ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 2(16), 2013, с. 71–82

УДК 517.977

ББК 22.161.8

В. И. Гурман, И. В. Расина, О. В. Фесько

О практических преобразованиях вырожденных задач оптимального управления

Аннотация. Рассматривается схема применения параметризованной модели управления для преобразования системы с неограниченными управляющими воздействиями к новой модели, регулярной с точки зрения применения известных общих методов оптимального управления. Заданный временной отрезок разбивается на конечное число элементарных, и рассматривается семейство таких преобразований, из которых выбирается конкретное для каждого элементарного отрезка. В результате получается управляемая система, в определенном смысле эквивалентная исходной, с которой можно оперировать как с обычной. При этом ее решение в исходном классе реализуется как импульсный режим.

Ключевые слова и фразы: оптимальное управление, параметризация, вырожденные задачи, обобщенные решения, импульсные режимы.

Введение

Математическое моделирование разнообразных процессов и систем тесно взаимосвязано с проблемой принятия решений, в том числе оптимальных. С этой целью строятся математические модели объектов, удобные для применения математических методов, в том числе методов современной теории оптимального управления, основы которой составляют принцип максимума Л.С. Понтрягина [1], метод динамического программирования [2], достаточные условия В. Ф. Кротова [3, 4]. Во многих достаточно регулярных случаях типичное предположение о классе процессов управления, в котором ищется оптимальное (кусочная непрерывность, при котором строятся такие модели), дает возможность непосредственной практической

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №12-01-00256.

реализации получаемых решений. Однако также типичны и нерегулярные ситуации, характерные для нелинейных систем, когда решение в рассматриваемом классе не достигается, и речь идет о бесконечной минимизирующей последовательности, причем число переключений управления и/или величина управляющего воздействия неограниченно растет. Разумеется, возможны и регулярные ситуации, при которых число переключений оптимального управления ограничено, но достаточно велико, либо оно меняется слишком быстро с точки зрения применения реальных управляющих устройств. В таких случаях встает проблема изменения исходной модели так, чтобы она учитывала возможности практической реализации. Естественный путь ее решения — параметризация программ управления, когда множество допустимых составляют параметрические семейства процессов определенного типа с достаточно богатым набором параметров. При этом получаются модели и задачи той или иной общности. Как частный случай параметризации выступает дискретизация непрерывных систем путем задания на дискретных шагах непрерывного управления постоянным, линейным и возможно более сложным (с большим числом параметров). В [5–7] подробно рассматриваются дискретизованные модели управления простой структуры с постоянным и линейным законом изменения на шагах. Они приводят к двухуровневым дискретно-непрерывным моделям, которые можно рассматривать как частный случай более общего класса моделей, ориентированных на представление и исследование разнообразных систем неоднородной структуры [8–10], которые широко представлены в литературе под различными терминами, такими как системы переменной структуры [11], дискретно-непрерывные системы [12], логико-динамические системы [13], гибридные системы [14] и т.п.

Часто к дискретизации прибегают для приближенного решения задач оптимального управления, непрерывных в исходной постановке (например, с помощью развитых пакетов нелинейного программирования [15]), однако область применения подобных моделей значительно шире.

В данной статье рассматривается применение дискретизованной модели с кусочно-постоянным управлением для эффективного преобразования непрерывной системы с неограниченными управляющими воздействиями и соответствующей ей вырожденной задачи оптимального управления к новой модели, регулярной с точки зрения применения известных общих методов оптимального управления.

В ряде работ, посвященных вырожденным задачам (см., например, [16] и обзор [17]), предложены методы решения таких задач, состоящие по существу в исключении пассивных дифференциальных связей, которые как раз и делают подобные задачи нерегулярными. Это выполняется путем специального преобразования исходной задачи к регулярной производной задаче меньшего порядка. В случае одного управления, линейного и неограниченного, такое преобразование практически однозначно. В случае нескольких управлений, например, когда коэффициенты при линейном управлении зависят от другого управления, появляются различные возможные варианты подобных преобразований.

Цель статьи — рассмотреть важную для практики нетрадиционную схему, в которой одновременно участвуют различные варианты. Заданный временной отрезок разбивается на конечное число элементарных, и рассматривается семейство таких преобразований, из которых выбирается конкретное для каждого элементарного промежутка путем применения модели простой структуры [5–7] с кусочно-постоянным управлением. В результате получается управляемая система, в определенном смысле эквивалентная исходной, с которой можно оперировать как с обычной. При этом ее решение в исходном классе реализуется как импульсный режим. Важно подчеркнуть, что лишь применение указанной модели простой структуры обеспечивает ее эквивалентность исходной. В качестве содержательного примера рассматривается характерный тип управления квантовыми системами.

