

Е. А. Трушкова, О. В. Фесько

Модели управления параметризованной структуры

Аннотация. В работе предлагаются дискретизованные модели управления с параметрическим законом изменения на шагах, которые приводят к двухуровневым дискретно-непрерывным моделям. Описывается их программно-алгоритмическая реализация в виде параллельных алгоритмов, в частности итерационный алгоритм поиска приближенно оптимального управления и рекурсивный алгоритм поиска начального приближения управления на основе достаточных условий оптимальности.

Ключевые слова и фразы: оптимальное управление, параметризация управления, дискретно-непрерывная модель, достаточные условия оптимальности.

Введение

Одним из современных направлений математики является построение моделей динамических систем и решение задач оптимального управления с использованием этих моделей. При оптимизации динамических систем с использованием методов современной теории оптимального управления, основы которых составляют принцип максимума Л.С. Понтрягина [1], метод динамического программирования [2], достаточные условия В.Ф. Кротова [3, 4], найденное оптимальное управление, которое ищется, как правило, в классе кусочно-непрерывных процессов управлений, не всегда реализуемо на практике, либо решение вовсе не достигается в рассматриваемом классе. В этом случае необходимо заменить исходную модель так, чтобы она учитывала возможности практической реализации найденного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-31-50824-мол_нр).

© Е. А. Трушкова, О. В. Фесько, 2014

© Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, 2014

© Восточно-Китайский педагогический университет, 2014

© Программные системы: теория и приложения, 2014

Возможный способ решения этой проблемы — параметризация управления, при которой множество допустимых составляют параметрические семейства процессов определенного типа с достаточно богатым набором параметров. При этом получаются модели и задачи той или иной общности.

В статье рассматриваются дискретизованные модели управления с постоянным и линейным законом изменения на шагах, которые приводят к двухуровневым дискретно-непрерывным моделям. Такие системы являются частным случаем более общего класса моделей, ориентированных на представление и исследование разнообразных систем неоднородной структуры [5–7].

1. Постановка задачи

Рассматриваемая модель управляемого процесса имеет вид:

- (1) $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_I) = x_I, \quad t \in [t_I, t_F],$
- (2) $u(t) \in \mathbb{D}_u(t) = \{u(t) \mid \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t)\},$
- (3) $I = F(x(t_F)) \rightarrow \inf \in \mathbf{D}.$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор состояний, $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — кусочно-гладкие, $u(t)$ — p -мерный вектор кусочно-непрерывных управлений, $\underline{u}(t)$ и $\bar{u}(t)$ — заданные кусочно-непрерывные функции в $\mathbb{R}^p$, t — время, $\mathbf{D}$ — множество допустимых элементов $m = (x(t), u(t))$, удовлетворяющих условиям (1)–(2).

Рассмотрим множество кусочных управлений $U(b(t, w), m)$, где $b(t, w)$ — непрерывная базовая вектор-функция, зависящая от векторных параметров $w = (w_1, \dots, w_k)^T$, а $m \in \mathbb{Z}^+$ — число моментов переключений управления при разбиении временного отрезка $t_I = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m+1} = t_F$. Размерность каждого параметра w_i , $i = \overline{1, k}$ зависит от m .

Выбор базовой функции в виде постоянной вектор-функции $b(t, w) = (w_1, w_2, \dots, w_p)^T$, $k = p$ приводит к классу кусочно-постоянных управлений, а ее задание в виде линейной вектор-функции $b(t, w) = (w_1 t + w_2, w_3 t + w_4, \dots, w_{2p-1} t + w_{2p})^T$, $k = 2p$ образует класс кусочно-линейных управлений.

Вместо исходной задачи оптимального управления на множестве допустимых управлений $\mathbb{D}_u(t)$ будем рассматривать суженную

задачу (1)–(3) на множестве кусочных управлений $U(b(t, w), m)$, которая, очевидно, вкладывается в множество допустимых управлений исходной задачи.

