

В. И. Гурман, И. С. Гусева, О. В. Фесько

## Магистральные решения в задаче управления квантовой системой

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации процессов в спиновой цепочке на основе уравнения Шредингера, содержащего комбинацию линейного и нелинейного управлений. Она преобразуется к регулярной производной задаче по известной из теории вырожденных задач схеме, что существенно повышает эффективность ее исследования итерационными методами. Предлагаемая процедура иллюстрируется на представительном примере.

*Ключевые слова и фразы:* оптимальное управление, спиновая цепочка, вырожденные задачи, магистральное решение, метод глобального улучшения.

### Введение

Рассматривается задача оптимизации процессов в спиновой цепочке, описываемых уравнением Шредингера, гамильтониан которого содержит два управления и линейно зависит от одного из них. Квантовые системы такого рода [1, 2] в случае одного управления успешно исследовались с помощью нелокального итерационного метода В.Ф. Кротова [3, 4].

В [5] на представительном классе задач управления квантомеханическими системами с учетом их вырожденности показана высокая эффективность априорного преобразования задач с одним линейным управлением к производным задачам меньшего порядка, известного из теории вырожденных задач, благодаря возможности его выполнения в общей аналитической форме. В частности, таким путем получено полное решение в форме оптимального синтеза известной задачи управления на модели Ландау–Зинера 4-го порядка, которая ранее решалась лишь численными итерационными методами.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00256-а).

В данной работе предлагается применять такой подход и в случае двух управлений [6]. Процедура преобразования при этом усложняется, однако остается аналитической и приводит к регулярной для рассматриваемого метода Кротова задаче, линейной относительно состояния с управляемыми коэффициентами. В отличие от предшествующих работ [7, 8], где использовалось семейство производных систем с нелинейным исходным управлением в качестве параметра, здесь применяется более радикальное преобразование к единственной производной задаче, но с большим числом новых управлений.

Постановка задачи и последующее преобразование к производной задаче выполняется в комплексных переменных, в которых традиционно записывается уравнение Шредингера, что делает его компактным и наглядным и в целом отвечает традициям математической физики квантовых систем. Переход к действительным переменным производится на этапе реализации итерационных процедур в вычислительных экспериментах.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается уравнение Шредингера вида

$$(1) \quad \dot{z} = -iH(u, v)z, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad H = H_0 + \text{diag}\{h_j(t, v)\}u, \\ u_{low} \leq u \leq u_{up}, \quad v \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^p.$$

Здесь  $i$  — комплексная единица,  $H_0$  — постоянная действительная симметричная матрица, описывающая взаимодействие спинов. Ставится следующая задача оптимального управления:

$$(2) \quad t \in [t_I, t_F], \quad z(t_I) = z_I, \quad \mathcal{J} = \mathcal{F}(z(t_F)) = \sum_{j=1}^n |z_j(t_F) - z_j^*|^2 \rightarrow \inf,$$

где  $z(t)$  — комплекснозначная кусочно дифференцируемая  $n$ -мерная вектор-функция,  $v(t)$  — кусочно непрерывная  $p$ -мерная вектор-функция,  $\mathbf{V}$  — компактное множество,  $h_j(v)$  — действительные непрерывные функции,  $z^* \in \mathbb{C}^n$  — заданная точка.

Непосредственно проверяется, что система (1) имеет динамический инвариант  $S = \sum_{j=1}^n |z_j(t_I)|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j(t)|^2$  — это функция переменных состояния, сохраняющая постоянное значение на любых

