ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 5(14), 2012, с. 93–101

УДК 517.977.58

Н. С. Малтугуева

Методы решения задач оптимального управления непрерывно-дискретными системами и их связь с необходимыми условиями оптимальности

Аннотация. В работе рассматривается один из частных классов непрерывно-дискретных систем, где закон переключения между непрерывными подсистемами задается в форме управляемых разностных уравнений, причем моменты переключения не фиксированы. Дискретная переменная в этом случае может рассматриваться и как управление (тогда дискретная цепочка — это смешанное ограничение), и как фазовая переменная (кусочно-постоянная). В работе рассматривается переход к другим постановкам и связь разработанных ранее алгоритмов с известными необходимыми условиями.

Ключевые слова и фразы: непрерывно-дискретные системы, оптимальное управление, условия оптимальности, численные методы.

Введение

В последнее время наблюдается большой интерес к различным непрерывно-дискретным процессам, и это не случайно, ведь они часто встречаются в прикладных задачах из области автомобилестроения, авиастроения, робототехники и т. д. [1–3]. В работе рассматривается один из частных классов непрерывно-дискретных систем. Эти системы названы логико-динамическими в работах [4, 5]. По сути, это математические модели многорежимных систем автоматического управления технологическими процессами и движущимися объектами. Дискретная компонента здесь — это кусочно-постоянная функция с конечным числом точек разрыва. Динамика системы описывается системой дифференциальных уравнений с переключением

Работа поддержана РФФИ (проект № 12-01-31252 мол а "Методы качественного и численного исследования задач оптимального управления дискретно-непрерывными системами").

(дискретная переменная — параметр переключения). Переключения дискретной компоненты описаны в виде автомата с памятью. Для такой системы ставится задача оптимального управления, где рассматривается функционал, дополненный суммой, которая накапливает «плату» за переключения дискретной части. Рассматриваемая задача имеет два существенных отличия от классической задачи оптимального управления. Во-первых, в правых частях дифференциальных уравнений и функционале помимо непрерывных переменных имеются дискретные, во-вторых, дискретные переменные могут изменять свое значение в конечном числе точек по времени, и это число может быть зафиксировано.

Стоит отметить, что решить аналитически подобные задачи весьма непросто, особенно если речь идет о прикладных задачах. Поэтому актуален вопрос построения численных методов решения предложенной задачи. В работах [6–9] предложены такие алгоритмы, но, к сожалению, в них нет исследования связи с необходимыми условиями оптимальности (в частности с гибридным принципом максимума). Данная работа содержит некоторые соображения в этом направлении.

1. Постановка задачи

На фиксированном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ определена система вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)), \tag{1}$$

$$y(t) \in Y(t, x(t), y(t-0)), \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0 - 0) = y_0. \tag{4}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ — непрерывная и кусочно дифференцируемая на T, $u(t) \in R^m$ — кусочно непрерывная на T, $y(t) \in \Omega \subset R^r$ — кусочно-постоянная, непрерывная справа с конечным числом точек разрыва, $y(t-0)$ — предыдущее состояние логической части логико-динамической системы, $Y : T \times R^n \times \Omega \to 2^\Omega$ описывает логику дискретных переходов, Ω — конечное множество состояний дискретной компоненты, множество $U \subset R^n$ компактно, $f(t, x, y, u)$ кусочно непрерывна по t, непрерывна по x и u для каждого $y \in \Omega$.

Рассматривается задача оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
(5)\quad I(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = F(x(t_1), y(t_1)) + \\
+ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), y(t), u(t))dt + \\
+ \sum_{\tau \in A(y)} g^0(\tau, x(\tau), y(\tau), y(\tau - 0)) \longrightarrow \min
\end{aligned}
$$

при ограничениях (1)–(4). Здесь функция F непрерывна по x, f^0 кусочно непрерывна по t и непрерывна по (x, u), g^0 — ограничена и непрерывна по x, $A(y)$ – конечное множество переключений $y(t)$.

Заметим, что моменты переключения дискретной компоненты не фиксированы, а переключения между непрерывными подсистемами описаны некоторыми разностными уравнениями. В таких задачах дискретная переменная может трактоваться и как фазовая компонента (кусочно-постоянная траектория), и как управление, а сама дискретная цепочка — как смешанное ограничение.

