

М. Н. Бурдаев

Годографы и уравнение перелета в центральном поле тяготения

Аннотация. В статье приведен способ геометрического описания динамики космических полетов с помощью годографов. Представлен вывод уравнения годографа начальных скоростей перелета между двумя заданными точками центрального поля тяготения.

Ключевые слова и фразы: годограф, перелет, обучение, когнитивная графика.

Введение

Формы и методы, разрабатываемые в когнитивной графике, представляются перспективными для использования в процессах обучения различным специальностям и предметам. Основанием этого предположения служат такие свойства когнитивной графики как обобщенный характер представления информации, наглядность обобщенных форм ее отображения в графическом виде, возможность наглядно показывать на чертеже в обобщенном виде многомерные нелинейные зависимости, наличие у когнитивных изображений четкого физического смысла.

Одной из актуальных областей применения форм и методов когнитивной графики является динамика космического полета. По сложившейся традиции для описания движения космических объектов до настоящего времени используется аналитический математический

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 12–07–00205–а «Разработка новых способов решения задач управления движениями космических аппаратов на всех этапах полетов и оперативного отображения получаемых результатов на основе методов годографов и когнитивной графики».

аппарат небесной механики. Его формулы не дают наглядного представления о взаимных связях параметров орбитальных движений космических объектов. Для успешной работы с этим аппаратом требуется развитое абстрактное мышление и отсутствие дефицита времени. Он эффективно применяется в научных исследованиях, в учебном процессе в высших учебных заведениях и в работе наземных служб навигационно-баллистического обеспечения космических полетов. Однако и в этих областях есть настоятельная потребность в повышении наглядности изложения теоретического материала, облегчении и повышении надежности восприятия информации, в разработке и применении оперативных методов решения прикладных задач. В учебном процессе подготовки космонавтов эти требования наиболее актуальны. Для их выполнения наиболее подходят формы и методы когнитивной графики. В динамике космического полета они нашли применение и развитие в виде специально разработанной отрасли теории годографов — системы обобщенных взаимно адекватных графических и аналитических форм представления предмета этой области знаний [1].

1. Годографы

Обобщенная форма уравнения конических сечений, отображающего траектории небесных тел, впервые появилась в теории годографов. Классическая форма этого уравнения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$$

имеет в правой части три независимых параметра: p (фокальный параметр орбиты), e (величина эксцентриситета траектории перелета) и ϑ (угол между местной вертикалью и направлением вектора скорости космического аппарата). Это создает значительные неудобства при попытках отображать на чертеже или экране дисплея более одной конкретной траектории космического объекта. Проблема наглядного отображения семейств траекторий была решена путем введения обобщенного уравнения конических сечений

$$\frac{r}{x} = \frac{\frac{p}{x}}{1 + \cos \vartheta} = \frac{f_x(e)}{1 + \cos \vartheta}.$$

В этом уравнении вместо x может стоять величина любой из характеристик эллипса, имеющих размерность длины: $x = p, r_n, r_a, a$,

b, c . Вид функций $f_x(e) = \frac{p}{x}$ и $\frac{r}{x}$ для различных x приведен в табл. 1.

Таблица 1. Вид функций $f_x(e) = \frac{p}{x}$ и $\frac{r}{x}$ в обобщенном уравнении орбит

x	p	r_n	r_a	a	b
$f_x(e)$	1	$1+e$	$1-e$	$1-e^2$	$\sqrt{1-e^2}$
$\frac{r}{x}$	$\frac{1}{1+e \cos \vartheta}$	$\frac{1+e}{1+e \cos \vartheta}$	$\frac{1-e}{1+e \cos \vartheta}$	$\frac{1-e^2}{1+e \cos \vartheta}$	$\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \vartheta}$

Обобщенная форма уравнения конических сечений позволяет показать на чертеже семейства траекторий космических объектов, объединенных по какому-либо общему признаку. Совместное изображение семейства орбит, у которых радиус обобщен по какому-либо линейному параметру x , представляет собой сетку линий равных значений эксцентриситета $e = Const$ в полярных координатах $\frac{r}{x}, \vartheta$. Каждая линия в таком семействе отображает все орбиты с одинаковым эксцентриситетом, независимо от их размеров.

