ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 5(14), 2012, с. 59–69

УДК 519.622

Е. А. Новиков

Неоднородный алгоритм интегрирования с применением трехстадийных методов

Аннотация. На основе L-устойчивой схемы и явного метода типа Рунге–Кутты третьего порядка точности построен комбинированный алгоритм переменного шага, в котором выбор эффективной численной формулы осуществляется на каждом шаге по устойчивости.

Ключевые слова и фразы: жесткие задачи, алгоритм переменной конфигурации, контроль точности и устойчивости.

Введение

В настоящее время основные тенденции при построении численных методов связаны с расширением их возможностей применительно к системам все более высокой размерности [1, 2]. Для решения жестких задач обычно используются L-устойчивые схемы, при реализации которых возникает необходимость решения линейных систем алгебраических уравнений [1]. Это обычно выполняется с применением LU-разложения некоторой матрицы, размерность которой совпадает с размерностью исходной задачи. Декомпозиция матрицы осуществляется с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице. В случае большой размерности время декомпозиции фактически полностью определяет общие вычислительные затраты. Для повышения эффективности расчетов используются алгоритмы, в которых одна матрица применяется на нескольких шагах интегрирования [1, 3]. Некоторым аналогом замораживания матрицы Якоби является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и L-устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы [4]. В этом случае эффективность алгоритма

Работа поддержана РФФИ (проекты 11-01-00106 и 11-01-00224).

может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, явным методом. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [2,5]. Здесь на основе явных методов типа Рунге–Кутты первого и третьего порядков, а также L-устойчивого (3,2)-метода третьего порядка точности построен алгоритм переменной структуры с автоматическим выбором численной схемы.

1. Класс (m,k)-методов

Ниже будет рассматриваться задача Коши вида

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \tag{1}$$

где y и f – N-мерные вектор-функции, t – независимая переменная. Пусть Z есть множество целых чисел, и заданы числа $m, k \in Z$, причем $k \le m$. Через M_m обозначим множество чисел $\{i \in Z|\ 1 \le i \le m\}$, а через M_k, M_{m-k} и J_i, $1 < i \le m$, подмножества из M_m вида

$$M_k = \{m_i \in M_m | 1 = m_1 < m_2, ..., m_k \le m\},\ M_{m-k} = M_m \setminus M_k,$$
$$J_i = \{m_{j-1} \in M_m | j > 1,\ m_j \in M_k,\ m_j \le i\},\ 1 < i \le m.$$

Рассмотрим следующие численные схемы

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \textstyle\sum_{i=1}^{m} p_i k_i,\ D_n = E + ahf'_n, \\ D_n k_i = hf(y_n + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j + \\ +hf'_n \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j,\ i \in M_k, \\ D_n k_i = k_{i-1} + \textstyle\sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j + hf'_n \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j,\ i \in M_{m-k}, \end{gathered} \tag{2}$$

где k_i, $1 \le i \le m$, – стадии метода, a, p_i, α_{ij}, β_{ij} и c_{ij} – постоянные коэффициенты, h – шаг интегрирования, E – единичная матрица, $f'_n = \partial f(y_n)/\partial y$ – матрица Якоби системы (1), k – количество вычислений функции f на шаге, m – число стадий или количество обратных ходов в методе Гаусса. На каждом шаге интегрирования осуществляются одно вычисление матрицы Якоби и одна декомпозиция матрицы D_n. Допускается аппроксимация матрицы Якоби f'_n матрицей A_n, представимой в виде $A_n = f'_n + hB_n + O(h^2)$, где матрица B_n не зависит от величины шага интегрирования. Так как k и m полностью определяют затраты на шаг, а набор чисел $m_1, ..., m_k$ из множества M_k только распределяет их внутри шага, то методы типа (2) названы (m,k)-методами.

2. L-устойчивый (3,2)-метод

Рассмотрим численную формулу вида

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_n + p_1k_1 + p_2k_2 + p_3k_3,\\
&D_nk_1 = hf(y_n),\ D_nk_2 = k_1,\\
&D_nk_3 = hf(y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2) + \alpha_{32}k_2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где матрица D_n определена в (2). Разложим стадии k_i, $1 \le i \le 3$, в ряды Тейлора по степеням h и подставим в первую формулу (3), получим ряд Тейлора для приближенного решения y_{n+1}. Полагая $y_n = y(t_n)$ и сравнивая ряды для точного $y(t_{n+1})$ и приближенного y_{n+1} решений до членов с h^3 включительно, получим условия третьего порядка точности схемы (3) вида

$$
\begin{gathered}
p_1 + p_2 + (1+\alpha_{32})p_3 = 1,\\
ap_1 + 2ap_2 + (a + \beta_{31} + \beta_{32} + 3a\alpha_{32})p_3 = 1/2,\\
a^2p_1 + 3a^2p_2 + (a^2 + 2a\beta_{31} + 3a\beta_{32} + 6a^2\alpha_{32})p_3 = 1/6,\\
(\beta_{31} + \beta_{32})^2p_3 = 1/3.
\end{gathered}
$$