траекториях (1). Следовательно,  $\mathcal{F}(z(t_F)) = \sum_{j=1}^n |z_j(t_F) - z_j^*|^2 = S + \sum_{j=1}^n |z_j^*|^2 - 2\mu(z^*, z(t_F))$ , где функция  $\mu(z^*, z) = \operatorname{Re}z^{*T}\operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z^{*T}\operatorname{Im}z$ , поэтому целевой функционал окончательно примет вид

$$\mathcal{F}(z(t_F)) = 2S - 2\mu(z^*, z(t_F)).$$

## 2. Метод решения

Для решения поставленной задачи используются понятия и факты теории вырожденных задач и магистральных решений [9, 10], в основе которой лежит преобразование исходной системы с линейными управлениями к регулярной производной системе меньшего порядка. Практическая проблема здесь в том, что в рассматриваемой системе коэффициенты  $h_j$  при линейном управлении, в отличие от достаточно хорошо изученного случая одного линейного управления, зависят от другого управления. Здесь рассматривается подход, использующий традиционное преобразование для систем с векторным линейным управлением [9], размерность которого определяется характером конкретных зависимостей  $h_j$  от  $v$ .

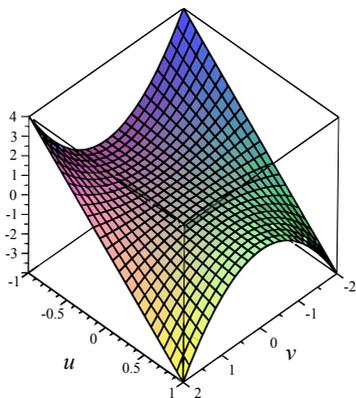
Множество скоростей системы (1) при фиксированных переменных состояния представляет собой пучок прямых, проходящих через начало координат. В соответствии с теорией [11] исходную систему (1) можно заменить эквивалентной *ослабленной системой*, множеством скоростей которой служит выпуклая оболочка исходного множества скоростей (в данном случае — линейная оболочка, трехмерное подпространство). Для этого достаточно овыпуклить годограф  $(h(v)z)u$  при фиксированных  $z$  и  $|u| = 1$  (рис. 1) и далее расширить полученную сферу до подпространства при  $|u| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим предельную систему, соответствующую исходной:

$$(3) \quad \frac{dz}{d\tau} = -i(h(v)z)u, \quad h(v) = \operatorname{diag}\{h_j(v)\}$$

(которая по смыслу описывает асимптотически поведение исходной системы (1) при больших скоростях),

$$(4) \quad \frac{dz}{d\tau} \in -i(\operatorname{Lin}h(V)z)u.$$

Рис. 1. Годограф  $(h(v)z)u$ 

Подход, реализуемый в данной работе, заключается в нахождении полного инварианта предельной системы и построении единственной соответствующей ему производной системы. Применительно к рассматриваемой квантовой задаче он может быть выполнен аналитически, что и обеспечивает его практическую эффективность.

Пусть  $h(v_k)zu$  — набор векторов, содержащий базис этой линейной оболочки. Тогда, очевидно, любой вектор  $h(v_k)zu$  выражается как линейная комбинация

$$h(v_k)zu = \sum_k h(v_k)zu_k.$$

Инвариант предельной системы (3) или (4), описывающий интегральное многообразие, может быть найден последовательным интегрированием уравнений

$$(5) \quad \frac{dz}{d\tau_k} = -i \text{diag}\{h_j(v_k)\}zu,$$

которое в данном случае линейной системы с постоянными коэффициентами выполняется аналитически и приводит к следующему выражению общего решения и соответственно инварианта:

$$z = \text{diag}\{e^{-i \sum_k h_j(v_k)\tau_k}\}w, \quad w = \text{diag}\{e^{i \sum_k h_j(v_k)\tau_k}\}z.$$

Взяв полную производную по времени от этого равенства в силу исходной системы (1), будем иметь

$$(6) \quad \dot{w} = -i \operatorname{diag}\{e^{i \sum_k (h_j(v_k)\tau_k)}\} H_0 \operatorname{diag}\{e^{-i \sum_k (h_j(v_k)\tau_k)}\} w.$$

Получается производная система, зависящая от нескольких скалярных управлений  $(\tau_k)$ . Начальные условия получаются при  $\tau_k = 0$ , так что  $w_I = z_I$ , а функционал соответствующей производной задачи определяется как

$$\mathcal{J} = \mathcal{F}^w(w(t_F)), \quad \mathcal{F}^w(w) = \min_{\{\tau_k\}} \mathcal{F}(\operatorname{diag}\{e^{-i \sum_k (h(v_k)\tau_k)}\} w).$$

К этой задаче применяется регулярным образом итерационный метод Кротова глобального улучшения [3, 4].