2. Условия оптимальности

Необходимые условия оптимальности для систем, аналогичных логико-динамическим, можно найти в работах Дмитрука А. В., Clarke F. H. и других [10–15]. Поставленная в работе задача сводится к задачам из упомянутых работ в случае, когда отображение $Y(t, x, y(t - 0))$ можно представить в виде ограничений в форме равенств и неравенств. В этом случае на отрезках, где дискретная переменная постоянна, с ней работают как с фазовой (она дополняет непрерывную траекторию x), а в точках переключения требуется выполнение фазовых ограничений. Такая постановка полностью соответствует постановкам из работ [10, 11].

Предположим, что ограничение (2) можно переписать в виде равенств и неравенств. В данной работе рассмотрим простейший случай, когда поставленная задача сводится к гладкой задаче, тогда можно применить принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями [15].

Сведем рассматриваемую задачу к задаче с промежуточными ограничениями следующего типа:

$$
(6)\quad \left.
\begin{array}{c}
x = f_k(t, x, u), \quad u \in U_k, \quad \text{для } t \in \Delta_k, \quad k = 1, \ldots, \nu, \\
\eta_j(b) = 0, \quad j = 1, \ldots, q, \\
\phi_i(b) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\
J = \varphi_0(b) \to \min,
\end{array}
\right\}
$$

где

$$b = ((t_0, x(t_0)), (t_1, x(t_1 - 0), x(t_1 + 0)), \dots$$
$$\dots, (t_{\nu-1}, x(t_{\nu-1} - 0), x(t_{\nu-1} + 0)), (t_\nu, x(t_\nu)));$$

$\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, \nu$; точки t_k не фиксированы; каждая функция f_k непрерывна и имеет непрерывные по совокупности аргументов частные производные по x и t на Δ_k $(k = 1, \dots, \nu)$; η_j $(j = 1, \dots, q)$ и ϕ_i $(i = 1, \dots, m)$ непрерывно дифференцируемы. Обозначим эту задачу через A.

Перепишем ограничение (2) в виде:

$$k(t, x(t), y(t), y(t-0)) = 0,$$
$$h(t, x(t), y(t), y(t-0)) \le 0,$$

где k и h гладкие функции. Пусть точки t_k, $k = 1, \dots, \nu$ — точки разрыва y (заметим, что t_1 из исходной постановки совпадает с t_ν из задачи A). Введем дискретную составляющую y в фазовые переменные. Так как на Δ_k $(k = 1, \dots, \nu)$ y константа, то система дифференциальных уравнений дополнится уравнением $\dot y = 0$. Приведем функционал из исходной постановки к терминальному виду с помощью дополнительной переменной (к системе дифференциальных уравнений добавляется еще одно уравнение: $\dot z = f^0(t, x, y, u)$). Таким образом, исходная задача (1)–(5) примет вид:

$$(7) \qquad \left.\begin{array}{c}
\dot x = f(t, x, y_k, u), \\
\dot{y_k} = 0, \\
\dot z = f^0(t, x, y, u), \\
u \in U, \\
\text{для } t \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, \nu \\
k(t, x(t), y(t), y(t-0)) = 0, \\
h(t, x(t), y(t), y(t-0)) \le 0, \\
\varphi_0(p) = F(x(t_\nu), y(t_\nu)) + \sum\limits_{k=1}^{\nu} (z(t_k - 0) - z(t_{k-1}) + \\
+ g^0(t_k, x(t_k), y_k, y_{k-1})) \to \min .
\end{array}\right\}$$

Такая задача полностью укладывается в постановку вида (6).

Применив к задаче (7) принцип максимума [15], получим соотношения:

$$(\alpha, \beta) \ne (0, 0);$$
$$\alpha_0 \varphi_0(p) = 0, \quad \alpha_0 \ge 0;$$

$$\alpha_1 h(t, x(t), y(t), y(t-0)) = 0, \quad \alpha_1 \geq 0;$$

$$\dot{\psi}^1(t) = -\psi^1(t) f_x(t, x, y, u), \tag{8}$$

$$\dot{\psi}^2(t) = 0, \tag{9}$$

$$\dot{\psi}^3(t) = -f_x^0(t, x, y, u)\psi^3(t), \tag{10}$$

$$\dot{\psi}^4(t) = -\psi^1(t) f_t(t, x, y, u) - \psi^3(t) f_t^0(t, x, y, u); \tag{11}$$

