ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 5(23), 2014, с. 79–96

УДК 681.31

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин

Методы идентификации динамических систем

Аннотация. Дан обзор методов идентификации систем, описываемых линейными интегральными уравнениями и линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (обыкновенными и в частных производных). Обзор подготовлен по публикациям авторов.

Ключевые слова и фразы: динамические системы, импульсная переходная функция, системы с распределенными параметрами, обобщенная теорема Бореля, дифференциальные уравнения, частные производные, переменные коэффициенты.

Введение

В настоящее время задачи идентификации параметров динамических систем являются одними из важнейших задач техники. Им посвящено большое чило работ. Большинство работ посвящено стационарным системам с сосредоточенными параметрами. Значительно меньше работ посвящено идентификации динамических систем и систем с распределенными параметрами, причем в большинстве этих работ рассматриваются приближенные методы. Отметим здесь работы авторов [**1**, **2**]. Обширная библиография по методам идентификации приведена в [**3**].

Имеется два подхода к идентификации систем:

1. Определение импульсной переходной функции, которая позволяет оценить качество системы как в переходном, так и в установившемся режимах. Под качеством системы понимаются следующие характеристики [**3**]: время перерегулирования (время переходного процесса); перерегулирование; статистическое отклонение; частота колебаний процесса; время установления; декремент затухания.

2. Определение параметров систем, что позволяет на этапе проектирования найти оптимальные параметры системы относительно выбранных критериев качества.

В работе дан обзор разработанных авторами методов идентификации систем. Основное внимание уделяется линейным системам с переменными параметрами.

1. Идентификция линейных динамических систем методом интегральных преобразований

Актуальной является задача определения динамических характеристик систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями Вольтерры

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{1}$$

Это обусловлено тем, что уравнениями (1) моделируются многочисленные проблемы физики, физической химии и техники (см. например [3–5]). Выше отмечалось, что в большинстве работ по идентификации рассматриваются приближенные методы. Поэтому представляет интерес получение решения в аналитической форме.

Обозначим $X(p)$, $Y(p)$ изображения Лапласа функций $x(t)$, $f(t)$. Построение метода идентификации опирается на следующее утверждение.

Теорема 1. [6, 7]. *Пусть изображение импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ по переменной t имеет вид*

$$G(p,\tau) = \int_0^\infty g(t,\tau)e^{-pt}dt = \hat{G}(p)e^{-\tau q(p)}, \tag{2}$$

где $\hat{G}(p), q(p)$ - аналитические функции в области комплексной переменной p, определяемой неравенством $Re(p) > \sigma_0$. Тогда изображения Лапласа уравнения (1) определяется формулой

$$\hat{G}(p)X(q(p)) = F(p).$$

Воспользовавшись данной формулой, построим алгоритм определения импульсной переходной функции под двум тестовым сигналам.

Пусть функция $G(p,\tau)$ представима в виде $G(p,\tau) = e^{-\tau q(p)}\hat{G}(p)$. Обозначим преобразование Лапласа функций $x(t)$ и $f(t)$ через $X(p)$ и $F(p)$, соответственно. Будем считать, что функции $q(p)$ и $G(p)$ аналитические при $p > \sigma_0$.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два линейно-независимых входных сигнала. Тогда

$$\int_0^t g(t,\tau)x_i(\tau)d\tau = f_i(t),\, i = 1, 2. \tag{3}$$

Изображение системы интегральных уравнений (3) по теореме 1 приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \hat{G}(p)X_1(q(p)) = & F_1(p), \\ \hat{G}(p)X_2(q(p)) = & F_2(p) \end{cases} \tag{4}$$

с неизвестными функциями $\hat{G}(p)$ и $q(p)$. Решая систему (4) относительно этих функций, находим $\hat{G}(p)$ и $q(p)$. Функция $g(t,\tau)$ находится по формуле Бромвича:

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt}G(p,\tau)dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt}\hat{G}(p)e^{-\tau q(p)}dp.$$

В работе [6] приведен ряд примеров, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

2. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами

Линейные системы с переменными параметрами, на входе которых действует сигнал $x(t)$, а на выходе — сигнал $y(t)$, моделируются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)y(t) = x(t), \tag{5}$$

где $a_n(t), a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ — коэффициенты, зависящие от времени.

Большой класс задач идентификации связан с определением коэффициентов дифференциального уравнения (5). Этому вопросу посвящен ряд работ [3, 8].

Общие методы определения коэффициентов $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, …, $a_0(t)$ системы по известной импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ авторам неизвестны. Ниже достаточно общий метод определения параметров $a_n(t), a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ измерительной системы, описываемой уравнением (5), по известной импульсной переходной функции, описан, следуя работе авторов [2].

Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида (5), импульсная переходная функция определяется выражением [**3**, **4**, **8**]:

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t). \tag{6}$$

Постановка задачи 1. *Известна импульсная переходная функция $g(t,\tau)$ измерительного преобразователя (5), определяемая формулой (6). Требуется найти параметры системы $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, …, $a_0(t)$.*

Решение. Определим (аналитическим или численным методами) по заданной функции $g(t,\tau)$ измерительного преобразователя (5) виртуальные входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_{n+1}(t)$ такие, чтобы им соответствовали виртуальные выходные сигналы, составляющие систему линейно независимых функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{n+1}(t)$.