Предлагаемое сужающее преобразование позволяет для решения исходной задачи использовать методы и алгоритмы решения дискретных задач, что существенно сокращает объемы вычислений в силу дискретизации времени и применения рекурсивных соотношений вместо их непрерывных аналогов — уравнений в частных производных. Отметим, что в процессе программной реализации алгоритмов улучшения управления для непрерывных задач оптимального управления подобное сужающее преобразование, как правило, осуществляется для постоянных или линейных базовых функций.

Суженная исходная задача (1)–(3) на множестве кусочных управлений сводится к задаче условной конечномерной минимизации дифференцируемой функции многих переменных $F(x(t_F)) = G(w, \tau)$, где w — совокупность всех параметров управления, $\tau_i, i = \overline{1, m}$ — моменты переключений управления.

2. Дискретизация непрерывной системы

В работе [8] описаны преобразования, приводящие суженную непрерывную задачу оптимального управления к ее дискретному аналогу.

Задачу (1)–(3) на множестве управлений $U(b(t, w), m)$ можно представить в виде задачи оптимального управления для дискретно-непрерывной системы

$$\begin{aligned} z(l+1) &= g(l, z(l), w(l)), \quad z(0) = z_0 = x_I, \quad z \in \mathbb{R}^n, \\ (4) \quad w(l) &\in W = \{w(l) \mid \underline{w} \leq w(l) \leq \overline{w}\} \subset \mathbb{R}^k, \quad l \in \{0, \dots, m\}, \\ F(z(m+1)) &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

где m — число точек переключений управления при разбиении временного отрезка $t_I = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m+1} = t_F$, а функция $g(l, z(l), w(l))$ — решение задачи Коши

$$(5) \quad \dot{x}(\xi) = f(\xi, x(\xi), b(\xi, w(l))), \quad \xi \in [\tau_l, \tau_{l+1}], \quad x(\tau_l) = z(l),$$

взятое в точке $\xi = \tau_{l+1}$. Непрерывная система (5) нижнего уровня в данном случае не содержит управлений, в то время как дискретная система верхнего уровня содержит k управлений. Заметим, что непрерывная задача (1)–(3) на множестве управлений $U(b(t, w), m)$ и дискретная задача (4) эквивалентны.

По аналогии с достаточными условиями оптимальности Кротова вводится в рассмотрение функция $\varphi(l, z)$ и строятся следующие конструкции:

$$\begin{aligned} R(l, z, w) &= \varphi(l+1, f(l, z, w)) - \varphi(l, z), \\ G(z) &= F(z) + \varphi(m+1, z) - \varphi(0, z_0). \end{aligned}$$

Положим $L = G(z(m+1)) - \sum_{l=0}^m R(l, z, w)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{z^*, w^*\}$ — допустимая пара в задаче (4) и существует φ , такие что $R(l, z^*, w^*) = \max_{w \in W, z} R(l, z, w)$ и $G(z^*) = \min_z G(z)$. Тогда пара $\{z^*, w^*\}$ — решение задачи (4).

Функцию $\varphi(l, z)$ предлагается искать из условий (схема Кротова–Беллмана)

$$\begin{aligned} (6) \quad \varphi(l, z) &= \max_{w \in W} \varphi(l+1, g(l, z, w)), \\ \varphi(m+1, z) &= -F(z), \quad l \in \{0, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Поиск начального приближения управления можно осуществлять из достаточных условий оптимальности.

3. Нелокальный метод улучшения на основе минимаксного принципа

В этом разделе описывается конструктивный метод, реализующий общий подход к эффективному улучшению управления [9–11] (получивший название минимаксного принципа), посредством линейных рекуррентных соотношений для случая дискретных систем.