$$\dot{\psi}^1(t_0) = \alpha_0 g_x^0(t_0, x(t_0), y(t_0), y_0) + \beta\eta_{x(t_0)}(p),$$
$$\dot{\psi}^2(t_0) = \alpha_0 g_y^0(t_0, x(t_0), y(t_0), y_0) + \beta\eta_{y(t_0)}(p),$$
$$\dot{\psi}^3(t_0) = -\alpha_0,$$
$$\dot{\psi}^4(t_0) = \alpha_0 g_t^0(t_0, x(t_0), y(t_0), y_0),$$
$$\dot{\psi}^1(t_\nu) = -\alpha_0 F_x(x(t_\nu), y(t_\nu)) - \alpha_0 g_x^0(t_\nu, x(t_\nu), y(t_\nu), y(t_\nu - 0)) - \beta\eta_{x(t_\nu)}(p),$$
$$\dot{\psi}^2(t_\nu) = -\alpha_0 F_y(x(t_\nu), y(t_\nu)) - \alpha_0 g_y^0(t_\nu, x(t_\nu), y(t_\nu), y(t_\nu - 0)) - \beta\eta_{y(t_\nu)}(p),$$
$$\dot{\psi}^3(t_\nu) = \alpha_0,$$
$$\dot{\psi}^4(t_\nu) = -\alpha_0 g_t^0(t_\nu, x(t_\nu), y(t_\nu), y(t_\nu - 0));$$

$$\dot{\psi}^1(t_k + 0) = \alpha_0 g_x^0(t_k, x(t_k), y(t_k), y(t_k - 0)) + \beta\eta_{x(t_k+0)}(p),$$
$$\dot{\psi}^1(t_k - 0) = -\alpha_0 g_x^0(t_k, x(t_k), y(t_k), y(t_k - 0)) + \beta\eta_{x(t_k-0)}(p),$$
$$\dot{\psi}^2(t_k + 0) = \alpha_0 g_y^0(t_k, x(t_k), y(t_k), y(t_k - 0)) + \beta\eta_{y(t_k+0)}(p),$$
$$\dot{\psi}^2(t_k - 0) = -\alpha_0 g_{y(t-0)}^0(t_k, x(t_k), y(t_k), y(t_k - 0)) + \beta\eta_{y(t_k-0)}(p),$$
$$\dot{\psi}^3(t_k + 0) = \alpha_0,$$
$$\dot{\psi}^3(t_k - 0) = -\alpha_0,$$
$$\Delta\psi^4(t_k) = \alpha_0 g_t^0(t_k, x(t_k), y(t_k), y(t_k - 0));$$

для почти всех $t \in [t_0, t_\nu]$

$$\psi^1 f(t, x, y, u) + \psi^3 f^0(t, x, y, u) + \psi^4 = 0;$$

для всех $t \in \Delta_k$ $(k = 1, \ldots, \nu)$

$$\max_{u \in U}(\psi^1 f(t, x, y, u) + \psi^3 f^0(t, x, y, u) + \psi^4) = 0.$$

3. Алгоритм и его связь с гибридным принципом максимума

В работах [6–9] получены алгоритмы для решения рассматриваемого класса задач, приведем здесь один из них.

Алгоритм

1. Задаются $u^I(\cdot), y^I(\cdot)$ и из системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ находится $x^I(\cdot)$. Тогда $v^I(\cdot) = (x^I(\cdot), y^I(\cdot), u^I(\cdot))$.
2. Задаются $\xi \in [t_0, t_1]$, $\alpha \in (0, 1]$ и вычисляется значение функционала I_α^{ξ,t_1} на элементе $v^I(\cdot)$.
3. Функция $\psi(t, y)$ находится из системы

$$\psi_t + \sigma(\mathcal{H}_p^\alpha(t, x^I(t), y(t), \psi) - \dot{x}^I(t)) - \mathcal{H}_x^\alpha(t, x^I(t), y(t), \psi) = 0, \tag{12}$$

$$\sigma_t + \sigma\mathcal{H}_{px}^\alpha(t, x^I(t), y(t), \psi) + \mathcal{H}_{xp}^\alpha(t, x^I(t), y(t), \psi)\sigma +$$

