

О. С. Иванова, С. А. Амелькин

## Экономическая эффективность продажи программного обеспечения при наличии пиратского рынка

**Аннотация.** В экономических системах достаточно хорошо изучены привычные нам виды ресурсов, такие как труд, капитал и прочие. Однако в последнее время информационные ресурсы набирают все большую популярность. В данной работе рассмотрена задача установления оптимальной цены для извлечения максимальной прибыли фирмой при продаже такого информационного ресурса как программное обеспечение. Рассматривалась экономическая система, состоящая из фирмы-продавца программного обеспечения и покупателей. При этом учитывалось два случая: продажа программного обеспечения при наличии и отсутствии теневого рынка. В обоих случаях были составлены уравнения баланса и получены условия оптимальности выбора цены продажи в зависимости от числа проданных экземпляров.

**Ключевые слова и фразы:** Математическая модель рынка информационных ресурсов с учетом недобросовестного поведения покупателей.

### Введение

Непосредственным контактом двух экономических агентов называется процесс купли-продажи товаров и услуг. Для материальных товаров и услуг этот процесс хорошо изучен [1]. Каждый из экономических агентов описывается запасами ресурсов и денег, а также функцией благосостояния, определяющей зависимости спроса и предложения товара. В зависимости от критерия оптимальности продавца (это может быть среднее значение прибыли, оценка стоимости запасов и пр.) можно найти закон изменения цен и запасов товара у каждого из агентов, такой, что в результате обмена достигается наибольшее значение выбранного критерия.

В последнее время, наряду с материальными ресурсами, все большее значение приобретают информационные, нематериальные, символические ресурсы. Информационные ресурсы имеют ряд особенностей, которые следует учитывать при решении задач оптимального управления бизнес-процессами.

В данной работе под информационными ресурсами мы будем подразумевать некий программный продукт, программное обеспечение (ПО).

Программное обеспечение представляет собой интеллектуальный товар, но в значительной степени отличается от других интеллектуальных товаров (прежде всего нематериальностью и идемпотентностью), программное обеспечение является не просто экономическим благом, оно может входить в интеллектуальный капитал организаций, являясь интеллектуальным средством труда. Особенности программного обеспечения как продукта серьезно влияют на процесс ценообразования [2].

По способу распространения ПО выделяют распространение на возмездной и безвозмездной основе, а также ПО, приобретенное легально и нелегально. Поэтому, при изучении закономерностей обмена информацией необходимо также учесть возможность недобросовестного поведения покупателей [3].

В данной работе рассмотрена задача установления такого закона цены ПО от времени, чтобы средний доход на единицу полученного потребителем ПО был максимален с учетом насыщения рынка и недобросовестного поведения покупателей (теневого рынка, пиратства).

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из разработчика ПО (продавца) и рынка, на котором реализуется данное ПО. Пусть продавец является единственным источником ПО, но покупатели имеют возможность копирования и дальнейшего распространения. Имеется рынок с заданным числом покупателей и один продавец. Обозначим через  $m$  число потенциальных покупателей, а через  $n$  — число тех, кто уже приобрел информационный товар.

Чем больше объем рынка, тем интенсивнее покупают товар у продавца — спрос растет, но и больше возможностей приобрести товар через бесплатные пиратские сети.

Продавец устанавливает цену на ПО. В соответствии с функцией спроса эта цена  $p$  определяет  $n$  так, что чем ниже цена на товар, тем большее число покупателей готовы его приобрести. При этом продавец стремится максимизировать свою доход, продав товар как можно дороже и как можно большему количеству покупателей за фиксированное время. Однако со временем приходится корректировать цену, т.к. по мере насыщения рынка спрос падает. Таким образом возникает задача: за заданное время  $\tau$  продать  $N$  экземпляров ПО с максимальной выручкой  $\Pi^*$  при наличии и отсутствии теневого рынка.

## 2. Формализация задачи

Функцию спроса, которую мы предполагаем известной, обозначим как:  $\dot{n}(p, n) > 0$ , где  $\dot{n}$  — поток продаж ПО, равный скорости увеличения числа покупателей, купивших ПО. Поток продаж зависит от цены  $p$  и от количества уже проданных копий  $n(t)$ . Обозначим  $\tau$  — продолжительность продаж.

