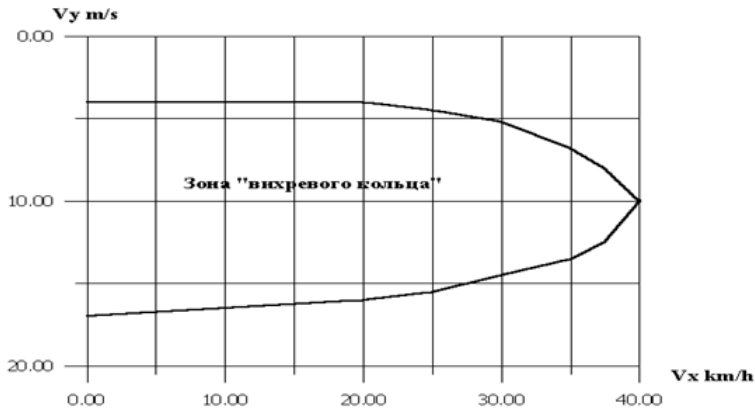


Рис. 10. Зона «вихревого кольца»

- (5) Вспомогательная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} d\Phi(1)/dt = -dH/dX(1), \\ d\Phi(2)/dt = -dH/dX(2) \end{cases}$$

и интегрируется в интервале от $t = t_k$ до $t = 0$.

- (6) Гамильтониан
- H
- имеет вид:

$$H = \sum_{i=1}^2 \psi_i * f_i - f^0 = \psi_1 * f_1 + \psi_2 * f_2 - f^0.$$

- (7) Величины составляющих земной скорости полета
- Vxg
- и
- Vzg
- проекции суммарной скорости полета в плане:

$$\begin{aligned} Vxg &= Vxzg * \cos(\Psi_{opt}), \\ Vzg &= Vxzg * \sin(\Psi_{opt}), \end{aligned}$$

где угол оптимального направления полета Ψ_{opt} определяется из условия максимума Гамильтониана H в данной точке пространства. Для определения этого угла в каждой точке проводится расчет величины Гамильтониана для всего диапазона изменения угла Ψ :

$$H_{max} = \max(H = f(Vxzg, \Psi)),$$

где $Vxzg = \sqrt{Vxg^2 + Vzг^2}$.

Все многочисленное семейство оптимальных траекторий полета отличается начальными условиями по вектору вспомогательной функции: $\Phi_0(\Phi_0(1), \Phi_0(2))$. Как следует из теоретических предпосылок, сама величина этих начальных значений не важна, важно только их соотношение. Поэтому в качестве заданных начальных значений вспомогательных функций принято соотношение:

$$\begin{aligned}\Phi_0(1) &= \Phi_0 * \cos(B), \\ \Phi_0(2) &= \Phi_0 * \sin(B),\end{aligned}$$

где B — произвольный угол, величина которого зависит от положения начальной точки траектории, а Φ_0 может принимать любое значение, например, 1.

Система дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{cases} dX(1)/dt = dXg/dt = Vxg, \\ dX(2)/dt = dZg/dt = Vzg. \end{cases}$$

Земная скорость Vg отличается от воздушной Va на величину ветра по составляющим:

$$\begin{aligned}Vxg &= Vxa + Wx, \\ Vzg &= Vza + Wz,\end{aligned}$$

где $Wx = W * \cos(\delta a)$ и $Wz = W * \sin(\delta a)$ — составляющие скорости ветра в земной системе координат, W и δa — величина и направление ветра соответственно.

Угол оптимального направления полета Ψ_{opt} определяется решением в каждой точке полета задачи оптимизации воздушной скорости полета (из условия минимизации суммарного времени полета) в полном диапазоне изменения угла направления полета Ψ от 0 до 360° при условии соблюдения ограничения скорости полета.