$$+\mathcal{H}_{xx}^\alpha(t, x^I(t), y(t), \psi) + \sigma\mathcal{H}_{pp}^\alpha(t, x^I(t), y(t), \psi)\sigma - (1-\alpha)E = 0,$$

$$\psi(t_1, y(t_1)) = -\alpha F_x(x^I(t_1), y(t_1)),$$

$$\sigma(t_1, y(t_1)) = -\alpha F_{xx}(x^I(t_1), y(t_1)) - (1-\alpha)E,$$

$$\psi(t, y(t)) - \psi(t-0, y(t-0)) = \alpha g_x^0(t, x^I(t), y(t), y(t-0)),$$

$$\sigma(t, y(t)) - \sigma(t-0, y(t-0)) = \alpha g_{xx}^0(t, x^I(t), y(t), y(t-0)), \tag{13}$$

где E – единичная матрица размерности $n \times n$. Эта система решается на интервале $[\xi, t_1]$ для каждого $y(t), y(t-0) \in \Omega$, $t \in [\xi, t_1]$.

4. Решается задача

$$\hat{y(t)} = \arg \max_{y(t)\in\tilde{\Omega}} H^\alpha(t, x^I, y, \psi(t, y), u^I), \quad t \in [\xi, t_1] \tag{14}$$

где

$$\tilde{\Omega} = \{y(t) \in \Omega : \sum_{\tau\in A(y)} Q(\tau, x^I(\tau), y(\tau), y(\tau-0)) \leq$$

$$\leq \sum_{\tau\in A(y^I)} Q(\tau, x^I(\tau), y^I(\tau), y^I(\tau-0)),$$

$$G(x^I(t_1), \hat{y}(t_1)) \leq G(x^I(t_1), y^I(t_1))\},$$

$A(y)$ и $A(y^I)$ — множества точек разрыва функций $y(t)$ и $y^I(t)$ соответственно. Находится $\hat{u}(t, x) = \tilde{u}(t, x, \hat{y}(t))$, где $\tilde{u}(t, x, y) = \arg\max_{u\in U} H^\alpha(t, x, y, \varphi_x(t, x, y))$.

5. На $[\xi, t_1]$ интегрируется система $\dot{x} = f(t, x(t), \hat{y}(t), \hat{u}(t, x))$, $x(\xi) = x^I(\xi - 0)$, таким образом находится функция $\hat{x}(t)$, $t \in [\xi, t_1]$.
6. Новые траектории $x^{II}(\cdot)$, $y^{II}(\cdot)$ задаются как

$$x^{II}(t) = \begin{cases} x^I(t), & t \in [t_0, \xi), \\ \hat{x}(t), & t \in [\xi, t_1], \end{cases} \qquad y^{II}(t) = \begin{cases} y^I(t), & t \in [t_0, \xi), \\ \hat{y}(t), & t \in [\xi, t_1], \end{cases}$$

и соответствующее управление

$$u^{II}(t) = \begin{cases} u^I(t), & t \in [t_0, \xi), \\ \hat{u}(t, \hat{x}(t)), & t \in [\xi, t_1]. \end{cases}$$

7. Вычисляем значение $I_\alpha^{\xi, t_1}(x^{II}(\cdot), y^{II}(\cdot), u^{II}(\cdot))$, и если $I_\alpha^{\xi, t_1}(x^{II}(\cdot), y^{II}(\cdot), u^{II}(\cdot)) < I_\alpha^{\xi, t_1}(x^I(\cdot), y^I(\cdot), u^I(\cdot))$, то $v^I(\cdot) = (x^{II}(\cdot), y^{II}(\cdot), u^{II}(\cdot))$ и ξ смещается влево.

Заметим, что соотношения алгоритма соответствуют соотношениям принципа максимума, приведенным выше. Действительно, система (12)–(13) — это условие (8)–(11) с учетом введения дискретной компоненты в фазовые переменные; а задача (14) определяет остальные условия, если выписать для ее решения принцип множителей Лагранжа. Таким образом, справедлива теорема о неулучшаемом элементе.