При этом функцию спроса (интенсивность) легальных покупок запишем как

$$(1) \quad q(p, n) = \alpha \gamma (p_0 - p) (m - n).$$

Функция спроса (интенсивность) нелегальных покупок:

$$(2) \quad g(n) = \beta (1 - \gamma) (m - n),$$

где  $\gamma$  — доля легальных (добросовестных пользователей);  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности;  $\gamma (m - n)$  — неохваченный легальный рынок;  $(1 - \gamma) (m - n)$  — неохваченный нелегальный рынок.

При легальной продаже число проданных программ изменяется в соответствии с уравнением:

$$(3) \quad \frac{dn}{dt} = q(p, n), \quad n(0) = 0, \quad n(\tau) = N, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

При нелегальной продаже:

$$(4) \quad \frac{dn}{dt} = q(p, n) + g(n), \quad n(\tau) = N, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Рассмотрим теперь оба случая.

### 3. Отсутствие пиратских сетей

При отсутствии пиратских сетей  $\gamma = 1$ , следовательно, приобретение ПО нелегальным путем невозможно ( $g = 0$ ).

Прибыль определяется по формуле

$$(5) \quad \Pi = \int_0^{\tau} p(t)q(p, n)dt \rightarrow \max_p.$$

Поскольку  $\frac{dn}{dt} > 0$ , то можно заменить переменную интегрирования в целевом функционале. При этом задача сводится к изопериметрическому виду:

$$(6) \quad \Pi = \int_0^N p(n) dn \rightarrow \max_p.$$

При условии

$$(7) \quad \int_0^N \frac{dn}{q(p, n)} = \tau$$

решим задачу 6 методом Лагранжа

$$(8) \quad L = p(n) + \frac{\lambda}{q(p, n)} > \max_p \min_{\lambda},$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа.

Условия оптимальности при отсутствии ограничений на  $p$  и непрерывной и непрерывно дифференцируемой по  $p$  функции спроса приводят к требованию стационарности функции  $L$ :

$$(9) \quad \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\lambda \frac{\partial q}{\partial p}}{q^2(p, n)} = 0.$$

Далее вывод зависимости  $q(n)$  и  $p(n)$  проведем для линейной зависимости  $q(p)$  (1). В этом случае

$$\frac{\partial q}{\partial p} = -\alpha(m - n),$$

а условие (9) с учетом (1) имеет вид:

$$\frac{-\alpha(m - n)}{\alpha^2(p_0 - p(n))^2(m - n)^2} = \frac{1}{\lambda},$$

откуда:

$$(10) \quad p(n) = p_0 - \sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha(m-n)}}.$$

Подставив  $p(n)$  в (1), найдем  $q$ :

$$(11) \quad q(n) = \sqrt{-\alpha\lambda(m-n)}.$$

С учетом (11) выразим из (7) величину неопределенного множителя  $\lambda$ .

Обозначим

$$S(N) = \int_0^N \frac{dn}{\sqrt{m-n}} = 2(\sqrt{m} - \sqrt{m-N}).$$

$$(12) \quad \int_0^N \frac{dn}{\sqrt{-\alpha\lambda(m-n)}} = \frac{S(N)}{\sqrt{-\alpha\lambda}} = \tau.$$

Подставив (12) в (10) и (11), найдем оптимальную цену и интенсивность легальных покупок. Найденное решение показано на рис. 1 и 2.

$$(13) \quad p^*(n) = p_0 - \frac{S(N)}{\alpha\tau} \sqrt{\frac{1}{m-n}}.$$

Так как  $p(n) > 0$ , на продолжительность процесса вводится ограничение:

$$\frac{S(N)}{\alpha\tau} \sqrt{\frac{1}{m-n}} < p_0, \quad \tau > \tau_0 = \frac{S(N)}{\alpha p_0} \sqrt{\frac{1}{m-n}},$$

то есть при параметрах функции спроса  $\alpha, p_0$  количество товара  $n$  нельзя продать быстрее, чем за время  $\tau_0$ .