Перейдем к действительным переменным для случая, рассматривавшегося в [6]:

$$H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$(7) \quad \sum_k h_j(v_k)\tau_k = \phi_j,$$

$$\Delta_{jk} = \phi_j - \phi_k, \quad e^{i(\Delta_{jk})} = c_{jk} + i s_{jk}, \quad c_{jk} = \cos \Delta_{jk}, \quad s_{jk} = \sin \Delta_{jk}.$$

С учетом этого:

$$\dot{w}^1 = -i(-w^1 + e^{i\Delta_{12}}w^2),$$

$$\dot{w}^k = -i(e^{i\Delta_{k(k-1)}}w^{k-1} - 2w^k + e^{i\Delta_{k(k+1)}}w^{k+1}), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$\dot{w}^n = -i(e^{i\Delta_{n(n-1)}}w^{n-1} - w^n).$$

Далее, применяя формулу  $w^k = y^k + iy^{n+k}$  и приравнявая отдельно действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned}\dot{y}^1 &= -y^{n+1} + s_{12}y^2 + c_{12}y^{n+2}, \\ \dot{y}^k &= s_{k(k-1)}y^{k-1} + c_{k(k-1)}y^{n+k-1} + s_{k(k+1)}y^{k+1} + c_{k(k+1)}y^{n+k+1} - 2y^{n+k}, \\ \dot{y}^n &= s_{n(n-1)}y^{n-1} + c_{n(n-1)}y^{2n-1} - y^{2n}, \\ \dot{y}^{n+1} &= s_{12}y^{n+2} - c_{12}y^2 + y^1, \\ \dot{y}^{n+k} &= s_{k(k-1)}y^{n+k-1} - c_{k(k-1)}y^{k-1} + s_{k(k+1)}y^{n+k+1} - c_{k(k+1)}y^{k+1} + 2y^k, \\ \dot{y}^{2n} &= s_{n(n-1)}y^{2n-1} - c_{n(n-1)}y^{n-1} + y^n.\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$(8) \quad \Delta_{k(k-1)} = -\Delta_{(k-1)k}, \quad c_{k(k-1)} = c_{(k-1)k}, \quad s_{k(k-1)} = -s_{(k-1)k}.$$

Функционал переписывается в действительных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \mathcal{F}^w(w(t_F), \phi_j(t_F)), \quad \mathcal{F}^w = \mathcal{F}(\text{diag}\{e^{-i\phi_j}\}w), \\ \mathcal{F} &= 2(S - \mu(z^*, z)), \quad \mu = \{C^j\}^T \text{Re}z + \{C^{n+j}\}^T \text{Im}z, \\ &\quad \{C^j\} = \text{Re}z^*, \quad \{C^{n+j}\} = \text{Im}z^*,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}z &= \text{diag}\{\cos \phi_j - i \sin \phi_j\}(\text{Re}w + i\text{Im}w) = \\ &= \{\cos \phi_j y^j + \sin \phi_j y^{n+j}\} + i\{\cos \phi_j y^{n+j} - \sin \phi_j y^j\},\end{aligned}$$

$$\mu = \sum_1^n ((C^j y^j + C^{n+j} y^{n+j}) \cos \phi_j + (C^j y^{n+j} - C^{n+j} y^j) \sin \phi_j).$$

Ниже приведена процедура метода глобального улучшения применительно к рассматриваемой производной задаче как к задаче для линейной по состоянию системы

$$(9) \quad \dot{y} = A(\tau)y, \quad t \in [0, t_F], \quad \tau \in \mathcal{T}, \quad y(0) = y_I,$$

$$\mathcal{I} = 2S - 2c^T(\tau(t_F))y(t_F).$$

(1) Для некоторой заданной программы управления  $\tau^I(t)$  слева направо интегрируется система (9). В результате находится пара  $m^I = (y(t), \tau(t))^I$ .