Теорема *Пусть $v^I(\cdot) = (x^I(\cdot), y^I(\cdot), u^I(\cdot))$ — допустимый управляемый процесс, $F(x, y)$ – непрерывна и дважды дифференцируема по x, $\mathcal{H}(t, x, y, p)$ — непрерывна и непрерывно-дифференцируема дважды по x и p. Тогда, если функция φ, определяемая условиями (12)–(13) такова, что процесс $(x^I(t), y^I(t), u^I(t))$ не удовлетворяет условиям принципа максимума, то алгоритм определяет новый допустимый процесс, такой, что $I(v^{II}(\cdot)) < I(v(\cdot))$.*

Список литературы

[1] Козлов В. В., Трещев Д. В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М. : Изд-во МГУ, 1991. ↑[]

[2] Branicky M.S. *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems* // IEEE transactions on automatic control, 1998. **Vol. 43/4**, p. 475–482. ↑

[3] Santis E., Benedetto M. D., Gennaro S., Innocenzo A., Pola G. *Critical observability of a class of hybrid systems and application to air trafic management*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2006, no. 337. ↑[]

[4] Бортаковский А. С., Пантелеев А. В. *Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами* // Автоматика и телемеханика, 1987, № 7, с. 47–52. ↑[]

[5] Бортаковский А. С. *Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами* // Информатика. Автоматизация проектирования — М. : ВНИМИ, 1992, № 2-3, с. 16–22. ↑[]

[6] Батурин В. А., Малтугуева Н. С. *Метод улучшения второго порядка для решения задач оптимального управления логико-динамическими системами* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 4, с. 144–154. ↑[], 3

[7] Батурин В. А., Малтугуева Н. С., Гончарова Е. В. *Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами* // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2010, № 5, с. 51–59. ↑

[8] Батурин В. А., Малтугуева Н. С. *Модификации методов последовательных приближений для задач оптимального управления логико-динамическими системами* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с. 18–26. ↑

[9] Батурин В. А., Малтугуева Н. С. *Метод слабого улучшения первого порядка для задач оптимального управления логико-динамическими системами* // Известия Иркутского гос. университета. Математика, 2009. **Т. 2**, № 1, с. 83–93. ↑[], 3

[10] Clarke F. H., Vinter R. B. *Optimal multiprocesses* // SIAM J. Control Optim., 1989. **Vol. 27**, no. 5, p. 1072–1091. ↑2

[11] Clarke F. H., Vinter R. B. *Applications of optimal multiprocesses* // SIAM J. Control Optim., 1989. **Vol. 27**, no. 5, p. 1048–1071. ↑2

[12] Sussmann H. J. *A maximum principle for hybrid optimal control problems* // Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, p. 425–430. ↑

[13] Caines P. E., Clarke F. H., Liu X., Vinter R. B. *A maximum principle for hybrid optimal control problems with pathwise state constraints* // Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006, p. 4821–4825. ↑

[14] Dmitruk A. V., Kaganovich A. M. *The hybrid maximum principle is a consequence of pontryagin maximum principle* // Systems and Control Letters, 2008. **Vol. 57**, p. 964–970. ↑

[15] Дмитрук А. В., Каганович А. М. *Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями* // Нелинейная динамика и управление. — М. : Наука, 2008. Т. **6**, с. 1–40, Сб. науч. тр. ↑2, 2

Рекомендовал к публикации ***Программный комитет Молодёжной школы-семинара***
Модели и методы исследования гетерогенных систем

Об авторе:

Надежда Станиславовна Малтугуева

Научные интересы: непрерывно-дискретные системы, условия оптимальности, численные методы решения задач оптимального управления, математическое моделирование

e-mail: malt-nadezhda@yandex.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

Н. С. Малтугуева. *Методы решения задач оптимального управления непрерывно-дискретными системами и их связь с необходимыми условиями оптимальности* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 5(14), с. 93–101.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2012_5_93-101.pdf

N.S. Maltugueva. *Methods for solving optimal control problems for continuous-discrete systems and their relationship with the hybrid maximum principle.*

Abstract. The particular class of continuous-discrete systems is considered in this paper, for this systems the law of switching between continuous subsystems is specified in the form of controlled differential equations, and points of "jumps" are not fixed. In this case we can consider discrete variable as a control (then discrete sequence is a mixed constraint) and a state variable. We consider the transition to other formulation of the problem and communications between algorithms and known necessary optimality conditions.

Key Words and Phrases: continuous-discrete systems, optimal control, optimality conditions, numerical methods.