Тогда

$$(14) \quad q^*(n) = \frac{S(N)}{\tau} \sqrt{m-n}.$$

С учетом (14) найдем прибыль:

$$(15) \quad \Pi^* = \int_0^N \left( p_0 - \frac{S(N)}{\alpha\tau} \sqrt{\frac{1}{m-n}} \right) dn = p_0 N + \frac{2S(N)}{\alpha\tau} (\sqrt{m-n} - \sqrt{m}).$$

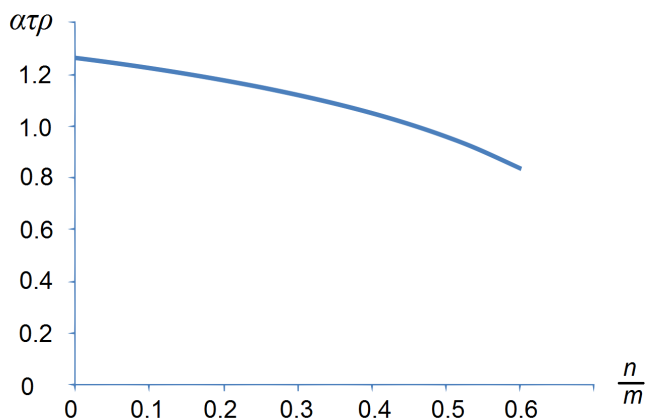


Рис. 1. Зависимость оптимальной цены от числа проданных программ

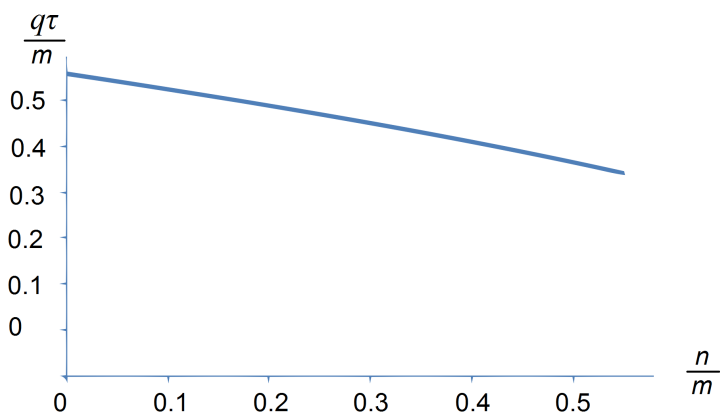


Рис. 2. Зависимость функции спроса от числа проданных программ

Для иллюстрации полученных результатов удобно воспользоваться безразмерными показателями, характеризующими изменение

цены и интенсивности продаж:

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} &— \text{доля рынка, в которой реализовано ПО,} \\ \alpha\tau p &— \text{цена продаж, приведенная к безразмерному виду,} \\ \frac{q\tau}{m} &— \text{интенсивность продаж.} \end{aligned}$$

На рис. 1, 2 показаны оптимальные зависимости этих безразмерных характеристик.

#### 4. Наличие пиратских сетей

Предполагаем, что доля добросовестных покупателей постоянна и не зависит ни от времени, ни от количества проданного ПО.

При наличии пиратских сетей функция спроса определяется как:

$$\frac{dn}{dt} = q + g, \quad n(\tau) = N, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Прибыль определяется как:

$$(16) \quad \Pi = \int_0^\tau p(t)q(p, n)dt \rightarrow \max_p.$$

Поскольку  $\frac{dn}{dt} > 0$ , то можно заменить переменную интегрирования в целевом функционале. При этом задача сводится к изопериметрическому виду:

$$(17) \quad \Pi = \int_0^N \frac{p(t)q(p, n)}{q(p, n) + g(n)} dn \rightarrow \max_p$$

при условии  $\int_0^N \frac{dn}{q(p, n) + g(n)} = \tau.$

Решим задачу (16) методом Лагранжа:

$$(18) \quad L = \frac{pq(p, n)}{q(p, n) + g(n)} + \frac{\lambda}{q(p, n) + g(n)} \rightarrow \max_p \min_\lambda.$$

Условия оптимальности при отсутствии ограничений на  $p$  и непрерывной и непрерывно дифференцируемой по  $p$  функции спроса приводят к требованию стационарности функции  $L$ :

$$L = \frac{pq(p, n) + \lambda}{q(p, n) + g(n)} > \max_p \min_\lambda,$$

$$(19) \quad \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{q(q(p, n) + g(n)) + \frac{\partial q}{\partial p}(pg(n) - \lambda)}{q(p, n) + g(n)} = 0,$$