(2) Справа налево интегрируется сопряженная система

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{\psi} &= -H_y(\psi, y, \tau^I(t)), & H(\psi, y, \tau) &= \psi^T A(z)y, \\ \psi(t_F) &= 2c(\tau^I(t_F)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c &= (\{c^j\}, \{c^{n+j}\}), \\ c^j &= C^j \cos \phi_j - C^{n+j} \sin \phi_j, & c^{n+j} &= C^{n+j} \cos \phi_j + C^j \sin \phi_j. \end{aligned}$$

(3) Слева направо интегрируется система (9), управление на промежутке получается из условия максимума  $H(\psi, y, \tau)$ , а в конечной точке — из условия максимума  $c^T(\tau)y(t_F)$ . В итоге имеем пару  $m^\Pi$ , такую что  $\mathcal{I}(m^\Pi) \leq \mathcal{I}(m^I)$ .

В результате итераций улучшения в производной задаче получается магистральное решение [10], которое при неограниченном  $u$  (идеальный случай) следует рассматривать как обобщенное решение исходной, поскольку оно аппроксимируемо с любой точностью допустимыми решениями исходной системы. При ограниченном  $u$  это же решение аппроксимируется с использованием заданных границ  $u$ , получается приближение для использования в качестве начального в некоторой итерационной процедуре улучшения применительно к исходной задаче.

Здесь рассматривается лишь идеальный случай, поскольку для практической реализации еще не накоплено достаточно экспериментального материала (насколько можно судить по литературе).

Конечномерные операции максимизации на временном интервале и в конечной точке в общей процедуре не расшифровываются как «элементарные», однако при практической реализации их нужно выполнять конкретно и достаточно эффективно с учетом повторяемости. Дадим на этот счет некоторые рекомендации с учетом специфики исследуемых выражений.

Как видно, зависимость от управлений представляет собой сумму слагаемых, каждый из которых есть скалярные произведения

$$(A_k, B_k)^T (c_k, s_k)$$

некоторых векторов  $(A_k, B_k)$  и  $(c_k, s_k)$  (с учетом равенств (8) двухиндексная нумерация может быть заменена на одноиндексную:  $\Delta_{(k+1)k} =$

$= \Delta_k, c_{(k+1)k} = c_k, s_{(k+1)k} = s_k$ ). Имеется  $n$  скалярных управлений, связанных с системой линейных уравнений

$$(11) \quad \sum_k h_j(v_k) \tau_k = \phi_j.$$

Если матрица этой системы невырождена, то  $\phi_j$  можно рассматривать в качестве независимых управлений, и максимизация выполняется аналитически по формулам:

$$c_k = A_k / |(A_k, B_k)|, \quad s_k = B_k / |(A_k, B_k)|.$$

Отсюда получаются  $\Delta_k$  и  $\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta_{k-1}$  и далее  $\tau_k, k = 1, \dots, n$ .

В противном случае, когда матрица линейной системы имеет ранг  $m < n$ ,  $|(A_k, B_k)|$  можно проранжировать по убыванию и выбрать  $m$  переменных  $\phi_j$  соответственно большим значениям из этого ряда.

Другой вариант — минимизировать невязку указанной системы по методу наименьших квадратов.

Еще один вариант — наращивать число спинов  $n$ , начиная с номера  $n$ , где матрица в (7) или (11) имеет полный ранг (например, для  $n = 3$ ), брать последовательно найденные управления как начальные приближения для следующего  $n$  и улучшать их итерационно.