Величина воздушной скорости полета определяется как максимально возможная в зависимости от угла наклона рельефа местности: $Vxza = f(\theta_{tr})$, где θ_{tr} определяется рельефом местности. После нахождения воздушной скорости и направления полета вычисляются составляющие скорости Vxg и Vzg , которые и определяют траекторию:

$$\begin{aligned}Vxg &= Vxzg * \cos(\Psi_{opt}), \\ Vzg &= Vxzg * \sin(\Psi_{opt}).\end{aligned}$$

На рис. 11 показаны расчетные оптимальные траектории на цифровой карте местности для заданной, располагаемой на высоте уровня

моря ($H = 0$), а на рис. 12 — траектории при заданной на высоте 4 км мощности.

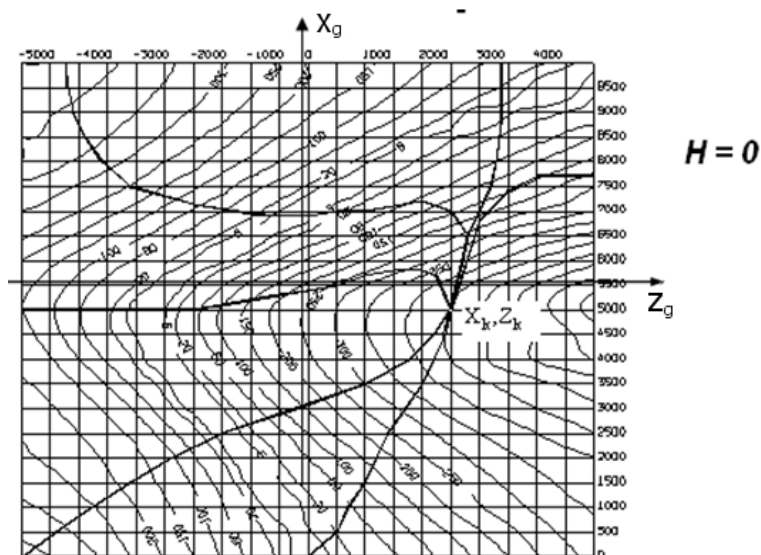


Рис. 11. Расчетные траектории на высоте уровня моря

Различие траекторий на $H = 0$ и $H = 4$ км обусловлено различными энергетическими характеристиками на разных высотах полета. Влияние ветра при $H = 0$ показано на рис. 13 при полете из одной и той же точки, но при ветре. Величины $W = 10$ м/с с разных направлений: $\delta a = 0, -90, 90$ и 180 (δa отсчитывается от северного направления по часовой стрелке). Рис. 13 показывает большое влияние наличия ветра разных направлений на вид оптимальных траекторий.

3. Заключение

- (1) Использованный метод теории оптимального управления — метод последовательного улучшения управления, который позволяет строить оптимальную траекторию пространственного перелета из заданной начальной точки в заданную конечную с соблюдением заданных ограничений.

