ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 5(23), 2014, с. 29–35

УДК 517.97

И.-Х. Д. Хишектуева

Расчет оптимальных параметров динамических систем методом неподвижных точек

Аннотация. Рассматривается метод улучшения управляемых параметров динамических систем. Система условий улучшения представляет собой специальное операторное уравнение, сконструированное на основе операции проектирования на допустимое множество значений управления и интерпретируемое как задача о неподвижной точке. Приводятся результаты численных расчетов тестового примера.

Ключевые слова и фразы: параметрическая оптимизация, задача о неподвижной точке.

1. Метод решения

Рассматривается задача оптимизации управляющих параметров

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u, t)dt \to \min_{u \in U}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t),\ x(t_0) = x^0,\ t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ это вектор состояния, а $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор управляющих параметров со значениями в выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n, вектор-функция $F(x, u, t)$, векторная функция $f(x, u, t)$ и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №12-01-00914-а, №12-01-98011-р_сибирь_а, №13-01-92200-Монг_а).

© И.-Х. Д. Хишектуева, 2014
© Бурятский государственный университет, 2014
© Программные системы: теория и приложения, 2014

2) функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\| .$$

Строится релаксационная (улучшающаяся) последовательность управлений, определяемых на каждой итерации в ходе решения задач улучшения, формулируемых в следующей форме: для заданного управления $u \in U$ требуется найти управление $v \in U$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Для реализации задачи улучшения предлагается решить задачу о неподвижной точке (ЗНТ) [1]:

$$v = P_U(u + \alpha(\int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt + s)), \quad u \in U,\ v \in U,\ s \in R^m, \tag{3}$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме, $\alpha > 0$ — параметр проектирования, $H(p, x, u, t)$ — функция Понтрягина, $x(t, v)$ — решение системы (2) при $u = v$, $p(t, u, v)$ — решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы вида

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, u), u, t) - r(t),$$

$$\langle H_x(p(t), x(t, u), u, t) + r(t), x(t, v) - x(t, u)\rangle = \Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t, u), u, t)$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - q,$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1), u) + q, x(t_1, v) - x(t_1, u)\rangle = \Delta_{x(t_1,v)} \varphi(x(t_1, u)).$$

Величина s определяется соотношением

$$\int_T \Delta_v H(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt = \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt + s, v - u \right\rangle. \tag{4}$$

Для решения задачи о неподвижной точке (3) используется итерационный алгоритм при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = P_U(u + \alpha(\int_T H_u(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t)dt + s^k)),\ v^0 \in U.$$

Величина s^k удовлетворяет соотношению (4) при $v = v^k$.

2. Пример

Проиллюстрируем работу метода на простом примере [1]. Численный расчет задачи о неподвижной точке (3) проводился до первого строгого улучшения управления $u \in U$. Далее строилась новая задача о неподвижной точке и итерационный алгоритм повторялся. В качестве критерия остановки итерационого процесса выбиралось условие $\|v^{k+1} - v^k\| \leq \varepsilon \|v^k\|$ в евклидовой норме, где $\varepsilon > 0$ - заданная точность. Численное интегрирование дифференциальных систем реализовывалось методом Рунге-Кутта-Вернера переменного (5-6) порядка и шага с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Фортран PowerStation 4.0.

Пример

$$\Phi(u) = \int_0^1 (x^2(t) - u^2)dt \to min,$$
$$\dot{x}(t) = u,\ x(0) = 0,\ u \in U = [-1;1],\ t \in T = [0,1].$$

В данном простом примере легко определяется оптимальное решение $v = \pm 1$. Ему соответствует значение целевой функции $\Phi(v) = -\frac{2}{3}$

Функция Понтрягина имеет вид $H(p,u,x,t) = pu - x^2 + u^2$.

Поставим задачу об улучшении управления u.