Полагая параметры a, β_{31} и β_{32} свободными и исследуя данную систему алгебраических уравнений на совместность, получим коэффициенты численной формулы (3), то есть

$$
\begin{gathered}
p_1 = [\beta^2(18a^2 - 9a + 1) + 2a(\beta_{31} - a)]/[6a^2\beta^2],\\
p_2 = [\beta^2(15a - 18a^2 - 2) + 2a(\beta_{32} - \beta_{31})]/[6a^2\beta^2],\\
p_3 = 1/[3\beta^2],\ \alpha_{32} = 0,5[\beta^2(6a^2 - 6a + 1) - 2a\beta_{32}]/a^2.
\end{gathered}
$$

Здесь $\beta = \beta_{31} + \beta_{32}$. Исследуем устойчивость (3). Применяя ее для решения задачи $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, $\Re(\lambda) < 0$, получим $y_{n+1} = Q(z)y_n$, $z = h\lambda$, где функция устойчивости $Q(z)$ записывается в виде

$$
\begin{gathered}
Q(z) = [a^2(p_1 + p_3) - a\beta_{31}p_3 - a^3]z^3/(1 - az)^3 +\\
+[3a^2 - a(2p_1 + p_2) + (\beta_{31} + \beta_{32} - 2a)p_3]z^2/(1 - az)^3 +\\
\{[p_1 + p_2 - 3a + (1 + \alpha_{32})p_3]z + 1\}/(1 - az)^3.
\end{gathered}
$$

Из вида $Q(z)$ следует, что для L-устойчивости (3) необходимо выполнение соотношения $a^2 - a(p_1 + p_3) + \beta_{31}p_3 = 0$. Подставляя сюда коэффициенты p_i, $1 \le i \le 3$, получим кубическое уравнение относительно параметра a, которое имеет вид

$$
6a^3 - 18a^2 + 9a - 1 = 0.
$$

Сравнивая представление приближенного и точного решений до членов с h^4, видим, что слагаемые с дифференциалами $f'''f^3$ и $f''f'f^2$ в главном члене локальной ошибки будут отсутствовать, если

$$(\beta_{31}+\beta_{32})^3 p_3 = \frac{1}{4},\ a(\beta_{31}+\beta_{32})(\beta_{31}+2\beta_{32})p_3 = \frac{1}{24}.$$

В результате получим набор коэффициентов

$$p_1 = [130a^2-33a+6]/[54a^2],\ p_2 = [21a-54a^2-4]/[18a^2],$$
$$p_3 = 16/27,\ \beta_{31} = [48a-3]/[32a],$$
$$\beta_{32} = [3-24a]/[32a],\ \alpha_{32} = [54a^2-30a+6]/[32a^2],$$

при которых локальная ошибка $\delta_{n,3}$ схемы (3) имеет вид

$$\delta_{n,3} = h^4\big[(1-12a+36a^2-24a^3)f'^3 f + (1-4a)f'f''f^2\big]/24 + O(h^5),$$

где значение a определяется из уравнения L-устойчивости $6a^3-18a^2+9a-1=0$, которое имеет три корня: $a_1 = 2,40514957850286$, $a_2 = 0,158983899988677$ и $a_3 = 0,435866521508459$. Согласно [6] схема (3) будет A-устойчивой, если параметр a удовлетворяет неравенству $1/3 \le a \le 1,0685790$, поэтому выбираем корень $a = a_3$. В результате имеем следующий комплект коэффициентов

$$p_1 = 0,15902052285216\cdot 10^1,\quad p_2 = -0,14930556622438\cdot 10^1,$$
$$p_3 = 0,59259259259259,\quad \beta_{31} = 0,12849112162238\cdot 10^1,$$
$$\beta_{32} = -0,53491121622384,\quad \alpha_{32} = 0,52356010690630.$$

Обычно расчеты жестких задач осуществляются с двойной точностью, поэтому данные параметры приведены с четырнадцатью значащими цифрами. В жестких задачах поведение локальной ошибки определяется элементарным дифференциалом $f'^3 f$, поэтому при построении оценки аналога глобальной ошибки будем учитывать только первое слагаемое в локальной ошибке [7]. Для контроля точности вычислений используем идею вложенных методов. Для этого рассмотрим двухстадийный метод (2) следующего вида

$$y_{n+1,1} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2,\ D_n k_1 = hf(y_n),\ D_n k_2 = k_1,$$

