ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 5(23), 2014, с. 37–44

УДК 517.977.56, 517.977.57

М. В. Старицын

Об одной задаче оптимизации в стационарной популяционной модели логистического типа

Аннотация. Исследуется задача оптимального управления распределением биологического сообщества в зависимости от распределения пищевого ресурса заданного объема. Модель описывается нелинейным эллиптическим уравнением логистического типа с граничными условиями Дирихле. Установлено существование решения задачи. Основной результат работы составляет доказательство необходимых условий оптимальности.

Ключевые слова и фразы: эллиптические уравнения в частных производных, стационарные модели популяции, оптимальное управление, необходимые условия оптимальности.

Введение. Постановка задачи

Настоящая заметка посвящена одной проблеме математической биологии, представляющей собой модификацию стационарной популяционной модели [1]. Популяция (однородное биологическое сообщество), распределенная в некоторой области Ω согласно логистическому закону, описывается своей функцией плотности $u = u(x)$. Закон изменения плотности формализуется в виде нелинейного уравнения эллиптического типа и содержит зависимость от концентрации некоторого пищевого ресурса $m = m(x)$. Задача состоит в поиске компромисса между доходом от использования (добычи) популяции и затратами на распространение ресурса, общее количество которого фиксировано. В отличие от [1], где подобная задача исследовалась при граничных условиях типа Неймана, мы рассматриваем более сложный (и с содержательной точки зрения, более реалистичный) случай граничных условий типа Дирихле. В последнем модель допускает внешние воздействия на популяцию, сосредоточенные на границе ареала обитания.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 14-01-31254.

Изучается два вопроса, стандартных для теории управления распределенными системами: существование оптимального решения и необходимые условия оптимальности заданного управления. Ряд близких результатов можно найти в работах [**1**–**6**].

Формально, проблема имеет следующий вид:

$$I = \int_\Omega (u - Mm^2)dx \to \max,$$

при ограничениях

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = m(x)u - u^2, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$m \in \mathcal{M},$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(a, \delta) \triangleq \{m \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq m(x) \leq a, \int_\Omega m(x)dx = \delta\}.$$

Здесь функции $m \in \mathcal{M}$ играют роль управляющих воздействий; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — заданное открытое ограниченное связное множество; M, a и δ — заданные положительные параметры, где $a \geq \frac{\delta}{|\Omega|}$ ($|\Omega|$ обозначает меру Лебега множества Ω в $\mathbb{R}^n$). Фазовая траектория u есть решение задачи Дирихле (1) в слабом смысле. Заметим, что при этом оказывается $u \in H_0^1(\Omega)$.

Укажем, при каких условиях управление $m \in \mathcal{M}$ порождает разумное с содержательной точки зрения — положительное решение краевой задачи (1) [**7**, **8**]. Обозначим через $\lambda_1(-\Delta - m)$ главное (наименьшее) собственное значение задачи

$$\begin{cases} -\Delta u - mu = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Предложение 1. *Пусть $m \in \mathcal{M}$ задано. Задача Дирихле* (1) *имеет единственное положительное решение, если и только если $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta - m) < 0$.*

Обоснование этого утверждения стандартно и опирается на технику суб- и суперрешений (см., например, [**7**, **8**]).

Приведем уточненную постановку нашей вариационной задачи:

$$(P) \qquad I(m) = \int_\Omega (u[m] - Mm^2)dx \to \max$$

при условиях

$$m \in \mathcal{M},$$

$$\begin{cases} u[m] \text{ есть решение } (1), \text{ если } m \in \mathcal{M}_-, \\ u[m] = 0, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь

$$\mathcal{M}_- = \mathcal{M}_-(a,\delta) := \{m \in \mathcal{M}(a,\delta): \ \lambda_1(-\Delta - m) < 0\}.$$

1. Существование оптимального управления

Начнем изучение задачи (P) с вопроса о существовании ее решения.

Утверждение 1. *В задаче (P) существует оптимальное управление.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность управлений $\{m_n\} \subset \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, такую что

$$I^n = I(m_n) \Rightarrow \sup_{m \in \mathcal{M}} I(m) = I^* \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что для любого $m \in \mathcal{M}$ справедливо

$$I(m) \le \int_\Omega u(m)dx < a|\Omega|.$$

Из оценок

$$\|m\|_{L^2(\Omega)} \le \|m\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{1/2} \le a|\Omega|^{1/2} \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

следует, что последовательность $\{m_n\}$ равномерно ограничена в $L^2(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность $\{m_k\} \subset \{m_n\}$, слабо сходящаяся в $L^2(\Omega)$ к некоторой функции m^*. Множество $\mathcal{M}$, очевидно, выпукло и замкнуто в $L^2(\Omega)$. Следовательно, оно замкнуто в слабой топологии, и $m^* \in \mathcal{M}$.