Задача о неподвижной точке принимает вид:

$$v = P_U(u + \alpha(\int_0^1 (p(t,u,v) + 2u)dt + s))$$

$$(\int_0^1 (p(t,u,v) + 2u + s)dt)(v - u) = \int_0^1 (p(t,u,v)(v-u) + (v^2 - u^2))dt,$$

где $p(t,u,v)$ - решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = 2x(t,u) - r(t)$$
$$(-2x(t,u) + r(t))(x(t,v) - x(t,u)) = -x^2(t,v) + x^2(t,u)$$

с начальными дифференциально-алгебраическими условиями

$$p(1) = -q$$
$$q(x(t_1,v) - x(t_1,u)) = 0.$$

В соответствии с [1] из алгебраических соотношений получаем

$$r(t) = \begin{cases} 0,\ x(t,v) = x(t,u), \\ x(t,u) - x(t,v),\ x(t,v) \neq x(t,u), \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 0, \ x(t_1, v) = x(t_1, u), \\ 0, \ x(t_1, v) \neq x(t_1, u), \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 0, \ v = u, \\ 0, \ v \neq u. \end{cases}$$

Отсюда задача о неподвижной точке принимает вид:

$$v = P_U(u + \alpha(\int_0^1 p(t, u, v)dt + u + v)),$$

$$\dot{p}(t) = x(t, u) + x(t, v), \ p(1) = 0.$$

Для решения задачи о неподвижной точке применялся итерационный процесс:

$$v^{k+1} = P_U(u + \alpha(\int_0^1 p(t, u, v^k)dt + u + v^k)).$$

Результаты численных расчетов представлены в таблицах 1, 2. Расчеты проводились при $\varepsilon = 10^{-5}$ для различных входных управлений $u \in U$. В качестве начальных приближений v^0 для итерационного процесса рассматривались управления, равные $0; -0.5; 0.5; -1; 1$. Значения параметра α выбирались равными 10^{-2}, 1, 10^2. $\hat{v}$, $\Phi(\hat{v})$ - расчетные значения управления и целевой функции.

Для экстремального неоптимального управления $u = 0$ (u удовлетворяет дифференциальному принципу максимума [1]) задача о неподвижной точке имеет три решения $v = 0, \pm 1$. При задании в итерационном алгоритме начального приближения $v^0 = u = 0$ строгого улучшения не происходит, ввиду свойств задачи о неподвижной точке для экстремального управления [1]. В этом случае необходимо задавать начальные управления v^0, отличающиеся от экстремального входного управления, для того, чтобы обеспечить строгое улучшение экстремального управления $u = 0$. При этом последовательность улучшающихся управлений, генерируемая алгоритмом, сходится к одному из оптимальных решений в зависимости от знака v^0. Данный эффект демонстрируется в таблице 1.

Для входных неэкстремальных управлений $u \in U$ единственным решением задачи о неподвижной точке является одно из оптимальных решений в зависимости от знака u и алгоритм сходится к этому оптимальному решению для произвольных начальных приближений v^0.

Таблица 1. Эффективность метода при $u = 0$

v^0	α	$\hat{v}$	$\Phi(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
0	10^{-2}	0	0	1
	1	0	0	1
	10^2	0	0	1
-0.5	10^{-2}	-1.000	-0.667	112
	1	-1.000	-0.667	3
	10^2	-1.000	-0.667	2
0.5	10^{-2}	1.000	-0.667	112
	1	1.000	-0.667	3
	10^2	1.000	-0.667	2
-1	10^{-2}	-1.000	-0.667	71
	1	-1.000	-0.667	2
	10^2	-1.000	-0.667	2
1	10^{-2}	1.000	-0.667	71
	1	1.000	-0.667	2
	10^2	1.000	-0.667	2

Например, для входного управления $u < 0$ единственным решением задачи о неподвижной точке является оптимальное управление $v = -1$. В этом случае алгоритм сходится к оптимальному решению для любого начального приближения v^0. Это показано в таблице 2.

Аналогично, если $u > 0$, то единственным решением задачи о неподвижной точке является $v = 1$, и алгоритм сходится к этому решению для любого начального приближения v^0.