Например, для условия $x = r_n$ обобщенное уравнение орбит принимает вид

$$\frac{r}{r_n} = \frac{1+e}{1+e \cos \vartheta}.$$

Общий вид семейства орбит в этой обобщенной форме показан на рис. 1. На этом рисунке нанесены также оси прямоугольной горизонтальной системы обобщенных координат X и Y :

$$X = \frac{r}{r_n} \cos \vartheta; \quad Y = \frac{r}{r_n} \sin \vartheta.$$

Линии равных значений параметров для краткости называют «изолиниями».

В тех же полярных координатах $\frac{r}{x}, \vartheta$ можно отобразить изолинии любых параметров орбитального движения, которые контролируются и регулируются при пилотировании космического аппарата и решении навигационных задач.

Например, семейство изолиний истинных аномалий в полярных координатах $\frac{r}{x}, \vartheta$ представлено пучком прямых линий, выходящих из начала координат.

Совмещение в единой системе координат нескольких сеток изолиний позволяет наглядно представить количественные связи отображаемых параметров.

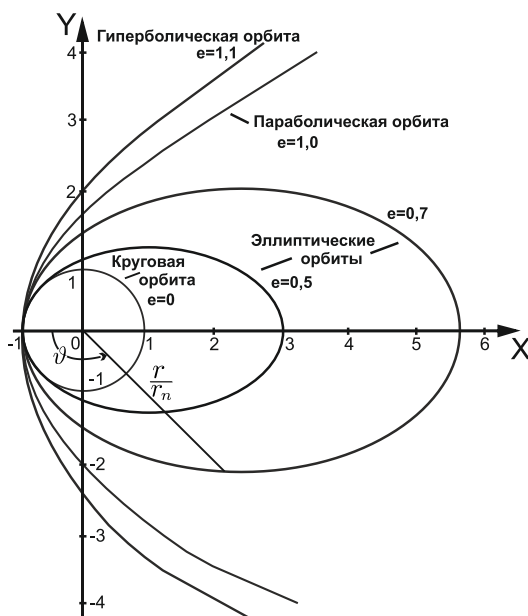


Рис. 1. Семейство орбит, обобщенное по радиусу перигея

Графики, на которых совмещены два и более семейств изолиний, называют «годограммами».

Наиболее наглядно показать связи вектора орбитальной скорости с параметрами орбитального движения позволяет новая обобщенная форма годографов орбитальных скоростей. В этой форме рассматриваются все возможные векторы орбитальной скорости в произвольно выбранной точке поля тяготения.

Разделив величину вектора орбитальной скорости V в точке поля тяготения с геоцентрическим радиусом r

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p} (e^2 + 2e \cos \vartheta + 1)}$$

на величину местной круговой скорости $V_{\text{круг}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ на том же геоцентрическом радиусе r , получаем соотношение $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_{\text{круг}}} = \sqrt{1 + e \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}}.$$

Направление обобщенного вектора орбитальной скорости $\tilde{V}$ совпадает с направлением вектора орбитальной скорости $\vec{V}$ и определяется углом ϕ , вычисляемым по формуле

$$\operatorname{ctg} \phi = \frac{e \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}.$$

Два последних уравнения позволяют рассчитать и построить в орбитальной системе координат график, показанный на рис. 2.

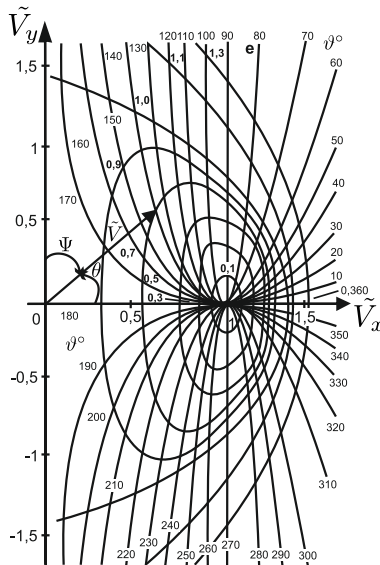


Рис. 2. Годограмма обобщенных орбитальных скоростей в произвольной точке поля тяготения

На рис. 2 нанесены две сетки изолиний: $e = \text{Const}$ и $\vartheta = \text{Const}$. Эти сетки наглядно отображают связь между эксцентриситетом орбит e , истинной аномалией точки на орбите ϑ , величиной $\tilde{V}$ и направлением ϕ обобщенного вектора орбитальной скорости.