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} (7) \quad z(l+1) &= g(l, z(l), w(l)), \quad l \in \mathbf{L} = \{0, \dots, m-1\}, \\ z(0) &= z_0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad w(l) \in \mathbf{W} \subset \mathbb{R}^k, \\ F(z(m)) &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Задача улучшения ставится следующим образом: пусть известен допустимый элемент задачи (7) $(z^I(l), w^I(l))$, требуется найти допустимый элемент задачи (7) $(z^{\Pi}(l), w^{\Pi}(l))$, такой что $F(z^{\Pi}(m)) < F(z^I(m))$.

Для любой функции $\varphi(l, z)$ запишем конструкции, фигурирующие в достаточных условиях оптимальности:

$$L(z, w; \varphi) = G(z(m)) - \sum_{l=0}^{m-1} R(l, z, w),$$

где

$$\begin{aligned} G(z) &= F(z) + \varphi(m, z) - \varphi(0, z_0), \\ R(l, z, w) &= \varphi(l+1, g(l, z, w)) - \varphi(l, z). \end{aligned}$$

Заметим, что $L(z, w; \varphi) = F(z(m))$ на любой допустимой паре (z, w) .

Одна итерация известного метода нелокального улучшения [9, 10] заключается в следующем:

0) Имеем начальный допустимый процесс $(z^I(l), w^I(l))$.

1) Ищем $\varphi^0(l, z)$ из соотношений:

$$(8) \quad R(l, z^I(l), w^I(l)) = \min_z R(l, z, w^I(l)), \quad l \in \{0, \dots, m-1\},$$

$$(9) \quad G(z^I(m)) = \max_z G(z).$$

2) Строим функцию:

$$\tilde{w}(l, z) = \arg \max_{w \in \mathbf{W}} R(l, z, w; \varphi^0).$$

3) Решая систему

$$z(l+1) = g(l, z(l), \tilde{w}(l, z(l))), \quad z(0) = z_0,$$

находим улучшенный допустимый процесс $(z^{II}(l), w^{II}(l))$.

Далее будем называть соотношения (8), (9) *соотношениями метода нелокального улучшения*, а соответствующую функцию $\varphi^0(l, z)$ — *разрешающей функцией*.

Здесь предлагается искать разрешающую функцию $\varphi^0(l, z)$ из условия, чтобы функционал $L(z(l), w^I(l))$ не зависел от $z(l)$ (это специальный случай максимума по $z(l)$)

$$(10) \quad R(l, z(l), w^I(l)) = 0, \quad l \in \{0, \dots, m-1\},$$

$$(11) \quad G(z) = -\varphi(0, z_0).$$

Тогда соотношения (8), (9) перепишутся в более простом виде, а именно, в виде линейных рекуррентных соотношений

$$(12) \quad \varphi(l, z) = \varphi(l+1, g(l, z, w^I(l))), \quad l \in \{0, \dots, m-1\},$$

$$(13) \quad \varphi(m, z) = -F(z).$$

Одна итерация построенного метода нелокального улучшения заключается в следующем:

0) Имеем начальный допустимый процесс $(z^I(l), w^I(l))$.

1) Ищем $\varphi^0(l, z)$ из соотношений (12), (13).

2) Строим функцию:

$$(14) \quad \tilde{w}(l, z) = \arg \max_{w \in \mathbf{W}} \varphi^0(l+1, g(l, z, w)) - \varphi^0(l, z).$$

3) Решая систему

$$z(l+1) = g(l, z(l), \tilde{w}(l, z(l))), \quad z(0) = z_0,$$

находим улучшенный допустимый процесс $(z^{II}(l), w^{II}(l))$.

ТЕОРЕМА 2. *Вышеописанный метод нелокального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т. е. выполнение неравенства $F(z^I(m)) - F(z^{II}(m)) \geq 0$. Если же для функции φ^0 , разрешающей соотношения (12), (13), условие*

$$R(l, z^I(l), w^I(l); \varphi^0) = \max_{w \in \mathbf{W}} R(l, z^I(l), w; \varphi^0),$$

не выполняется хотя бы при одном значении $l \neq m$, то будет верно строгое неравенство

$$F(z^I(m)) - F(z^{II}(m)) > 0.$$

Доказательство теоремы приведено в [8].