Важно отметить, что алгоритм при любых малых управлениях u, отличных от экстремального $u = 0$, сходится к оптимальному решению, а не к указанному экстремальному управлению.

Таким образом, в данном примере метод позволяет получать приближенно-оптимальные управления с заданной точностью $\varepsilon > 0$ для различных входных управлений u и начальных приближений v^0 итерационного процесса. Проведенные вычислительные эксперименты в рамках демонстрационного примера иллюстрируют возможность строгого улучшения экстремального неоптимального управления и глобальную сходимость последовательности улучшающихся управлений, вырабатываемых рассматриваемым методом.

Таблица 2. Эффективность метода при $u = -0.5$

v^0	α	$\hat{v}$	$\Phi(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
0	10^{-2}	-1.000	-0.667	71
	1	-1.000	-0.667	2
	10^2	-1.000	-0.667	2
-0.5	10^{-2}	-1.000	-0.667	42
	1	-1.000	-0.667	2
	10^2	-1.000	-0.667	2
0.5	10^{-2}	-1.000	-0.667	396
	1	-1.000	-0.667	2
	10^2	-1.000	-0.667	2
-1	10^{-2}	-1.000	-0.667	30
	1	-1.000	-0.667	2
	10^2	-1.000	-0.667	2
1	10^{-2}	-1.000	-0.667	37
	1	-1.000	-0.667	2
	10^2	-1.000	-0.667	2

3. Заключение

В работе [5] проведены численные эксперименты по расчету линейных по управляющим параметрам модельных задач [2–4] методом неподвижных точек. Численные расчеты продемонстрировали эффективность рассматриваемого метода. В частности по сравнению с [4] были улучшены расчетные значения целевых функционалов рассматриваемых задач.

В данной работе рассматривается метод, разработанный для оптимизации нелинейных параметров динамических систем. Метод характеризуется отсутствием трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования, характерной для градиентных методов, а также принципиальной возможностью строгого улучшения управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума. Сходимость метода регулируется выбором одного проекционного параметра $\alpha > 0$, что значительно упрощает настройку метода для решения конкретных прикладных задач. Указанные свойства метода являются существенными факторами для повышения эффективности решения задач параметрической оптимизации динамических систем.

Список литературы

[1] А. С. Булдаев, И.-Х. Д. Хишектуева. *Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем* // Автоматика и телемеханика, 2013, № 12, с. 5–15. ↑ 30, 31, 32.

[2] А. В. Каляев. *Расчет переходного процесса в линейных системах методом понижения порядка дифференциального уравнения* // Автоматика и телемеханика, 1959. Т. **20**, № 9, с. 1171–1179. ↑ 34.

[3] А. И. Тятюшкин. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006. — 343 с. ↑ 34.

[4] А. И. Тятюшкин. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние, 1992. — 193 с. ↑ 34.

[5] И.-Х. Д. Хишектуева. *Алгоритм оптимизации параметров нелинейных динамических систем* // Вестник Бурятского государственного университета, 2013, с. 39–44. ↑ 34.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. И. Гурман*

Об авторе:

Ишин-Хорло Дамбадоржиевна Хишектуева
ассистент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО "Бурятский государственный университет"
e-mail: ishin@ulanovka.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

И.-Х. Д. Хишектуева. *Расчет оптимальных параметров динамических систем методом неподвижных точек* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2014. Т. 5, № 5(23), с. 29–35.

URL `http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5_29-35.pdf`

Ishin-Khorlo Khishektueva. *Numerical solution of optimization problems with parameters by fixed point method.*

Abstract. We consider the method of fixed point in the problems of parametric optimization systems. The system of conditions of improvement is special operator equation on the set of admissible parameters, constructed on the basis of projection operator. Operator equation is interpreted as a problem of fixed point in the parameter space. Results of numerical experiments of the test task are given. (*in Russian*).

Key Words and Phrases: parametric optimization, problem of a fixed point.