1. Постановка задачи. Предельная и производная системы

Рассматривается задача оптимального управления для системы с неограниченным линейным управлением вида

(1)
$$\dot{x} = g(x) + h(x,v)\,u, \quad t \in \mathbf{T} = [t_I, t_F], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbf{V},$$
$$x(t_I) = x_I, \quad \mathcal{I} = \mathcal{F}(x(t_F)) \to \inf,$$

где $h(t,x,v)$ — $n \times 1$-матрица, функции $g(x)$, $h(x,v)$, $\mathcal{F}(x)$ предполагаются непрерывными. Допустимыми решениями считаются пары, где $x(t)$ непрерывные, кусочно-гладкие, $u(t)$ — кусочно-непрерывные.

В соответствии с общей теорией вырожденных задач [16, 17] строится соответствующая предельная система

$$\frac{dx}{d\tau} = h\,(x, v)\,u, \tag{2}$$

описывающая асимптотически поведение исходной (1) при больших скоростях. Это автономная система, и ее траектории в пространстве x инвариантны при любом постоянном v. Возможны интегральные многообразия большей размерности. С практической точки зрения эти интегралы удобно представлять в параметрической форме $y = \eta(x, \tau)$. Строится производная система как полная производная $\eta(x, \tau)$ в силу исходной системы (1)

$$\dot{y} = \eta_x g(x), \quad x = \xi(y, \tau, v), \tag{3}$$

где $\xi(y, \tau)$ — обращение $y = \eta(x, \tau)$. Очевидно, она имеет фактически меньший порядок, чем исходная (1) (поскольку параметр τ можно исключить), не зависит от линейного управления u и в то же время эквивалентна исходной в том смысле, что любая ее траектория аппроксимируется по мере последовательностью траекторий исходной.

Множество скоростей предельной системы в рассматриваемом здесь случае представляет собой некоторый пучок прямых, проходящих через начало координат. Это означает, что она вполне управляема на любом своем интегральном (инвариантном) многообразии. Для простоты предполагается, что векторы $h\,(x, v)$ коммутативны, иначе должна быть построена их алгебра Ли, и рассматриваться ее линейная оболочка [18, 19].

Рассмотрим случай, когда используется семейство инвариантов.

2. Преобразование с использованием семейства производных систем

В системах (1), (2) матричный коэффициент $h\,(x, v)$ содержит управление v. Возможны различные схемы, позволяющие применить хорошо известное преобразование для случая «изолированного» линейного управления. Наиболее простая и «очевидная» состоит в том, чтобы найти интеграл предельной системы при условии, что v постоянно, $y = \eta(x, \tau, v)$, зафиксировать некоторую программу $v_*(t)$ как функциональный параметр, выписать соответствующую производную систему (как полную производную от $y = \eta(x, \tau, v_*(t))$ в силу исходной системы (1))

$$\dot{y} = \eta_x g(x) + \eta_v z, \quad z = \dot{v}_*, \quad x = \xi(y, \tau, v),$$

и затем варьировать $v_*(t)$ на всем отрезке. Здесь $\xi(y, \tau, v)$ и $\eta(x, \tau, v)$ имеют смысл общего решения системы (2) при постоянном v и его обращения. В качестве константы общего решения удобно взять начальное значение x (при $\tau = 0$). Тогда $\xi(y, 0, v) = y$ и $\eta(x, 0, v) = x$.

Если использовать специальный класс программ $v_*(t)$ — кусочно-постоянных, и переходить к традиционной производной системе на интервалах постоянства, то на каждом таком интервале получается семейство производных систем с параметром v, из которого можно выбирать конкретную в начальной точке интервала.

Поскольку кусочно-постоянная функция аппроксимирует кусочно-непрерывную с любой точностью с уменьшением интервалов, то в пределе приходим к некоторой управляемой системе, полученной по правилам преобразования для случая линейного «изолированного» управления:

$$\dot{y} = \eta_x g(x), \quad x = \xi(y, \tau, v). \tag{4}$$

При этом на границах участков обеспечивается непрерывность y так, чтобы $y_F(t_k) = y_I(t_{k+1})$. Для этого достаточно положить $\tau(t_k) = 0$ в изолированных точках t_k с учетом свойств отображений $x = \xi(y, \tau, v)$, $y = \eta(x, \tau, v)$.