Заметим, что фактически табулировать и запоминать функцию $\tilde{w}(l, z(l))$ не требуется; она вычисляется при прямом счете; достаточно иметь только представление φ^0 .

Соотношения рассмотренного метода (12), (13) для поиска разрешающей функции весьма удобны для программной реализации соответствующего алгоритма. При этом расчет по формулам (12)–(14) может производиться с использованием аппроксимации функции $\varphi^0(l, z)$ при каждом фиксированном l (например, с помощью полиномов по методу наименьших квадратов), что даст возможность проводить анализ получаемой аппроксимации функции $\varphi^0(l, z)$ в виде аналитических выражений. Соответствующий алгоритм состоит из следующих шагов.

(1) Разрешается система (7) при заданных $w^I(l)$ и $z^I(0) = z_0$, определяется $m^I = (z^I(l), w^I(l))$.

- (2) Задаются сетки узлов в пространстве состояний и управлений:

$$S_z(l) = \{z^{\text{I}}(l) - \Delta z^1, z^{\text{I}}(l), z^{\text{I}}(l) + \Delta z^1\} \times \dots \\ \dots \times \{z^{\text{In}}(l) - \Delta z^n, z^{\text{In}}(l), z^{\text{In}}(l) + \Delta z^n\},$$

$$S_w = \{w_-^1, w_-^1 + h_w^1, \dots, w_+^1 - h_w^1, w_+^1\} \times \dots \\ \dots \times \{w_-^k, w_-^k + h_w^k, \dots, w_+^k - h_w^k, w_+^k\},$$

где Δz^i , $i = \overline{1, n}$, h_w^j , $j = \overline{1, k}$, — некоторые числа (регуляторы метода).

- (3) На сетке узлов $S_z(t)$ с помощью МНК ищется аппроксимация в виде полинома функции $\varphi^0(l, z)$ из соотношений (12), (13).
 (4) Разрешается при заданном $z(0) = z_0$ система

$$z(l+1) = g\left(l, z(l), \arg \max_{w \in S_w} \varphi^0(l+1, g(l, z(l), w))\right),$$

определяется $m^{\text{II}} = (z^{\text{II}}(l), w^{\text{II}}(l))$.

- (5) Если $F(z^{\text{II}}(m)) - F(z^{\text{I}}(m)) \leq \varepsilon$, то в качестве текущего улучшенного управления выбирается $w^{\text{I}}(l) = w^{\text{II}}(l)$, и осуществляется переход на шаг 2, иначе итерации завершаются.

Существенно снизить время работы программы, реализующей описанный алгоритм, можно при решении задач управления некоторыми классами непрерывных систем за счет поиска разрешающей функции $\varphi^0(l, z)$ из задачи Коши для уравнения в частных производных, являющейся аналогом соотношений (12), (13) [12, 13].

4. Вычислительные алгоритмы

На основе предложенных моделей были разработаны алгоритмы поиска приближенно оптимального управления.

Первый алгоритм предназначен для поиска приближенно оптимального управления с помощью параметрических множеств управлений простой структуры и основан на сведении задачи (1)–(3) на множестве управлений $U(b(t, w), m)$ к задаче многомерной оптимизации функции $G(w, \tau, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$, где моменты переключений τ выступают тоже как параметры, $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ — весовые коэффициенты для задачи с фазовыми ограничениями [14]. При этом для решения задачи Коши (1) использовался численный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а сама задача оптимизации решалась комбинацией методов 1-го и 2-го порядков

(градиентный метод и метод Ньютона с адаптивным шагом). Метод предполагает декомпозицию основной области значений параметров управления w на равновеликие непересекающиеся подобласти, в каждой из которых производится улучшение начального управления за счет минимизации функции G . Схема метода приведена на рис. 1.