откуда получим условия оптимальности выбора цены продажи в зависимости от числа  $n$  проданных экземпляров и с учетом пиратства:

$$\frac{q^2(p, n) + q(p, n)g(n)}{\frac{\partial q}{\partial p}} + pg(n) = \lambda.$$

С учетом (1) и (2) получим:

$$(20) \quad \Delta p = \frac{1}{\alpha\gamma} \sqrt{\beta^2(1-\gamma)^2 + \alpha\gamma\mu(n)} - \frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha\gamma},$$

где

$$\Delta p = p_0 - p, \quad \mu(n) = -\frac{\lambda}{m-n} + p_0\beta(1-\gamma).$$

С учетом (20) и (1) выразим  $q(n)$ :

$$(21) \quad q(n, \lambda) = \sqrt{\beta^2(1-\gamma)^2 + \alpha\gamma\mu(n)(m-n)} - \beta(1-\gamma)(m-n).$$

С учетом (2) получаем

$$(22) \quad q + g = (m-n) \sqrt{\beta^2(1-\gamma)^2 + \alpha\gamma\mu(n)},$$

тогда (17) запишется в виде

$$\int_0^N \frac{dn}{(m-n) \sqrt{\beta^2(1-\gamma)^2 + \alpha\gamma\mu(n)}} = \tau.$$

Интеграл в левой части этого неравенства представляет собой функцию параметров  $m, N, \lambda$  вида  $S_2(m, N, \lambda)$ .

Уравнение  $S_2(m, N, \lambda) = \tau$  может быть решено только численно.



## 5. Заключение

Наличие пиратских сетей существенно влияет на ценовую политику фирмы. В условиях единственного критерия — получаемой прибыли, возможности деятельности фирмы ограничиваются степенью влияния  $\gamma$  пиратского рынка. Тем не менее, пиратские рынки позволяют фирмам быстрее распространять продукцию, увеличивать долю контролируемого их продукцией рынка. Поэтому роль пиратского рынка не может быть призвана однозначно деструктивной, анализ возможностей фирмы в условиях открытого информационно-обмена представляется весьма актуальным.

### Список литературы

- [1] Цирлин А. М., *Оптимизационная термодинамика экономических систем*, Научный мир, М., 2011 ↑ 45.
- [2] Соловьев В. И., *Стратегия и тактика конкуренции на рынке программного обеспечения : Опыт экономико-математического моделирования*, Вега инфо, М., 2010 ↑ 46.
- [3] Аглицкий И. С., «Российский рынок программ. Итоги 1993 года», *Независимая газета*, 1994, 5 января ↑ 46.

Об авторах:



#### Ольга Сергеевна Иванова

аспирант, инженер Исследовательского центра медицинской информатики. Круг научных интересов: исследования ресурсообмена в макросистемах.

e-mail:

[olety@yandex.ru](mailto:olety@yandex.ru)



#### Сергей Анатольевич Амеликин

к.т.н., Руководитель Исследовательского центра системного анализа. Круг научных интересов: исследования ресурсообмена в макросистемах различной природы: тепло- и массообмена в термодинамических системах, товарообмена и процесса передачи информации в экономических системах где максимальная эффективность зависит от продолжительности и средней интенсивности процессов ресурсообмена.

e-mail:

[sam@sam.botik.ru](mailto:sam@sam.botik.ru)

*Образец ссылки на эту публикацию:*

О. С. Иванова, С. А. Амелькин. *Экономическая эффективность продажи программного обеспечения при наличии пиратского рынка // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн.* 2014. Т. 5, № 5(23), с. 45–54.

URL [http://psta.psiras.ru/read/psta2014\\_5\\_45-54.pdf](http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5_45-54.pdf)

Sergey Amelkin, Olga Ivanova. *Economic efficiency of software sales in the presence of pirate market.*

ABSTRACT. In economic systems familiar to us kinds of resources such as labor, capital and other have been well studied. Recently, however, information resources are gaining increasing popularity. In this paper we consider the problem of optimal pricing for maximum profit by the sale of such information as a resource software. Economic system consisting of firm - software vendor and buyers is considered here. Thus consider two cases: software sales in the presence and absence of the black market. The balance equation and obtain conditions for optimal choice of the purchase price depending on the number of copies sold were composed in both cases. (*in Russian*).

*Key Words and Phrases:* economic systems, demand function, information resources.