Таким образом, исходная задача сводится к задаче с тем же функционалом для системы (4), где τ и v играют роль управлений. Очевидно, ее решения инвариантны относительно значений управлений в изолированных точках, и их можно задавать с другими целями. В данном случае $\tau(t_k) = 0$ задаются с целью реализации (аппроксимации исходной задачи) полученного решения новой задачи. Соответствующая аппроксимирующая последовательность строится так, как описано в конструктивном доказательстве Теоремы 2.4 из [20]. Для удобства исходная система на каждом элементарном участке записывается в новых переменных как производная, дополненная уравнением $\dot{\tau} = u$. Основной шаг в этой процедуре сводится к аппроксимации кусочно-непрерывной функции $\tau(t)$ в окрестностях точек разрыва решениями уравнения $\dot{\tau} = u$ при $|u| \to \infty$. Решение системы (4), получаемое при своих кусочно-непрерывных управлениях $u(t)$, $\tau(t)$, можно рассматривать как обобщенное решение исходной. Согласно терминологии [20], такое решение называется импульсным скользящим режимом.

Функционал $\mathcal{I} = \mathcal{F}\left(x\left(t_F\right)\right)$ в новых переменных записывается как

$$\mathcal{I} = \mathcal{F}^y\left(y\left(t_F\right), \tau\left(t_F\right), v\left(t_F\right)\right), \quad \mathcal{F}^y\left(y, \tau, v\right) = \mathcal{F}\left(\xi\left(y, \tau, v\right)\right),$$

где $\tau\left(t_F\right)$, $v\left(t_F\right)$ не зависят от программ $\tau(t)$, $v(t)$ на промежутке $(t_I,\ t_F)$, так что операцию минимума по ним можно выполнить априори, и функционал производной задачи задать стандартным образом как функцию конечного состояния:

$$\mathcal{J} = \mathcal{G}\left(y\left(t_F\right)\right), \quad \mathcal{G}(y) = \min_{\tau, v \in \mathbf{V}} \mathcal{F}^y\left(y, \tau, v\right).$$

Семейства интегралов предельной системы и соответствующих производных систем под названием «сопровождающие системы» применялись ранее в [21, 22] для исследования особых режимов, в частности, для вывода нетривиальных необходимых условий оптимальности, дополняющих принцип максимума Понтрягина. В данном случае речь идет о нетрадиционном преобразовании с помощью такого семейства исходной системы с линейным управлением к новой системе, которая также является релаксационным расширением исходной, но более сложным. Чтобы не вводить новых терминов, будем ее также назвать *сопровождающей системой*.

3. Пример. Преобразования управляемого уравнения Шредингера

Рассматривается уравнение Шредингера вида (см., например, [23])

$$\dot{z} = -iH(u, v)z,\ \ H = H_0 + \operatorname{diag}\{h_j(v)\}u, \quad v \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^p, \tag{5}$$

где i — комплексная единица, H_0 — постоянная действительная симметричная матрица, описывающая взаимодействие спинов, $z(t)$ — комплекснозначная кусочно дифференцируемая n-мерная вектор-функция, $v(t)$ — кусочно непрерывная p-мерная вектор-функция, $\mathbf{V}$ — компактное множество, $h_j(v)$ — действительные непрерывные функции.

Для него выписывается соответствующая предельная система

$$\frac{dz}{d\tau} = \operatorname{diag}\{h_j(v)\}u. \tag{6}$$

Находится семейство интегралов

$$w = \eta(z, \tau, v) = \mathrm{diag}\{e^{ih_j(v)\tau_k}\}z$$

предельной системы с параметром v и соответствующее семейство производных систем

$$\dot{w} = -i\mathrm{diag}\{e^{ih_j(v)\tau}\}H_0\mathrm{diag}\{e^{-ih_j(v)\tau}\}w. \tag{7}$$

Начальное состояние на каждом элементарном участке получается при $\tau_I = 0$: $w_I = z_I$. Далее делается переход к действительным переменным, строится итерационный процесс улучшения в соответствующей дискретной системе.

Расчеты проводились для цепочки из трех спинов, где

$$H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad h(v) = \begin{pmatrix} (-v)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2-v)^2 \end{pmatrix},$$

$v(t)$ — кусочно-постоянна.