где приближение y_n вычислено по формуле (3). Отметим, что в этой численной схеме применяются стадии метода (3), и поэтому ее использование практически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Нетрудно видеть, что при значениях коэффициентов $b_1 =$

$0.5(4a-1)/a$ и $b_2 = 0.5(1-2a)/a$ эта схема имеет второй порядок точности, а ее локальная ошибка $\delta_{n,2}$ имеет вид

$$\delta_{n,2} = (6a^2 - 6a + 1)h^3 f'^2 f/6 + O(h^4).$$

Тогда в неравенстве для контроля точности можно применять оценку ошибки $\varepsilon_n(j_n)$ вида

$$\varepsilon_n(j_n) = c \cdot D_n^{1-j_n}(y_{n+1} - y_{n+1,1}),$$
$$c = [1 - 12a + 36a^2 - 24a^3]/[4(6a^2 - 6a + 1)],$$

где $1 \leq j_n \leq 2$. При $j_n = 1$ оценка $\varepsilon_n(j_n)$ будет A-устойчивой, а при $j_n = 2$ – L-устойчивой. Теперь неравенство для контроля точности имеет вид [7]

$$||D_n^{1-j_n}(y_{n+1} - y_{n+1,1})|| \leq c\varepsilon,$$

где $c = |24a^2 - 24a + 4|/|1 - 12a + 36a^2 - 24a^3| \approx 3$, $||\cdot||$ – некоторая норма в R^N, ε – требуемая точность интегрирования, а значение параметра j_n выбирается наименьшим, при котором выполняется данное неравенство. В смысле главного члена оценки $\varepsilon_n(1)$ и $\varepsilon_n(2)$ совпадают. Данное неравенство при $j_n = 2$ проверяется редко, в основном при резком увеличении шага интегрирования, и поэтому к существенному росту вычислительных затрат не приводит. Применение данного неравенства при $j_n = 2$ позволяет избежать некоторых неоправданных возвратов и повысить эффективность расчетов.

Оценку максимального собственного числа $w_{n,0} = h\lambda_{n,\max}$ матрицы Якоби системы (1), необходимую для перехода на явную формулу, оценим через ее норму по формуле $w_{n,0} = h||\partial f/\partial y||$. Ниже данная оценка будет применяться для перехода на явный метод.

3. Явный метод третьего порядка

Теперь для численного решения задачи (1) рассмотрим явный трехстадийный метод типа Рунге–Кутта вида

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\ k_1 &= hf(y_n),\ k_2 = hf(y_n + \beta_{21} k_1), \\ k_3 &= hf(y_n + \beta_{31} k_1) + \beta_{32} k_2)). \end{aligned} \tag{4}$$

Далее для сокращения выкладок будем рассматривать задачу (1), однако построенные ниже методы можно применять для решения неавтономных задач. Разложим стадии k_1, k_2 и k_3 в ряды Тейлора и подставим в первую формулу (4). Получим ряд Тейлора для приближенного решения y_{n+1}. Полагая $y_n = y(t_n)$ и сравнивая ряды для точного $y(t_{n+1})$ и приближенного y_{n+1} решений до членов с h^3, получим условия третьего порядка точности схемы (4), то есть

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad \beta_{21}p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})p_3 = \tfrac{1}{2},$$
$$\beta_{21}^2 p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 p_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \beta_{21}\beta_{32}p_3 = \tfrac{1}{6}.$$

Положим $\beta_{21} = 1/2$ и $\beta_{31} + \beta_{32} = 1$. Тогда на каждом шаге приращения k_1, k_2 и k_3 вычисляются в точках t_n, $t_n + h/2$ и $t_n + h$ соответственно. Такое распределение точек t_i приводит к повышению надежности расчетов. В результате имеем коэффициенты

$$\beta_{21} = 1/2,\ \beta_{31} = -1,\ \beta_{32} = 2,\ p_1 = p_3 = 1/6,\ p_2 = 2/3,$$

при которых локальная ошибка $\delta_{n,3}$ схемы (4) имеет вид

$$\delta_{n,3} = h^4\big[3f'^3 f - 3f'' f' f^2 - f''' f\big]/72 + O(h^5).$$

Неравенство для контроля точности вычислений метода третьего порядка построим с использованием идеи вложенных методов. Для этого рассмотрим вспомогательную схему $y_{n+1,1} = y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2$, где k_1 и k_2 определены в (4). Требование второго порядка приводит к коэффициентам $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$. Тогда оценку аналога глобальной ошибки $\varepsilon_{n,3}$ метода третьего порядка можно оценить по формуле $\varepsilon_{n,3} = ||y_{n+1} - y_{n+1,1}|| = ||k_1 - 2k_2 + k_3||$ [7], а неравенство для контроля точности вычислений имеет вид $\varepsilon_{n,3} \le \varepsilon$, где $||\cdot||$ – некоторая норма в R^N, ε – требуемая точность интегрирования.