Аналогично можно действовать и при минимизации функции  $\mathcal{F}^y$ , т.е. максимизации  $\mu$ : применять формулы

$$\begin{aligned} \cos \phi_j &= D_j / |D_j, E_j|, & \sin \phi_j &= E_j / |D_j, E_j|, \\ D_j &= C^j y^j + C^{n+j} y^{n+j}, & E_j &= C^j y^{n+j} - C^{n+j} y^j. \end{aligned}$$

При этом получающийся набор управлений  $\tau_k(t)$ , возможно, не будет наилучшим с точки зрения рассматриваемого метода, однако эффект улучшения в целом может быть проверен непосредственно по функционалу, и в случае неудачи следует воспользоваться другими известными методами конечномерной оптимизации. Разумеется, вероятность успеха таких приемов тем выше, чем меньше разность  $n - m$  между числом управлений и рангом матрицы системы (9).

### 3. Реализация в исходном классе

В точках разрыва полученных  $\tau_k(t)$  производятся воздействия импульсного типа, реализуемые достаточно большими управлениями  $u_k$ , так что аппроксимируется с заданной точностью траектория предельной системы.

На интервалах непрерывности исходную систему запишем в переменных  $y$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  и возьмем для определенности в качестве базисных значения  $v = (-2, 0, 2)$  (хотя здесь имеется свобода выбора, которую можно использовать при конкретной практической реализации). При этом получается система (7), дополненная уравнением

$$(12) \quad \dot{\tau}(t) = \sum_{k=1}^3 h(v_k)u_k.$$

Поскольку левая часть этого 3-мерного векторного уравнения получается заданной, оно становится линейным алгебраическим уравнением относительно трех значений  $u_k(t)$  при каждом  $t$ .

Получается скользящий режим, который задается вектор-функцией  $\tau(t)$  и базовыми управлениями  $u_k(t)$ . Реализующая его последовательность строится по известному правилу, описанному в [11]. Отрезок  $[t_I, t_F]$  разбивается на ряд элементарных отрезков  $[t_p, t_{p+1}]$ , на каждом из которых строится ломаная из трех решений уравнения (12) при различных  $u_k$ , начинающаяся на траектории  $\tau(t)$  в точке  $t_p$  и приходящая на ту же траекторию в точке  $t_{p+1}$  с точностью до малых высшего порядка в сравнении с длиной элементарного отрезка (рис. 2). При неограниченном дроблении отрезка  $[t_I, t_F]$  получающаяся последовательность сходится к  $\tau(t)$  равномерно.

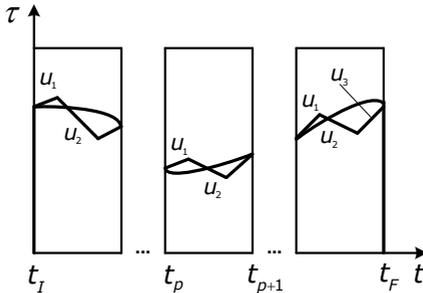


Рис. 2. Схема разбиения

#### 4. Вычислительные эксперименты

Рассматривалась задача оптимального управления квантовой системой, состоящей из спиновой цепочки длины  $n = 3, 4$  и  $5$  [6, 12], с начальными условиями и функционалом вида

$$y(0) = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathcal{J} = 2 - 2(\cos(\theta_F)y^n(t_F) + \sin(\theta_F)y^{2n}(t_F)) \rightarrow \inf,$$

где  $\theta_F = \sum_{i=1}^3 (n-1-v_i)^2 \tau_i(t_F)$ ,  $v$  — набор постоянных значений, распределенных равномерно в заданном диапазоне  $[-2, 2]$ , которые задают матрицу указанной системы,

$$h(v) = \begin{pmatrix} (-v)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1-v)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1-v)^2 \end{pmatrix}.$$

В расчетах  $v = (-2, 0, 2)$ .

Расчеты проводились для различных  $t_F$  с нахождением наименьшего времени перехода в заданное состояние  $z_*$ , когда рассматриваемый функционал обращается в 0. Строились графики полученных в результате итераций программ управлений  $\tau_k$  и функции

$$\nu(t) = 2 - 2\sqrt{(y^n(t))^2 + (y^{2n}(t))^2},$$

имеющей смысл расстояния до заданной точки в пространстве состояний. При этом использовался готовый алгоритм из [8] для дискретизованной управляемой системы путем кусочно-постоянной аппроксимации управления с достаточно малым шагом дискретизации.