Каждой точке с истинной аномалией ϑ на орбите с эксцентриситетом e соответствует один обобщенный вектор орбитальной скорости с модулем $\tilde{V}$ и углом к горизонту ϕ . И наоборот: каждой паре значений $\tilde{V}$ и ϕ соответствует конкретная точка с истинной аномалией ϑ_2 на орбите с эксцентриситетом e_2 .

У этой обобщенной формы вектора орбитальной скорости есть полезное свойство: из нее очень просто определить величину орбитальной скорости в физической размерности. Для этого достаточно умножить величину обобщенной скорости на величину местной круговой скорости на том же геоцентрическом радиусе $V_{\text{круг}}$.

Эти свойства рис. 2 позволяют наглядно показать на нем процесс одноимпульсной коррекции орбиты и взаимные связи его параметров.

В тех же обобщенных координатах $\tilde{V}$ и ϕ можно представить в обобщенных формах все геометрические параметры орбит.

На рис. 3 показана сетка изолиний обобщенного параметра радиуса перигея $\frac{r_n}{r} = \text{Const}$. В обобщенных координатах $\tilde{V}$ и ϕ можно наглядно представить связь параметров орбитального движения в точке орбиты и времени полета от перицентра до рассматриваемой точки на обобщенных изображениях семейств орбит в виде сетки линий равных значений параметра времени $\tilde{T} = \frac{t-t_n}{T}$ (рис. 4).

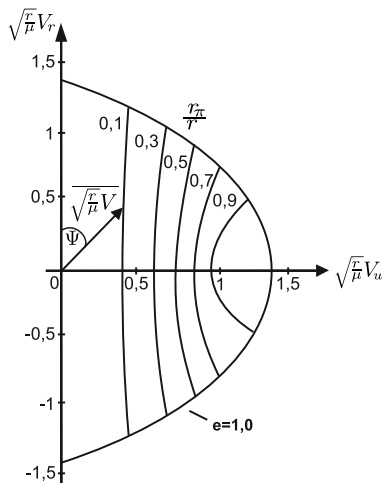


Рис. 3. Изолинии обобщенного радиуса перигея $\frac{r_n}{r}$

На основе показанных обобщенных векторов положения и скорости космических объектов разработаны два геометрических языка динамики космического полета. Для практики наиболее ценен язык

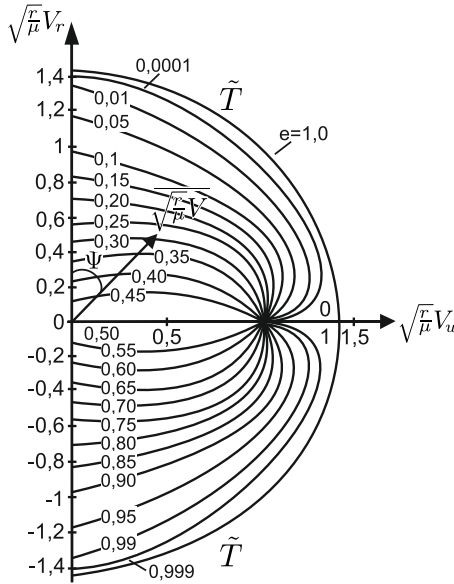


Рис. 4. Изолинии обобщенного параметра времени $\tilde{T}$

обобщенных векторов скорости, непосредственно связывающий параметры орбитальных движений с вектором орбитальной скорости и его изменениями при выполняемых в космосе маневрах.

Далее представлен вывод уравнения годографа начальных скоростей перелета между двумя заданными точками центрального поля тяготения.

2. Уравнение перелета в центральном поле тяготения

Расчеты характеристик траекторий перелета между двумя точками центрального поля тяготения выполняются при решении многих задач практической космонавтики. Параметры траекторий перелета в поле тяготения с центром в точке O и гравитационной постоянной μ определяются пятью взаимно независимыми начальными условиями: величинами радиуса $\bar{r}_M$ начальной точки M перелета, радиуса $\bar{r}_N$ конечной точки N перелета, угловой дальности $\Delta\vartheta$ перелета, величиной V_M скорости в начальной точке M перелета и углом

ψ_M , указывающим направление вектора этой скорости относительно местной вертикали (рис. 5).