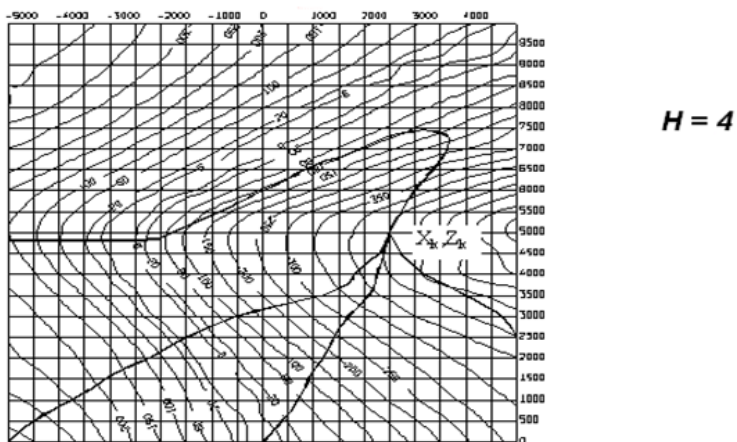


Рис. 12. Расчетные траектории на заданной высоте

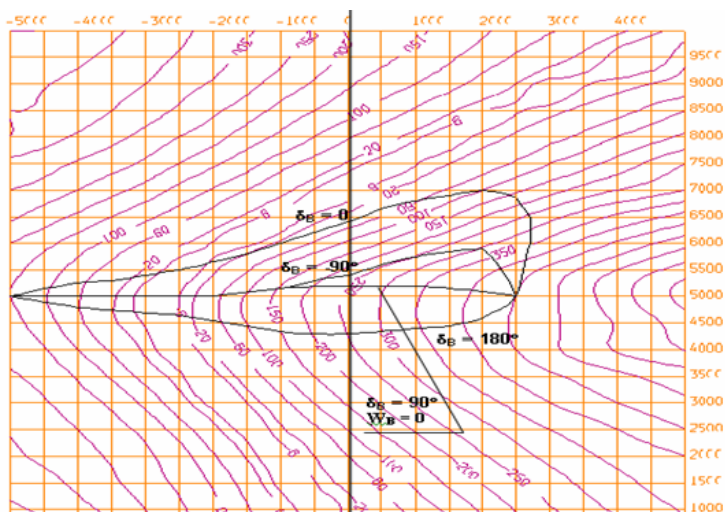


Рис. 13. Влияние ветра на вид траекторий

- (2) Разработан и отработан на практике метод построения траекторий маловысотного полета на основе цифровой карты местности,

позволяющий строить заданную траекторию маловысотного полета, исходя из заданных энергетических характеристик вертолета.

- (3) При определении траектории маловысотного полета показано, что под влиянием ветра вид оптимальной траектории маловысотного полета существенно зависит от величины и направления ветра, что указывает на необходимость учитывать наличие даже относительно небольшого ветра при определении траектории маловысотного полета.

Список литературы

- [1] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М. : Наука, 1985. ↑[||](#), [2.1](#)
- [2] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М. : Наука, 1973. ↑
- [3] Никифорова Л. Н. *Решение задачи динамики полета вертолета методами теории оптимального управления* // 17 Европейский вертолетный форум, 1991 ↑
- [4] Никифорова Л. Н. *Оптимизация параметров движения вертолета* // Труды II научных чтений, посвященных памяти академика Б. Н. Юрьева. — М., 1987 ↑
- [5] Gurman V. I., Nikiforova L. N. *Principle of Expansion in Modeling and Control Optimization of Helicopter Maneuvering* // Proceeding of 10-th Workshop IFAC. — Haifa, Israel, 1995 (english) ↑[2.1](#)
- [6] Heiges M. W., Mennon P., Schrage D. P. *Synthesis of Helicopter full Authoritying Controller* // Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1992. **Vol. 15**, no. 1 (english) ↑[||](#)

Рекомендовал к публикации

д.т.н. А. М. Цирлин

Об авторе:

Лидия Николаевна Никифорова



Ведущий специалист ИПС имени А. К. Айламазяна РАН. Доктор технических наук, профессор по кафедре информатики. Область научных интересов: динамика полета, автоматизация и оптимизация управления сложных объектов, в частности, вертолетов, в том числе с применением перспективных методов управления; моделирование динамики полета и работы сложных систем; идентификация моделей сложных объектов.

e-mail:

nikiforova-lidiya@yandex.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

Л. Н. Никифорова. *Оптимальное управление в построении траекторий перелета вертолета в заданную точку пространства* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 2(11), с. 61–75.

URL:

http://psta.psiras.ru/read/psta2012_2_61-75.pdf

L. N. Nikiforova. *The optimal control in helicopter flight tracing to a specified point in space.*

ABSTRACT. The paper presents the construction of an optimal three-dimensional curved trajectory under all specified constraints (the disposable acceleration, flow control, etc.). Using the same method of consistently management improve the low-altitude flight path have been defined by the digital terrain map constructed from the condition of the minimization of flight time, subject to energy helicopter constraints.

Key Words and Phrases: three-dimensional curved trajectory, low-altitude flight, terrain map, helicopter.