Неравенство для контроля устойчивости численной формулы (4) построим предложенным в [1,5] способом. Запишем стадии k_1, k_2 и k_3 применительно к задаче $y' = Ay$, где A есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим

$$k_1 = Xy_n,\ k_2 = \big[X + 0,5X^2\big]y_n,\ k_3 = \big[X + X^2 + X^3\big]y_n,$$

где $X = hA$. Легко видеть, что имеют место равенства

$$k_1 - 2k_2 + k_3 = X^3 y_n,\ 2(k_2 - k_1) = X^2 y_n.$$

Тогда согласно [2] оценку максимального собственного числа $w_{n,3} = h_{n,\max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$w_{n,3} = 0.5 \max_{1 \le i \le N} \left\{ |(k_1 - 2k_2 + k_3)_i| / |k_2 - k_1)_i| \right\}.$$

Интервал устойчивости численной схемы (4) приблизительно равен 2.5. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $w_{n,3} \le 2.5$. Полученная оценка является грубой, потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому здесь контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования.

Прогнозируемый шаг h_{n+1} по точности и устойчивости будем вычислять следующим образом. Новый шаг h_{ac} по точности определим по формуле $h_{ac} = q_1 h_n$, где h_n есть последний успешный шаг интегрирования, а q_1, учитывая соотношение $\varepsilon_{n,3} = O(h_n^3)$, задается уравнением $q_1^3 \varepsilon_{n,3} = \varepsilon$. Шаг h_{st} по устойчивости зададим формулой $h_{st} = q_2 h_n$, где q_2, учитывая равенство $w_{n,3} = O(h_n)$, определяется из уравнения $q_2 w_{n,3} = 2.5$. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max[h_n, \min(h_{ac}, h_{st})].$$

Отметим, что данная формула применяется для прогноза величины шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n, и поэтому она фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n. Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Собственно говоря, именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач. Из анализа результатов расчетов жестких тестовых примеров [1] следует примерно полуторакратное повышение эффективности за счет дополнительного контроля устойчивости. Кроме того, фактическая точность вычисления решения существенно выше задаваемой. Это естественно, потому что на участке установления новые ошибки невелики за счет малости производной решения, а старые подавляются за счет контроля устойчивости. В такой ситуации предпочтительно проводить вычисления по методу низкого порядка точности, но с более широкой областью устойчивости.

4. Явный метод первого порядка

Для численного решения задачи (1) рассмотрим схему

$$y_{n+1} = y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2 + r_3 k_3, \tag{5}$$

где стадии k_1, k_2 и k_3 заданы при описании метода третьего порядка точности. Построим менее точную схему с максимальным интервалом устойчивости. Применяя (5) для решения задачи $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, $\Re(\lambda) < 0$, получим $y_{n+1} = Q(x) y_n$, $x = h\lambda$, где функция устойчивости $Q(x)$ записывается в виде

$$Q(x) = 1 + (r_1 + r_2 + r_3)x + [\tfrac{1}{2} r_2 + r_3]x^2 + r_3 x^3.$$

Требование первого порядка приводит к соотношению $r_1 + r_2 + r_3 = 1$, которое ниже будем считать выполненным. Теперь выберем r_2 и r_3 таким образом, чтобы метод (5) имел максимальный интервал устойчивости. Для этого рассмотрим многочлен Чебышева $T_3(z) = 4z^3 - 3z$ на промежутке $[-1, 1]$. Проведем замену переменных, полагая $z = 1 - 2x/\gamma$. Получим

$$T_3(x) = 1 - 18x/\gamma + 48x^2/\gamma^2 - 32x^3/\gamma^3,$$

при этом отрезок $[\gamma, 0]$ отображается на отрезок $[-1, 1]$. Нетрудно показать [2], что среди всех многочленов вида $P_3(x) = 1 + x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ для $T_3(x)$ неравенство $|T_3(x)| \leq 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma, 0]$, $\gamma = -18$. Потребуем совпадения коэффициентов $Q(x)$ и $T_3(x)$ при $\gamma = -18$. Это приводит к соотношениям