Для каждого элемента m_k выделенной выше подпоследовательности рассмотрим слабую формулировку соответствующей задачи Дирихле (1):

$$(2) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle \nabla u_k, \nabla\varphi \rangle dx = \int_\Omega m_k u_k \varphi dx - \int_\Omega u_k^2 \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ u_k \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Полагая $\varphi = u_k$ и учитывая, что $u_k \geq 0$, имеем

$$\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega m_k u_k^2 dx - \int_\Omega u_k^3 dx \leq \int_\Omega m_k u_k^2 dx \leq$$

$$\leq \|m_k\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq a^3|\Omega|.$$

Это означает, что последовательности $\{u_k\}$ равномерно ограничена и, как следствие, слабо компактна в $H^1(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность $\{(u_s, m_s)\} \subset \{(u_k, m_k)\}$ такая, что последовательность $\{m_s\}$ имеет в $L^2(\Omega)$ слабый предел m^*. При этом $\{u_s\}$ также сходится к некоторому $u^* \in H^1(\Omega)$ слабо.

Покажем, что $u^* = u(m^*)$. Для этого заметим, что сходимость $u_s \to u^*$ в $L^2(\Omega)$ влечет

$$\int_\Omega u_s^2 \varphi dx \to \int_\Omega {u^*}^2 \varphi dx,$$

для любого $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Слабая сходимость $u_s \to u^*$ в $H^1(\Omega)$ предполагает, что $\Delta u_s \to \Delta u^*$ в $H^{-1}(\Omega)$. Остается показать, что $m_s u_s \to m^* u^*$. Поскольку вложение $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ вполне непрерывно для любого Ω, из

$$\left| \int_\Omega m_s(u_s - u^*)\varphi dx \right| \leq c\|u_s - u^*\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

следует

$$\int_\Omega m_s u_s \varphi dx = \int_\Omega m_s u^* \varphi dx + \int_\Omega m_s(u_s - u^*)\varphi dx \to \int_\Omega m^* u^* \varphi dx.$$

Наконец, ввиду (2), имеем $u(m^*) = u^*$. Функционал $I(\cdot)$ полунепрерывен снизу в слабой топологии. Таким образом,

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} I(m) = \lim_{s\to\infty} I(m_s) = \lim_{s\to\infty} \int_\Omega (u_s - M m_s^2) dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega (u^* - M(m^*)^2) dx = I(m^*),$$

т.е. m^* — оптимальное управление. □

2. Необходимое условие оптимальности

Следующая теорема представляет собой основной результат работы и дает необходимые условия оптимальности для задачи (P) в форме вариационного неравенства.

Теорема 1. *Пусть* $m^* \in \mathcal{M}_-$ *— оптимальное управление в задаче* (P), u^* *— соответствующее решение краевой задачи* (1). *Предположим,*

$$\lambda_1(-\Delta - m^* + 2u^*) > 0.$$

Тогда существует решение p *сопряженной системы*

$$\begin{cases} -\Delta p = (m^* - 2u^*)p + 1, & x \in \Omega, \\ p = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

и для всех $m \in \mathcal{M}_-$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega (pu^* - 2Mm^*)(m - m^*)dx \leq 0. \tag{3}$$

Доказательство. Начнем с установления дифференцируемости по Гато целевого функционала. Пусть дано управление $l \in \mathcal{M}_-$; $\alpha \in \mathbb{R}$, а $h \in L^2(\Omega)$ таково что

$$h(x) \in [-a, a] \text{ п.в. } \Omega \text{ и } \int_\Omega h(x)dx = 0.$$

Заметим, что $l + \alpha h \in \mathcal{M}_-$. Обозначим $u = u(l)$ и $u_\alpha = u(l + \alpha h)$ соответствующие решения задачи Дирихле (1). Запишем приращение целевого функционала

$$\frac{I(l + \alpha h) - I(l)}{\alpha} = \int_\Omega \frac{u_\alpha - u}{\alpha}\, dx - M \int_\Omega \frac{(l + \alpha h)^2 - l^2}{\alpha}\, dx.$$

Обозначив через $w \in H_0^1(\Omega)$ производную оператора $m \mapsto u(m)$ по направлению h в точке l, т.е.

$$\frac{u_\alpha - u}{\alpha} \to w \text{ в } H_0^1(\Omega) \text{ при } \alpha \to 0. \tag{4}$$