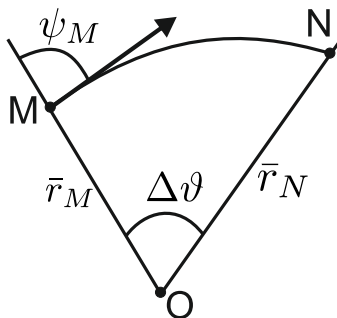


Рис. 5. Начальные условия перелета между заданными точками центрального поля тяготения

При заданных величинах μ , $\bar{r}_M$, $\bar{r}_N$ и $\Delta\vartheta$ параметры $\bar{V}_M$ и ψ_M начальных скоростей перехода могут непрерывно изменяться в некоторых пределах. Поэтому перелет между двумя заданными точками центрального поля тяготения возможен по бесконечному количеству траекторий, каждой из которых соответствует определенное сочетание величины V_M скорости и угла ψ_M в начальной точке M перелета.

Семейство векторов начальной скорости $\bar{V}_M$ перелета для заданных начальных условий μ , $\bar{r}_M$, $\bar{r}_N$ и $\Delta\vartheta$ представляет собой годограф начальных скоростей перелета (рис. 6).

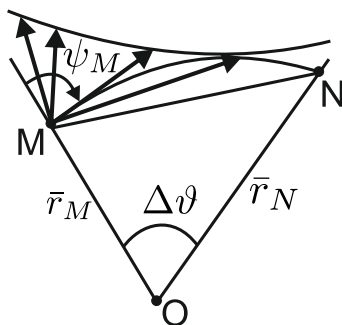


Рис. 6. Годограф начальных скоростей перелета

Выведем уравнение годографа начальных скоростей перелета. Решив совместно относительно величины эксцентриситета e уравнения конических сечений для граничных радиусов перелета r_M и r_N

$$(1) \quad \begin{cases} r_M = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_M} \\ r_N = \frac{p}{1 + e \cos (\vartheta_M + \Delta\vartheta)} \end{cases},$$

получим

$$(2) \quad e = \frac{1 - \frac{r_M}{r_N}}{\left(\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta\vartheta\right) \cos \vartheta_M + \sin \vartheta_M \sin \Delta\vartheta}.$$

Подставим полученное выражение (2) в известное уравнение

$$\operatorname{ctg} \psi_M = \frac{\sin \vartheta_M}{\frac{1}{e} + \cos \vartheta_M} = \frac{1 - \frac{r_M}{r_N}}{(1 - \cos \Delta\vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta_M + \sin \Delta\vartheta}$$

и решим его относительно $\operatorname{tg} \vartheta_M$:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \vartheta_M = \frac{1 - \cos \Delta\vartheta}{\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \operatorname{tg} \psi_M - \sin \Delta\vartheta}.$$

Используя уравнение фокального параметра $p = \frac{r_M^2 V_M^2}{\mu} \sin^2 \psi_M$ и уравнение (1), получим равенство

$$(4) \quad \frac{r_M V_M^2}{\mu (1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_M)} = 1 + e \cos \vartheta_M.$$

Получим другое представление. Подставим в правую часть равенства (4) выражение (2) для эксцентриситета и выражение (3):

$$\begin{aligned}
 1 + e \cos \vartheta_M &= 1 + \frac{\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \cos \vartheta_M}{\left(\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta\right) \cos \vartheta_M + \sin \vartheta_M \sin \Delta \vartheta} \\
 &= 1 + \frac{\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \left[\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \operatorname{tg} \psi_M - \sin \Delta \vartheta\right]}{\left(\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta\right) \left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \operatorname{tg} \psi_M + \left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \sin \Delta \vartheta} \\
 &= 1 + \frac{\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \left[\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \operatorname{tg} \psi_M - \sin \Delta \vartheta\right]}{\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \left[\left(\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta\right) \operatorname{tg} \psi_M + \sin \Delta \vartheta\right]} \\
 &= 1 + \frac{\left[\left(1 - \frac{r_M}{r_N}\right) \operatorname{tg} \psi_M - \sin \Delta \vartheta\right]}{\left[\left(\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta\right) \operatorname{tg} \psi_M + \sin \Delta \vartheta\right]} \\
 &= \frac{(1 - \cos \Delta \vartheta) \operatorname{tg} \psi_M}{\left(\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta\right) \operatorname{tg} \psi_M + \sin \Delta \vartheta} = \frac{\frac{1 - \cos \Delta \vartheta}{\sin \Delta \vartheta}}{\frac{\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta}{\sin \Delta \vartheta} + \operatorname{ctg} \psi_M} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta \vartheta}{2}}{\frac{\frac{r_M}{r_N} - \cos \Delta \vartheta}{\sin \Delta \vartheta} + \operatorname{ctg} \psi_M}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Знаменатель в окончательной форме выражения (5) имеет геометрический смысл.