На рис. 3–5 представлены программы управлений для 3-х, 4-х и 5-и спинов, а на рис. 6 — соответствующие им расстояния до заданной точки.

На рис. 7 приведены результаты расчетов для 3-х спинов в сравнении с расчетом по методу [7], которые демонстрируют выигрыш во времени перехода примерно 25%.

Данные в таблице 1 отражают ход итерационных процессов. Итерации для 3-х спиновой цепочки начинались с нулевых управлений, в то время как для последующих случаев начальными приближениями служили программы управлений, полученные для предшествующих случаев. Этим объясняется столь резкое, почти стократное различие в числе итераций. В настоящее время обрабатывается итерационный

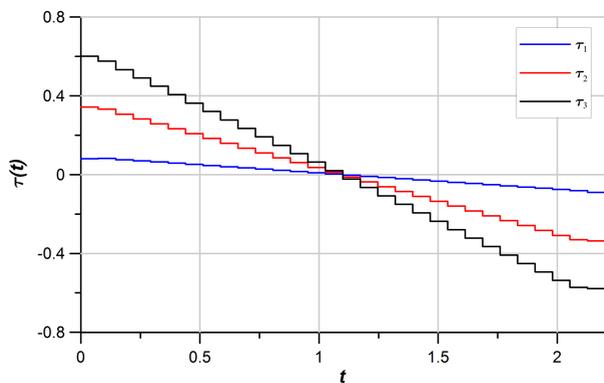


Рис. 3. Управления для цепочки из 3-х спинов,  $t_F = 2.2$

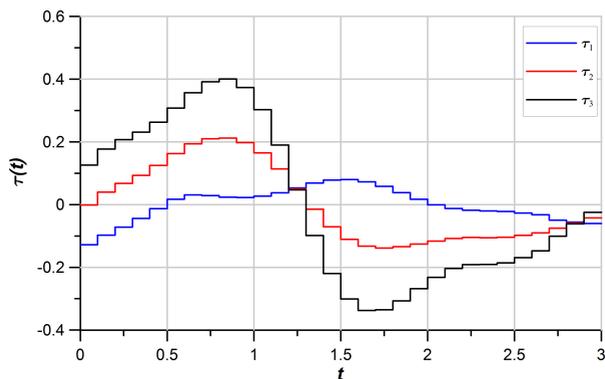
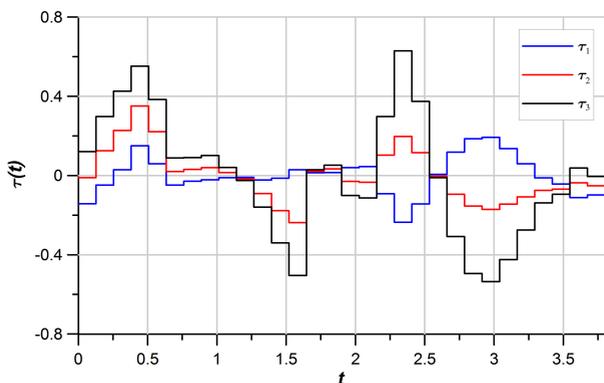
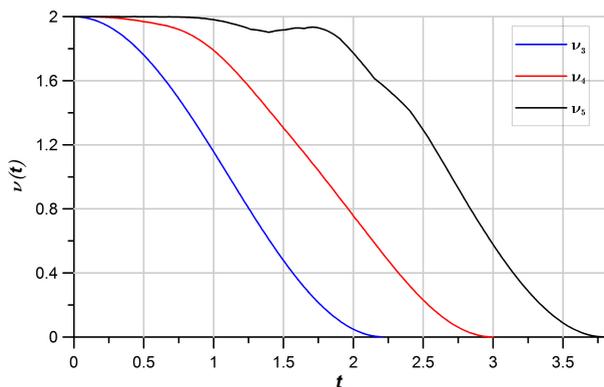


Рис. 4. Управления для цепочки из 4-х спинов,  $t_F = 3$

алгоритм для непрерывной производной системы без дискретизации, где основные операции улучшения в случае 3-х спинов выполняются аналитически. Как показывают вычислительные эксперименты, это приводит к радикальному сокращению числа итераций до двух–трех.