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1, \; r_2/2 + r_3 = 4/27, \; r_3 = 4/729.$$

В результате имеем коэффициенты

$$r_1 = 517/729, \; r_2 = 208/729, \; r_3 = 4/729$$

метода первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, локальная ошибка $\delta_{n,1}$ которого имеет вид $\delta_{n,1} = 19h^2 f' f/27 + O(h^3)$. Для контроля точности численной формулы первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки. Учитывая вид локальной ошибки и то, что $k_2 - k_1 = 0.5h^2 f'_n f_n + O(h^3)$, неравенство для контроля точности записывается в виде

$$38||k_2 - k_1||/27 \leq \varepsilon,$$

где $|| \cdot ||$ – некоторая норма в R^N, ε – требуемая точность расчетов. Интервал устойчивости численной схемы (5) первого порядка точности равен 18 [8]. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $w_{n,3} \leq 18$.

5. Алгоритм переменной конфигурации

На основе построенных явных методов первого и третьего порядков точности легко сформулировать алгоритм переменного порядка и шага. Расчеты всегда начинаются методом третьего порядка как более точным. Переход на схему первого порядка осуществляется при нарушении неравенства $w_{n,3} \leq 2.5$, а обратный переход на метод третьего порядка происходит в случае выполнения данного неравенства. При расчетах по методу первого порядка наряду с точностью контролируется устойчивость. В случае использования схемы (3) формулировка алгоритма интегрирования также не вызывает трудностей. Нарушение неравенства $w_{n,3} \leq 18$ вызывает переход на схему (3), а выполнение неравенства $w_{n,0} \leq 18$, где оценка $w_{n,0}$ вычислена через норму матрицы Якоби, вызывает переход на явные методы.

Заключение

В построенном алгоритме RKMK3 с помощью признака можно задавать различные режимы расчета: 1) явными методами первого или третьего порядков точности с контролем или без контроля устойчивости; 2) явными методами с переменным порядком и шагом; 3) L-устойчивым методом; 4) с автоматическим выбором численной схемы. Все это позволяет применять данный алгоритм для решения как жестких, так и нежестких задач. При расчетах с автоматическим выбором численной схемы вопрос о том, является ли задача жесткой или нет, перекладывается на алгоритм интегрирования.

Список литературы

[1] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. — 685 с. ↑[], 3

[2] Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск : Наука, 1997. — 197 с. ↑[], 3, 4

[3] Новиков Е. А., Двинский А. Л. *Замораживание матрицы Якоби в методах типа Розенброка* // Вычислительные технологии, 2005. **Т. 10**, с. 108–114. ↑[]

[4] Новиков А. Е., Новиков Е. А. *Численное решение жестких задач с небольшой точностью* // Математ. моделирование, 2010. **Т. 22**, № 1, с. 46–56. ↑[]

[5] Новиков В. А., Новиков Е. А. *Контроль устойчивости явных одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений* // ДАН СССР, 1984. **Т. 277**, № 5, с. 1058–1062. ↑[], 3

[6] Демидов Г. В., Юматова Л. А. *Исследование некоторых аппроксимаций в связи с A-устойчивостью полуявных методов* // Численные методы механики сплошной среды, 1977. **Т. 8**, № 3, с. 68–79. ↑2

[7] Демидов Г. В., Новиков Е. А. *Оценка ошибки одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений* // Численные методы механики сплошной среды, 1985. **Т. 16**, № 1, с. 27–42. ↑2, 3

[8] Новиков Е. А. *Конструирование областей устойчивости явных методов типа Рунге–Кутта* // Вычислительные методы и программирование, 2009. **Т. 10**, с. 248–257. ↑4

Рекомендовал к публикации **Программный комитет Молодёжной школы-семинара** *Модели и методы исследования гетерогенных систем*

Об авторе:

Евгений Александрович Новиков

Доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск. Научные интересы: вычислительная математика, методы решения численных жестких систем, химической кинетики, моделирования задач механики и электроники.

e-mail: novikov@icm.krasn.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

Е. А. Новиков. *Неоднородный алгоритм интегрирования с применением трехстадийных методов* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 5(14), с. 59–69.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2012_5_59-69.pdf

E. A. Novikov. *HETEROGENEOUS INTEGRATION ALGORITHM OF BASED THREE-STAGES METHODS*.

Abstract. An L-stable method and an explicit Runge–Kutta type scheme are constructed, both schemes of order three. The most effective numerical scheme is chosen for each step by means of stability control inequality.

Key Words and Phrases: stiff problems, algorithms of variable configuration, control accuracy and stability.