Алгоритм очевидным образом ориентирован на параллельную программную реализацию, т. к. поиск минимума может выполняться независимо в каждой подобласти (метод *мультистарт*).

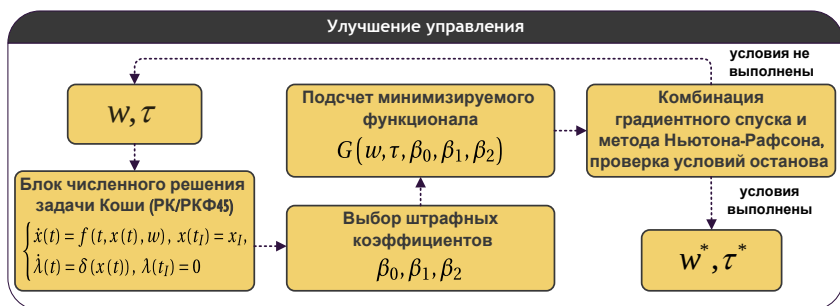


Рис. 1. Вычислительная схема улучшения управления

Во *втором алгоритме* осуществляется поиск начального приближения к решению во всей допустимой области значений w на основе достаточных условий оптимальности за счет разрешения рекурсивной цепочки (6) (соотношения Кротова–Беллмана) относительно функции $\varphi(l, z)$ на сетке управлений $\{\underline{w}, \underline{w} + \tilde{h}, \dots, \bar{w} - \tilde{h}, \bar{w}\}$ с шагом $\tilde{h}$ (см. блок **A** на рис. 2). После того как найден оптимальный узел сетки, соответствующее ему управление выбирается в качестве начального и подается в блок улучшения управления (см. блок **B** на рис. 2).

При этом рекурсивное вычисление функции Кротова $\varphi(l, z)$ в блоке **A** может выполняться независимо для различных наборов управлений, сгенерированных при построении сетки, за счет чего алгоритм допускает параллельное исполнение. Распараллеливание вычислительного процесса осуществляется по схеме процессорной фермы. Главный процессор считывает входные данные и формирует сетку по управлению, после чего распределяет наборы управлений

между процессорами-подчиненными, на которых производится рекурсивный расчет функции Кротова; после этого главный процессор собирает результаты.