### 5. Заключение

Таким образом, для задачи управления квантовыми системами рассматриваемого класса предложена итерационная процедура с яв-

Рис. 5. Управления для цепочки из 5-и спинов,  $t_F = 3.8$ Рис. 6. Графики  $\nu_i(t)$ ,  $i = 3, 4, 5$  — число спинов

ным априорным преобразованием исходной системы к регулярной производной системе с помощью полного инварианта линейной оболочки множества скоростей предельной системы. Поскольку это множество не выпукло, то ее размерность превышает число реальных управлений в исходной системе. Для рассматриваемой системы их три. Они порождают производные, линейные по состоянию системы с тремя нелинейными управлениями, в отличие от двух при ранее применявшемся преобразовании посредством семейства одномерных

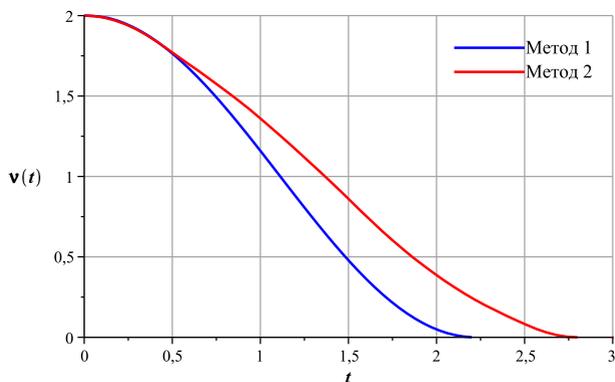


Рис. 7. Сравнение двух методов для цепочки из трех спинов

ТАБЛИЦА 1. Итерационный процесс для системы из 3-х, 4-х и 5-и спинов

№ итерации	Значение функционала $F$		
	3 спина	4 спина	5 спинов
1	2.773e-01	4.855e-01	7.179e-01
10	1.906e-03	1.921e-02	1.061e-01
20	7.791e-04	2.759e-04	4.084e-02
30	6.109e-04	4.432e-05	2.132e-02
40	5.613e-04	2.442e-06	2.789e-03
50	1.138e-03	2.821e-07	5.272e-05
60	5.242e-04	–	4.828e-07
100	6.054e-04	–	–
200	4.851e-04	–	–
314	4.484e-04	–	–

инвариантов [7, 8]. При этом также применим глобальный метод улучшения управления с линейной функцией Кротова, а время перехода в заданное состояние в проведенных экспериментах получается меньшим, чем в [7, 8]. Это вполне ожидаемо, поскольку имеется больше свободных переменных (управлений) при улучшении.

Для случаев двух и трех спинов операции максимума по управлениям выполняются аналитически, при этом итерационная процедура особенно эффективна. При более длинных цепочках предлагается поэтапное наращивание числа спинов, используя предыдущий набор улучшенных управлений как начальное приближение на последующем этапе.

Идеальное решение представляет собой комбинацию импульсных воздействий на концах заданного отрезка и скользящий режим с ограниченными базовыми управлениями внутри этого отрезка, который строится по стандартному правилу из теории вырожденных задач [11] как последовательность допустимых решений исходной системы при неограниченном росте частоты переключений базовых управлений.

Система (5), полученная в результате преобразования исходной системы (1), фактически может рассматриваться при сильных управляющих воздействиях как новая модель управления, весьма «изящная» и удобная для использования не только при оптимизации управлений, но и для других целей. В случае ограниченного линейного управления целесообразно вначале получить идеальное решение, а затем его аппроксимировать естественным образом при реальных ограничениях.