В треугольнике OMN опустим перпендикуляр из вершины N на сторону OM (рис. 7). Из треугольника ONP определяем

$$NP = r_N \sin \Delta \vartheta,$$

в треугольнике MNP имеем

$$MP = r_M - r_N \cos \Delta \vartheta$$

и

$$NP = MP \operatorname{tg} \Delta \psi_M = (r_M - r_N \cos \Delta \vartheta) \operatorname{tg} (\pi - \Delta \psi_M).$$

Приравнявая взаимно два полученных выражения для NP и решая это равенство относительно $\Delta \psi_M$, находим

$$\operatorname{ctg} \Delta \psi_M = \frac{\cos \Delta \vartheta - \frac{r_M}{r_N}}{\sin \Delta \vartheta}.
 \tag{6}$$

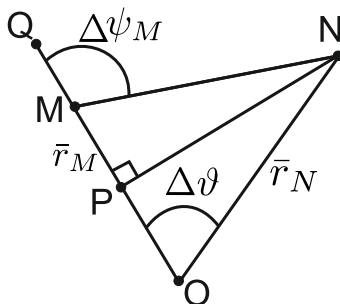


Рис. 7. К определению величины угла $\Delta\psi_M$

Таким образом, обнаружено, что выражение (6) обозначает тригонометрическую функцию внешнего угла QMN треугольника OMN (рис. 6 и 7).

Угол $QMN = \Delta\psi_M$ имеет физический смысл. Его сторона MN указывает направление из начальной точки перелета M на его конечную точку N и соединяет эти граничные точки перелета. Продолжение стороны MN является асимптотой годографа начальных скоростей перелета (рис. 6). Луч MQ направлен по местной вертикали в начальной точке M перелета и является исходным ориентиром для отсчета углов, указывающих направления векторов начальных скоростей перелета и второй асимптотой годографа начальных скоростей перелета. В пределах угла QMN лежит диапазон всех возможных значений начальных скоростей перелета по эллиптическим и гиперболическим траекториям. Границы этого диапазона будут определены ниже.

Подставляя (6) в (5) и (5) с этой подстановкой в (4), получаем уравнение годографа начальных скоростей перелета в форме

$$(7) \quad \frac{r_M V_M^2}{\mu (1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_M)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg} \psi_M - \operatorname{ctg} \Delta\psi_M}.$$

Представим это уравнение в обобщенном виде:

$$(8) \quad \frac{r_M V_M^2}{\mu} \operatorname{ctg} \frac{\Delta\vartheta}{2} = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_M)}{\operatorname{ctg} \psi_M - \operatorname{ctg} \Delta\psi_M}.$$

В этой форме уравнения обобщенный вектор начальной скорости перелета $\frac{r_M V_M^2}{\mu} \operatorname{ctg} \frac{\Delta\vartheta}{2}$ является функцией двух взаимно независимых

переменных: угла $\Delta\psi_M$, указывающего направление из начальной на конечную точку перелета, и угла ψ_M , определяющего направление начальной скорости перелета.

Уравнение (8) впервые позволило построить двумерное обобщенное изображение взаимных связей всех величин, характеризующих перелет между двумя заданными точками центрального поля тяготения (рис. 8).

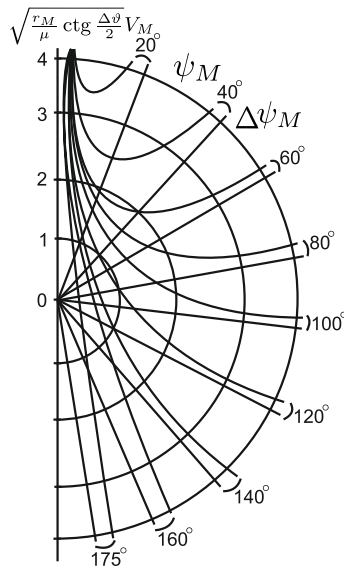


Рис. 8. Семейство годографов обобщенного параметра $\sqrt{\frac{r_M}{\mu} \operatorname{ctg} \frac{\Delta\vartheta}{2}} V_M$ начальной скорости перелета

Радиальные лучи на рис. 8 обозначают направления из начальной в конечную точку перелета и соответствуют постоянным значениям угла $\Delta\psi_M$. Изогнутые линии — годографы начальных скоростей перелетов для тех же значений углов $\Delta\psi_M$.