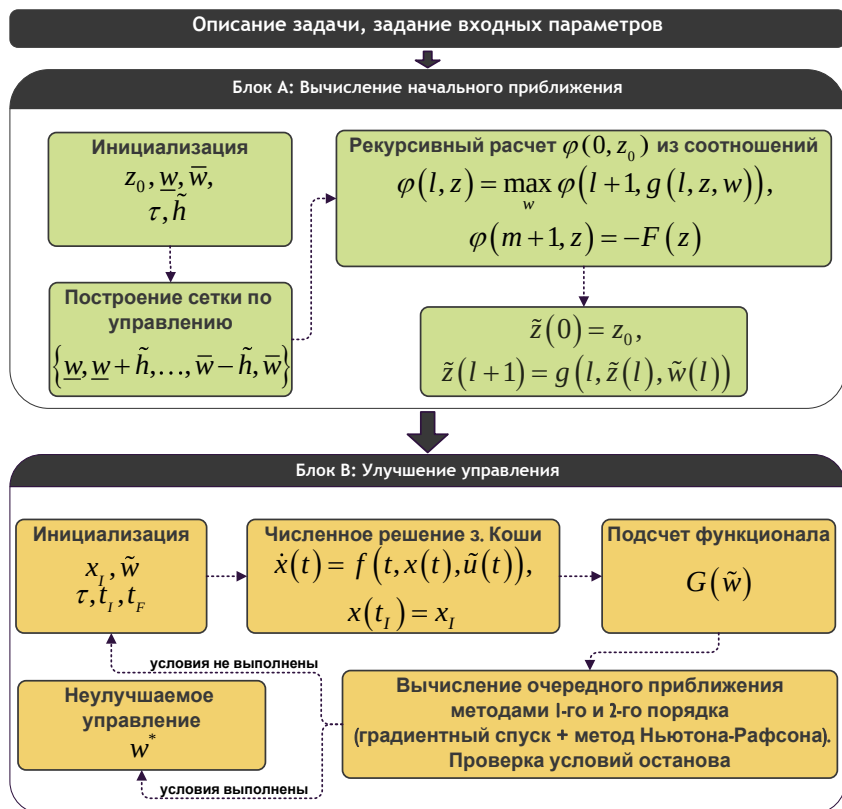


Рис. 2. Вычислительная схема поиска начального приближения и улучшения управления

Все параллельные алгоритмы реализованы в системе автоматического динамического распараллеливания программ на языке Т++ в рамках Т-системы с открытой архитектурой (OpenTS), что позволяет более эффективно загружать узлы суперкомпьютера. Т-система автоматически (без участия программиста) выполняет распараллеливание фрагментов кода в программе, планировку вычислений, синхронизацию параллельных фрагментов кода, обмен данными между

фрагментами программы и распределение данных по различным узлам кластера. Причем эти действия определяются и выполняются в динамике, во время исполнения программы.

5. Вычислительные эксперименты и приложения

Рассматривается задача динамической оптимизации подпитываемого биореактора для производства пенициллина путем анаэробной ферментации глюкозы [15–19]. Задача оптимального управления заключается в максимизации общего количества производимого пенициллина, используя в качестве управления интенсивность подачи субстрата (скорость подпитки). Необходимо максимизировать функционал

$$F(x(t_F)) = x_2(t_F)x_4(t_F) \rightarrow \max$$

в соответствии с динамикой системы, описываемой набором обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= h_1x_1 - \frac{u \cdot x_1}{500x_4}, \quad \dot{x}_2(t) = h_2x_1 - 0.01x_2 - \frac{u \cdot x_2}{500x_4}, \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{h_1x_1}{0.47} - \frac{h_2x_1}{1.2} - \frac{0.029x_1x_3}{0.0001 + x_3} + \frac{u}{x_4} \left(1 - \frac{x_3}{500}\right), \\ \dot{x}_4(t) &= u/500,\end{aligned}$$

где

$$h_1 = \frac{0.11x_3}{0.006x_1 + x_3}, \quad h_2 = \frac{0.0055x_3}{0.0001 + x_3(1 + 10x_3)}.$$

Здесь x_1 , x_2 и x_3 — концентрации биомассы, пенициллина и субстрата (в г/л) соответственно, а x_4 — объем культуры (в л). Вектор начальных состояний: $x(0) = (1.5, 0, 0, 7)^T$.

Конечный продукт предназначен для потребления человеком. Поэтому для избежания вредных последствий его производство должно подчиняться некоторым условиям. По этой причине введены ограничения: $0 \leq x_1 \leq 40$, $0 \leq x_3 \leq 25$, $0 \leq x_4 \leq 10$. Управление также ограничено: $0 \leq u \leq 50$ (в л/ч); общее время протекания процесса фиксировано: $t_F = 132$ ч.

С использованием параллельного алгоритма, основанного на декомпозиции области управления, была численно решена рассматриваемая задача в классе кусочно-постоянных управлений с шестью нефиксированными моментами переключений. В процессе расчета область поиска управления была покрыта 128 подобластями.

Ниже приведены результаты расчета, касающиеся той подобласти, в которой найдено оптимальное решение задачи. Начальное управление $w = (12.5, 12.5, 37.5, 12.5, 12.5, 12.5, 12.5)^T$ и моменты переключений интенсивности подпитки $\tau = (5, 10, 15, 20, 25, 50)^T$.