Из сходимости

$$\int_\Omega \frac{(l + \alpha h)^2 - l^2}{\alpha} dx = \int_\Omega 2lhdx + \alpha \int_\Omega h^2 dx \to \int_\Omega 2lhdx \text{ при } \alpha \to 0,$$

ввиду определения (4), получим

$$\frac{I(l + \alpha h) - I(l)}{\alpha} \to \int_\Omega wdx - 2M \int_\Omega lhdx.$$

Используя предположение $\lambda_1(-\Delta - l) < 0$, по аналогии с [2] можно показать, что w есть решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta w = (l - 2u)w + hu, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Предположим, что $\lambda_1(-\Delta - l + 2u) > 0$. Тогда существует решение p линейной краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta p - (l-2u)p = 1, & x \in \Omega, \\ p = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Далее, заметим, что

$$\int_\Omega w dx = \int_\Omega 1 \cdot w dx = -\int_\Omega \Delta p w dx - \int_\Omega (l-2u) p w dx,$$

и, учитывая (5),

$$-\int_\Omega \Delta p w dx = \int_\Omega \langle \nabla p, \nabla w \rangle dx = -\int_\Omega p \Delta w dx =$$

$$= \int_\Omega p(l-2u) w dx + \int_\Omega p h u dx.$$

В результате,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{I(l+\alpha h) - I(l)}{\alpha} = \int_\Omega (pu - 2Ml) h dx.$$

В силу свойств интеграла и регулярности функций l, u, и p, функционал $h \mapsto \int_\Omega (pu - 2Ml) h dx$ линеен и непрерывен. Следовательно, целевой функционал I дифференцируем по Гато в любой точке $l \in \mathcal{M}_-$. При этом, производная Гато в точке l по направлению h дается формулой

$$\langle I'(l), h \rangle = \int_\Omega (pu - 2Ml) h dx. \tag{6}$$

Поскольку m^* есть точка максимума I, справедливо

$$\langle I'(m^*), m - m^* \rangle \leq 0 \quad \forall\, m \in \mathcal{M}_-. \tag{7}$$

Комбинируя (6) и (7), приходим к (3). □

Автор благодарит M. Delgado и A. Saurez (Институт математики университета г. Севилья, Испания) за предложенную постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] W. Ding, H. Finotti, Y. Lou, Q. Ye. *Optimal control of growth coefficient on a steady-state population model*: Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010. Vol. **11**, p. 688–704. ↑ 37, 38.

[2] A. Cañada, J. L. Gámez, J. A. Montero. *Study of an optimal control problem for diffusive nonlinear elliptic equations of logistic type*: SIAM J. Control Optim., 1998. Vol. **36(4)**, p. 1171–1189. ↑ 38, 41.

[3] K. Kurata, J. Shi. *Optimal spatial harvesting strategy and symmetry-breaking*: Appl. Math. Optim., 2008. Vol. **58(1)**, p. 89–110. ↑ 38.

[4] A. W. Leung, S. Stojanovic. *Optimal control for elliptic Volterra-Lotka type equations*: J. Math. Anal. Appl., 1993. Vol. **173**, p. 603–619. ↑ 38.

[5] A. W. Leung. Nonlinear systems of partial differential equations. Application to life and physical sciences: World Scientific Publishing, 2009. ↑ 38.

[6] J. A. Montero. *A uniqueness result for an optimal control problem on a diffusive elliptic Volterra-Lotka type equation*: J. Math. Anal. Appl., 2000. Vol. **243**, p. 13–31. ↑ 38.

[7] H. Berestycki, P. L. Lions. Some applications of the method of super and subsolutions, Vol. **782**. New York: Lecture Notes Math., Springer-Verlag, 1980. — 16–42 p. ↑ 38.

[8] D. Gilbarg, N. Trudinger. Elliptic partial differential equation of second order. Berlin: 2nd Ed., Springer-Verlag, 1983. ↑ 38.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. И. Гурман*

Об авторе:

Максим Владимирович Старицын

Старицын Максим Владимирович, м.н.с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134.

e-mail: starmax@icc.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

М. В. Старицын. *Об одной задаче оптимизации в стационарной популяционной модели логистического типа* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2014. Т. 5, № 5(23), с. 37–44.

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5_37-44.pdf

Maxim Staritsyn. *On optimal control of a stationary populational model of a logistic type.*

Abstract. We study optimal control problem for distribution of a biological population depending on distribution of nutrition of a given amount. The model is described by a nonlinear elliptic equation of logistic type with Dirichlet boundary conditions. The existence of an optimal solution is established. The main result is a proof of necessary optimality conditions. (*In Russian*).

Key Words and Phrases: elliptic partial differential equations, stationary populational models, optimal control, necessary optimality conditions.