Производная система в действительных переменных (с учетом известной формулы $z^n = x^n + iy^{N+n}$) получается следующей:

$$\begin{aligned}
\dot{y_1} &= \sin((2v-1)\tau)y_2 + \cos((2v-1)\tau)y_5 - y_4,\\
\dot{y_2} &= -\sin((2v-1)\tau)y_1 + \cos((2v-1)\tau)y_4 +\\
&\quad + \sin((2v-3)\tau)y_3 + \cos((2v-3)\tau)y_6 - 2y_5,\\
\dot{y_3} &= -\sin((2v-3)\tau)y_2 + \cos((2v-3)\tau)y_5 - y_6,\\
\dot{y_4} &= -\cos((2v-1)\tau)y_2 + \sin((2v-1)\tau)y_5 + y_1,\\
\dot{y_5} &= -\cos((2v-1)\tau)y_1 - \sin((2v-1)\tau)y_4 -\\
&\quad - \cos((2v-3)\tau)y_3 + \sin((2v-3)\tau)y_6 + 2y_2,\\
\dot{y_6} &= -\cos((2v-3)\tau)y_2 - \sin((2v-3)\tau)y_5 + y_3,\\
y\,(0) &= (1,0,0,0,0,0)^T, \quad |\tau| \le 3, |v| \le 3, \quad t \in [0,1]\,.
\end{aligned}$$

Минимизируемый функционал производной задачи в действительных переменных: $\mathcal{J} = 2 - 2\sqrt{(y_3)^2 + (y_6)^2}$.

Производная система была дискретизирована и была поставлена задача улучшения начального кусочно-постоянного управления с помощью метода, подробно описанного в работе [24], для различного числа шагов дискретной системы. В качестве начального управления были взяты $\tau = 0$, $v = 2$. Значение функционала на этом управлении $\mathcal{J}^0 = 1.17989$.

В таблице 1 содержатся найденные в процессе улучшения управления значения функционала $\mathcal{J}$ для различного числа шагов ρ. Из этой таблицы следует, что с увеличением ρ значение функционала уменьшается. На рис. 1 изображены оптимальные траектории при $\rho = 100$, а на рис. 2 представлены оптимальные кусочно-постоянные управления.

Таблица 1. Таблица результатов

Число шагов, ρ	5	10	15	30	50	100
Значение функционала $\mathcal{J}$	1.15812	1.15651	1.15620	1.15602	1.15597	1.15595