В ходе работы программы удалось добиться улучшения управления $\tilde{w} = (14.54, 11.24, 37.05, 13.89, 13.77, 12.75, 9.41)^T$, сдвига моментов переключений $\tilde{\tau} = (4.07, 11.12, 15.33, 19.04, 24.84, 54.9)^T$ и выполнения фазовых ограничений, доставив при этом значение функционалу $F(x(t_F)) = 89.1$, что является наилучшим результатом среди вышеперечисленных работ. В частности, в работе [18] было получено значение $F(x(t_F)) = 88.013$ с двадцатью точками переключений кусочно-постоянного управления. Значение траекторий в конце процесса: $x(t_F) = (28.65, 8.85, 0.001, 10.07)^T$.

Итоговое оптимальное управление и соответствующие траектории представлены на рис. 3. Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: повышая интенсивность подачи субстрата $u(t)$ и стимулируя тем самым рост биомассы x_1 , в точке $\tilde{z}$ концентрация глюкозы x_3 в биореакторе достигает своего максимума. Наличие глюкозы подавляет продукцию ферментов, которые необходимы для синтеза пенициллина. Поэтому ее интенсивность подачи снижается и в момент, когда концентрация глюкозы становится близкой к нулю и накоплено большое количество биомассы, начинается резкий интенсивный синтез пенициллина x_2 .

6. Заключение

В работе проведено исследование проблемы изменения исходной модели так, чтобы она учитывала возможности практической реализации. Естественный путь ее решения – параметризация программ управления, позволяющая вместо исходной модели рассматривать дискретизованную модель управления простой структуры с постоянным и линейным законом изменения на шагах в виде двухуровневой дискретно-непрерывной модели. Также при решении задач оптимального управления типичны и нерегулярные ситуации, когда решение в рассматриваемом классе не достигается, и речь идет о бесконечной минимизирующей последовательности, причем число переключений управления и/или величина управляющего воздействия неограниченно растет. Для практической реализации подобных управлений также можно переходить к поиску параметризованного управления.

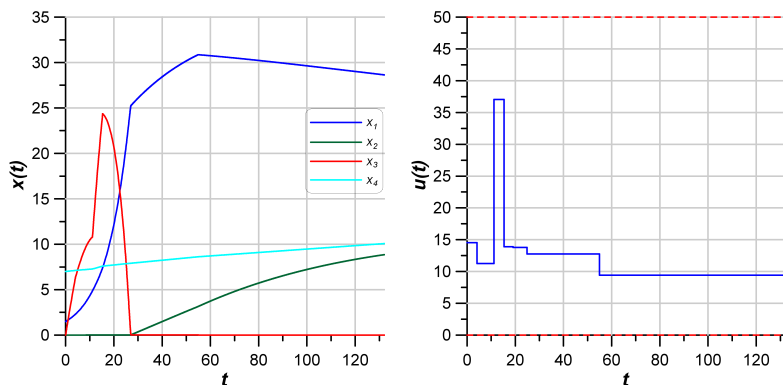


Рис. 3. Оптимальные состояния (слева) и управление (справа) для задачи по производству пеницилина

В ходе исследования были разработаны модели управления простой структуры как дискретно-непрерывные с кусочно-постоянным и кусочно-линейным управлением на дискретных шагах. Для параметризованной дискретной модели приводится аналог теоремы Кротова о достаточных условиях оптимальности и нелокальный метод улучшения управления на основе минимаксного принципа. На их основе разработаны алгоритмы поиска приближенно оптимального управления.

Список литературы

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. ↑ [243](#).
- [2] Р. Беллман. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. ↑ [243](#).
- [3] В. Ф. Кротов. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума // Автомат. и телемех. 1962, № 12, с. 1571–1583. ↑ [243](#).
- [4] В. Ф. Кротов. Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем // ДАН СССР, 1967. Т. 172, № 1, с. 18–21. ↑ [243](#).
- [5] В. И. Гурман, И. В. Расина. Сложные процессы. — Новосибирск: Наука, 1990, с. 84–94. ↑ [244](#).
- [6] В. И. Гурман, И. В. Расина. Дискретно-непрерывные представления импульсных решений управляемых систем // Автомат. и телемех. 2012, № 8, с. 16–29. ↑ [244](#).