При необходимости, из уравнения (8) определяется величина начальной скорости перелета в физической размерности:

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{r_M} \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_M) \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg} \psi_M - \operatorname{ctg} \Delta\psi_M}}.$$

В пределах диапазона углов $0 \leq \psi_M \leq \Delta\psi_M$ существуют границы, разделяющие множества эллиптических и гиперболических орбит. Это углы ψ_M , соответствующие параболическим траекториям. Они определяются из условия $\frac{r_M V_M^2}{\mu} = 2$.

С использованием уравнения (8) это условие записывается в виде

$$2 = \frac{r_M V_M^2}{\mu} = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_M)}{\operatorname{ctg} \psi_M - \operatorname{ctg} \Delta\psi_M} \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2},$$

откуда определяются граничные значения углов $\psi_{M1,2}$:

$$(9) \quad \psi_{M1,2} = \operatorname{arccctg} \left[\operatorname{ctg} \frac{\Delta\vartheta}{2} \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\Delta\vartheta}{2} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\Delta\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \Delta\psi_M - 1} \right],$$

или, после подстановки в (9) величины $\operatorname{ctg} \Delta\psi_M$ из (6),

$$\psi_{M1,2} = \operatorname{arccctg} \left[\operatorname{ctg} \frac{\Delta\vartheta}{2} \pm \sqrt{\frac{r_M}{r_N} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\Delta\vartheta}{2} \right)} \right].$$

Большее значение угла ψ_{M1} определяет границу между эллиптическими и гиперболическими траекториями перелета. Меньшее значение угла ψ_{M2} ограничивает минимальное значение угла ψ_M для эллиптических траекторий перелетов. Гиперболические траектории, соответствующие углам ψ_M , меньшим угла ψ_{M2} , уходят в бесконечность и не возвращаются в конечную точку перелета.

Максимальное значение угла ψ_M для гиперболических траекторий теоретически равно величине угла $\Delta\psi_M$. Этому случаю при конечных значениях величин начальных радиусов r_M перелетов соответствуют бесконечные величины начальных скоростей перелетов, что противоречит законам физики. Поэтому максимальный возможный угол ψ_M для перелетов по гиперболическим траекториям ограничен максимальной предельной скоростью перелета, равной скорости света.

Отметим, что скорости света в начальных точках перелетов с конечными значениями радиусов r_M соответствуют по законам нерелятивистской механики гиперболические, следовательно, криволинейные траектории.

Заключение

Материал статьи является продолжением исследований, начатых автором в работе [2]. Полученные результаты используются в ФГБУ «Научно-исследовательский испытательный Центр подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина» для обучения космонавтов теории перелетов.

Список литературы

- [1] Бурдаев М. Н. Теория годографов в механике космического полета. М. : Машиностроение, 1975. — 151 с. ↑
- [2] Бурдаев М. Н. *Применение метода годографов к расчету времени перелета в центральном поле тяготения* // Космические исследования, 2009. Т. 47, № 2, с. 204–208 ↑

Рекомендовал к публикации

д.т.н. В. М. Хачумов

Об авторе:



Михаил Николаевич Бурдаев

Доктор технических наук, профессор, академик Академии космонавтики, космонавт-испытатель, главный научный сотрудник 57 отдела 5-го Научного управления ФГБУ «Научно-исследовательский испытательный Центр подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина».

e-mail:

bmn@starcity.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

М. Н. Бурдаев. *Годографы и уравнение перелета в центральном поле тяготения* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 3(12), с. 81–95.

URL:

http://psta.psiras.ru/read/psta2012_3_81-95.pdf

M. N. Burdayev. *Hodographs and the equation of flight in a central gravitational field*.

ABSTRACT. The paper presents a method of geometrical description of space flight dynamics with the help of hodographs. Presented a derivation of the initial velocity hodograph flights between two given points of the central gravitational field. (*In Russian*).

Key Words and Phrases: hodograph, flight, teaching, cognitive graphics.