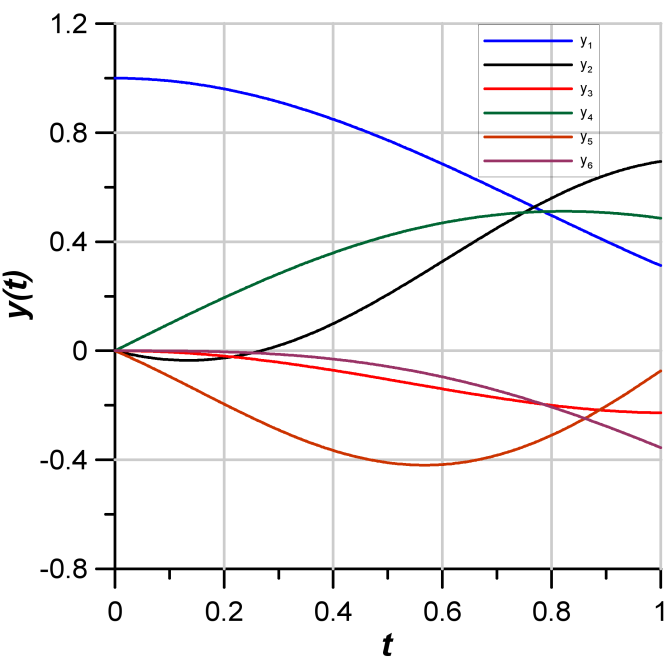


Рис. 1. Оптимальные траектории, $\rho = 100$

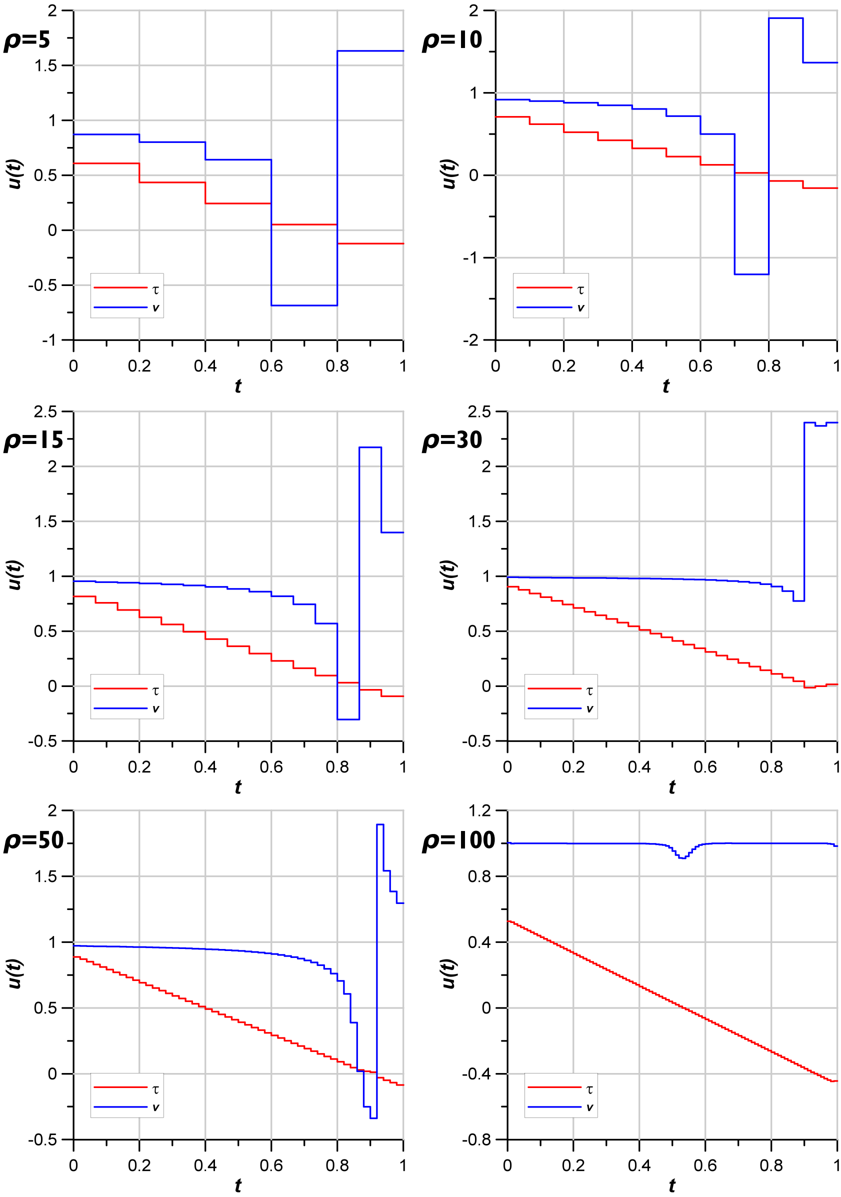


Рис. 2. Оптимальные кусочно-постоянные управления v, τ для различного числа шагов дискретной системы

Заключение

Рассмотренное преобразование не всегда может быть выполнено в явном виде, поскольку связано с нахождением интегралов вообще говоря нелинейной предельной системы. Тогда его можно выполнять неявно или приближенно и встраивать в различные итерационные процедуры оптимизации. В то же время существуют практически важные классы управляемых систем, для которых возможны явные преобразования, выполнимые априори безотносительно к какой-либо конкретной задаче.

К таковым относится рассмотренная в качестве примера система на основе уравнения Шредингера. Соответствующая система, полученная в результате априорных преобразований и эквивалентная в определенном смысле исходной системе при сильных управляющих воздействиях, фактически может рассматриваться как новая модель управления, удобная для использования не только при оптимизации управлений, но и для других целей. В этом смысле она представляет самостоятельный интерес для теории и приложений.