- [7] И. В. Расина. *Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов* // Программные системы: теория и приложения, 2011, № 5(9), с. 49–72. ↑ [244](#).
- [8] Е. А. Трушкова. *Алгоритмы глобального поиска оптимального управления* // Автомат. и телемех. 2011, № 6, с. 151–159. ↑ [245](#), [248](#).
- [9] В. Ф. Кротов, И. Н. Фельдман. *Итерационный метод решения задач оптимального управления* // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983, № 2, с. 160–168. ↑ [246](#), [247](#).
- [10] V. F. Krotov. *Global methods in optimal control theory*. N.Y.: Marcel Dekker, 1996. ↑ [246](#), [247](#).
- [11] В. Ф. Кротов. *Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления* // Автомат. и телемех. 2009, № 3, с. 15–23. ↑ [246](#).
- [12] Е. А. Трушкова. *Об одном классе задач оптимального управления для квантовых систем* // Автомат. и телемех. 2013, № 1, с. 35–46. ↑ [249](#).
- [13] Е. А. Трушкова. *Метод глобального улучшения для гамильтоновых систем с управляемыми коэффициентами* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013. Т. 13, № 1(2), с. 95–99. ↑ [249](#).
- [14] В. Н. Квоков, Е. А. Трушкова, М. Ю. Ухин. *Метод улучшения управления на имитационной модели объекта и его приложение к задаче оптимизации маневров нештатной посадки вертолета* // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева, 2009, № 1, с. 161–169. ↑ [249](#).
- [15] J. R. Banga, R. Irizarry-Rivera, W. D. Seider. *Stochastic optimization for optimal and model-predictive control* // Computers and Chemical Engineering, 1998. Vol. 22, no. 4–5, p. 603–612. ↑ [252](#).
- [16] J. E. Cuthrell, L. T. Biegler. *Simultaneous optimization and solution methods for batch reactor control profiles* // Computers and Chemical Engineering, 1989. Vol. 13, no. 1–2, p. 49–62. ↑ [252](#).
- [17] T. Hirmajer, E. Balsa-Canto, J. R. Banga. DOTcvp: Dynamic Optimization Toolbox with Control Vector Parameterization approach for handling continuous and mixed-integer dynamic optimization problems, 2010. — 66 p. ↑ [252](#).
- [18] J. A. E. Larrosa. *New heuristics for global optimization of complex bioprocesses*, (2008), PhD thesis. 235 p. ↑ [252](#), [253](#).
- [19] R. Luus. *Application of dynamic programming to differential-algebraic process systems* // Computers and Chemical Engineering, 1993. Vol. 17, no. 4, p. 373–377. ↑ [252](#).

Об авторах:



Екатерина Александровна Трушкова

д.ф.-м.н., в.н.с. лаб. 45 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; область научных интересов: теория оптимального управления, методы и алгоритмы приближенной оптимизации управления, параллельные вычисления.

e-mail:

katerinatr@mail.ru



Олесь Владимирович Фесько

к.т.н., н.с. ИЦСА Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН; East China Normal University; область научных интересов: приближенные методы оптимального управления, достаточные условия оптимальности, дискретно-непрерывные модели

e-mail:

oles.fesko@live.com

Образец ссылки на эту публикацию:

Е. А. Трушкова, О. В. Фесько. *Модели управления параметризованной структуры* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2014. Т. 5, № 4(22), с. 243–256.

URL

http://psta.psir.ru/read/psta2014_4_243-256.pdf

Ekaterina Trushkova, Oles Fesko. *Parameterized control models.*

ABSTRACT. In this article discretized control systems with parametric structure are considered. They lead to discrete-continuous models. Parallel algorithms for finding an approximate optimal control are developed on the basis of these models. An example is given.

Key Words and Phrases: optimal control, control parameterization, discrete-continuous models.