### Список литературы

- [1] Кротов В. Ф. *Об оптимизации управления квантовыми системами* // Докл. РАН, 2008. Т. 423, № 3, с. 316–319. ↑[1](#)
- [2] Кротов В. Ф. *Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления* // Автоматика и телемеханика, 2009, № 3, с. 15–23. ↑[1](#)
- [3] Кротов В. Ф., Булатов А. В., Батурина О. В. *Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с. 64–78. ↑[1](#), [2](#)
- [4] Батурина О. В., Моржин О. В. *Оптимальное управление системой спинов на основе метода глобального улучшения* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с. 79–86. ↑[1](#), [2](#)
- [5] Гурман В. И. *Магистральные решения в задачах оптимального управления квантомеханическими системами* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с. 115–126. ↑[1](#)
- [6] Murphy M., Montangero S., Giovannetti V., Calarco T. *Communication at the quantum speed limit along a spin chain* // Phys. Rev. Lett., 2010, no. 6, <http://arxiv.org/pdf/1004.3445>. ↑[1](#), [2](#), [4](#)

- [7] Gurman V. I., Rasina I. V., Baturina O. V. *Optimization of Excitation Transfer in a Spin Chain* // *Periodic Control Systems*. — University of Caen Basse-Normandie, Caen, France, 2013. Vol. 5, no. 1, p. 177–180. ↑[\[\]](#), [4](#), [5](#)
- [8] Гурман В. И., Расина И. В., Фесько О. В. *О практических преобразованиях вырожденных задач оптимального управления* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн., 2013. Т. 4, № 2(16), [http://psta.psir.ru/read/psta2013\\_2\\_71-82.pdf](http://psta.psir.ru/read/psta2013_2_71-82.pdf), с. 71–82. ↑[\[\]](#), [4](#), [5](#)
- [9] Гурман В. И. *Вырожденные задачи оптимального управления*. М. : Наука, 1977. — 304 с. ↑[2](#)
- [10] Гурман В. И. *Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений* // Автоматика и телемеханика, 2003, № 3, с. 61–71. ↑[2](#), [2](#)
- [11] Гурман В. И. *Принцип расширения в задачах управления*. М. : Наука. Физматлит, 1997. — 288 с. ↑[2](#), [3](#), [5](#)
- [12] Трушкова Е. А. *Об одном классе задач управления для квантовых систем* // Автоматика и телемеханика, 2013, № 1, с. 35–46. ↑[4](#)

Рекомендовал к публикации

*д.т.н. В. И. Гурман*

*Об авторах:*



**Владимир Иосифович Гурман**

д.т.н., профессор, г.н.с. ИЦСА Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

*e-mail:*

[vig70@mail.ru](mailto:vig70@mail.ru)

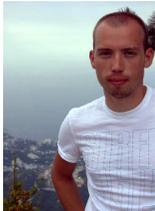


**Ирина Сергеевна Гусева**

аспирант Бурятского Государственного Университета специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

*e-mail:*

[ig\\_19@mail.ru](mailto:ig_19@mail.ru)



**Олесь Владимирович Фесько**

инженер ИЦСА Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

*e-mail:*

[oles.fesko@live.com](mailto:oles.fesko@live.com)

*Образец ссылки на эту публикацию:*

В. И. Гурман, И. С. Гусева, О. В. Фесько. *Магистральные решения в задаче управления квантовой системой* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2013. Т. 4, № 4(18), с. 91–106.

*URL:* [http://psta.psiras.ru/read/psta2013\\_4\\_91-106.pdf](http://psta.psiras.ru/read/psta2013_4_91-106.pdf)

V. I. Gurman, I.S. Guseva, O. V. Fesko. *The Turnpike Solutions in the Quantum Systems Control Problem.*

ABSTRACT. The optimization problem in a spin chain on the basis of Schrödinger equation is considered. The hamiltonian of the equation contains a combination of linear and nonlinear controls. Using the the degenerate problems theory, the problem is reduced to a regular derived problem. This transformation essentially increases the effectiveness of its investigation by iterative methods. The procedure is demonstrated in computational experiments with the use of visual example. (*in Russian*)

*Key Words and Phrases:* optimal control, spin chain, degenerate problems, turnpike solution, global improvement method.