Список литературы

[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Физматгиз, 1961. ↑[]

[2] Беллман Р. Динамическое программирование. М. : ИЛ, 1960. ↑[]

[3] Кротов В. Ф. *Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума* // АиТ, 1962, № 12, с. 1571–1583. ↑[]

[4] Кротов В. Ф. *Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем* // ДАН СССР, 1967. Т. **172**, № 1, с. 18–21. ↑[]

[5] Фесько О. В. *Параллельный алгоритм оптимизации динамических систем на множестве кусочно-линейных управлений* // Вестник Бурятского гос. ун-та. Матем. и информатика, 2010, № 9, с. 79–87. ↑[]

[6] Фесько О. В. *Алгоритм поиска кусочно-линейного управления с нефиксированными моментами переключений* // Вестник Бурятского гос. ун-та. Матем. и информатика, 2011, № 9, с. 52–56. ↑

[7] Fesko O. *A parallel approach to improvement and estimation of the approximate optimal control* // Journal of Computational Science, 2012. Vol. **3**, no. 6, p. 486–491. ↑[]

[8] Гурман В. И., Расина И. В. *Сложные процессы* — Новосибирск : Наука, 1990, с. 84-–94. ↑[]

[9] Гурман В. И., Расина И. В. *Дискретно-непрерывные представления импульсных решений управляемых систем* // АиТ, 2012, № 8, с. 16–29. ↑

[10] Расина И. В. *Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов* // Программные системы: теория и приложения, 2011, № 5(9), с. 49–72. ↑[]

[11] Емельянов С. В. Теория систем с переменной структурой. М. : Наука, 1970. ↑[]

[12] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М. : Наука, 1973. ↑[]

[13] Васильев С. Н. *Теория и применение логико-управляемых систем* // Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03), 2003, с. 23–52. ↑[]

[14] Точилин П. А., Куржанский А. Б. Задачи достижимости и синтеза управлений для гибридных систем. М. : МГУ, 2008. ↑[]

[15] Evtushenko Yu. G., Grachev N. I. *A library of programs for solving optimal control problems* // Comput. Maths. Math. Phys., 1980. Vol. **19**, no. 2, p. 99–119. ↑[]

[16] Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. М. : Наука, 1977. ↑[], 1

[17] Гурман В. И., Ни М. К. *Вырожденные задачи оптимального управления* // АиТ, 2011, № 3, 4, 5, с. 36–50, 57–70, 32–46. ↑[], 1

[18] Гурман В. И., Ни М. К. *Траектории импульсных режимов управляемых систем* // Изв. ИГУ, 2009. Т. **2**, № 1, с. 170–182. ↑1

[19] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М. : Физматлит, 2005. ↑1

[20] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М. : Физматлит, 1997. ↑2

[21] Gurman V. I. *Singular solutions and perturbations in control systems* // Singularization of Control Systems. IFAC Proc. Ser.. — Laxenburg, 1997, p. 5–12. ↑2

[22] Гурман В. И. *Метод кратных максимумов и условия оптимальности особых экстремалей* // Дифференциальные уравнения, 2004. Т. **40**, № 11. ↑2

[23] Murphy M., Montangero S., Giovannetti V., Calarco T. *Communication at the Quantum Speed Limit Along a Spin Chain* // Phys. Rev. Lett., 2010. ↑3

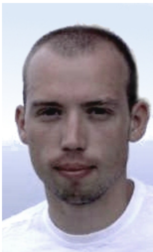
[24] Гурман В. И., Трушкова Е. А. *Приближенные методы оптимизации управляемых процессов* // Программные системы: теория и приложения, 2010, № 4(4), с. 85–104. ↑3

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. И. Гурман*

Об авторах:

Владимир Иосифович Гурман
д.т.н., профессор, г.н.с. ИЦСА ИПС им. А.К. Айламазяна РАН
e-mail: vig70@mail.ru

Ирина Викторовна Расина
к.ф.-м.н., доцент, зав. каф. математики и естествознания Сибирской академии права, экономики и управления
e-mail: irinarasina@gmail.com



Олесь Владимирович Фесько
аспирант ИЦСА ИПС им. А.К. Айламазяна РАН
e-mail: oles.fesko@live.com

Образец ссылки на эту публикацию:

В. И. Гурман, И. В. Расина, О. В. Фесько. *О практических преобразованиях вырожденных задач оптимального управления* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2013. Т. 4, № 2(16), с. 71–82.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2013_2_71-82.pdf

V. I. Gurman, I. V. Rasina, O. V. Fesko. *Practical transformation of degenerate optimal control problems.*

Abstract. The paper devoted to application of parametrized control model for transformation of system with unconstrained control to a new regular model. The time interval is devided by finite numer of intervals and family of transformations is considered. For every single interval a concrete transformation is used. As a result, we have a controllable system that can be manipulated as a regular. The solution of the problem is realized as a pulse mode in original class.

Key Words and Phrases: optimal control, parameterization, degenerate problem, generalized solution, pulse mode.