Определим искомые входные сигналы $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n+1}(t)$ из решения интегральных уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t g(t,\tau)x_1(\tau)d\tau = \varphi_1(t), \\ \qquad \cdots \\ \displaystyle\int_0^t g(t,\tau)x_{n+1}(\tau)d\tau = \varphi_{n+1}(t). \end{cases} \tag{7}$$

Решая систему (7), находим для каждого виртуального выходного сигнала $\varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n+1$, соответствующий виртуальный входной сигнал $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Подставляя $\varphi_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ в (5), приходим к системе уравнений относительно $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$

$$\begin{cases} a_n(t)\varphi_{n+1}^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\varphi_{n+1}(t) = x_{n+1}(t); \\ a_n(t)\varphi_n^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi_n^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\varphi_n(t) = x_n(t); \\ \qquad \cdots \\ a_n(t)\varphi_1^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\varphi_1(t) = x_1(t), \end{cases} \tag{8}$$

решая которую находим $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$.

В частности, если в качестве линейно-независимых функций выступают функции $y_1(t) = 1(t)$, $y_2(t) = t, \ldots, y_{n+1}(t) = t^n$, то при $t > 0$

система уравнений решается аналитически и решение примет вид

$$\begin{aligned} a_0(t) =& x_1(t); \\ a_1(t) =& x_2(t) - a_0(t)t; \\ &\dots \\ a_n(t) =& \frac{1}{n!}\left(x_{n+1}(t) - n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot 2a_{n-1}(t)t - \ldots - a_0(t)t^n\right). \end{aligned}$$

Таким образом, располагая функцией $g(t,\tau)$, вычисляем коэффициенты уравнения (5). □

В работе [2] приведен ряд примеров, иллюстрирующих эффективность метода.

3. Идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами

Одной из математических моделей динамических систем с распределенными параметрами является дифференциальное уравнение в частных производных [4]. Известно [4, 5], что решение дифференциального уравнения в частных производных можно выразить через функцию Грина формулой

$$y(x,t) = \int_{t_0}^{t}\int_D G(x,\xi,t,\tau)w(\xi,t)d\xi d\tau, \tag{9}$$

где t – переменная времени; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$; $D \subset R_n$; $w(\xi,\tau)$ — входной сигнал; $y(x,t)$ — выходной сигнал; $G(x,\xi,t,\tau)$ — функция Грина, которая является импульсной переходной функцией или функцией влияния системы.

Опишем метод идентификации динамических систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями вида

$$\begin{aligned} &y(t, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \int_0^t\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_n} g(t,\tau,x_1,\xi_1,\dots,x_n,\xi_n)w(\tau,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)d\tau d\xi_1\dots d\tau_n, \end{aligned} \tag{10}$$

где $w(t,x_1,x_2,\dots,x_n), y(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ — входной и выходной сигналы системы; $g(t,\tau,x_1,\xi_1,\dots,\xi_n)$ — импульсная переходная функция.

Алгоритм идентификации основан на следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть изображение Лапласа импульсной переходной функции* $g(t_1, t_2, \ldots, t_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *по переменным* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *удовлетворяет условию*

$$
\begin{aligned}
(11)\quad & G(p_1, p_2, \ldots, p_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \\
& = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(t_1, t_2, \ldots, t_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \times \\
& \times e^{-(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \cdots + p_n t_n)} dt_1 dt_2 \ldots dt_n = \\
& = \hat{G}(p_1, p_2, \ldots, p_n) e^{-(\tau_1 q_1(p_1) + \tau_2 q_2(p_2) + \cdots + \tau_n q_n(p_n))},
\end{aligned}
$$

где $\hat{G}(p_1, p_2, \ldots, p_n), q_1(p_1), q_2(p_2), \ldots, q_n(p_n)$ — *аналитические функции в области* $\mathrm{Re}\,(p_k) > \sigma_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда изображение Лапласа уравнения

$$
\begin{aligned}
(12)\quad & y(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\
& = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(t_1, t_2, \ldots, t_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \times \\
& \times x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n
\end{aligned}
$$

имеет вид

$$
(13)\quad Y(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \hat{G}(p_1, p_2, \ldots, p_n) X(q_1(p_1), q_2(p_2), \ldots, q_n(p_n)),
$$

где $Y(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — *изображение Лапласа функции* $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *и* $X(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — *изображение* $x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Доказательство. Найдем изображение уравнения (12) по переменным t_1, t_2,…,t_n:

$$
\begin{aligned}
(14)\quad & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty y(t_1, \ldots, t_n) e^{-(p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n)} dt_1 \ldots dt_n = \\
& = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \times \right. \\
& \left. \times x(\tau_1, \ldots, \tau_n) e^{-(p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n \right) dt_1 \ldots dt_n.
\end{aligned}
$$

Меняя порядок интегрирования в правой части интеграла (14) и учитывая (11), получим

$$
\begin{aligned}
(15)\quad & Y(p_1,\ldots,p_n) = \\
&= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x(\tau_1,\ldots,\tau_n) \times \left(\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(t_1,\ldots,t_n,\tau_1,\ldots,\tau_n) \times \right. \\
&\qquad \left. \times e^{-(p_1t_1+\cdots+p_nt_n)} dt_1 \ldots dt_n \right) d\tau_1 \ldots d\tau_n = \hat{G}(p_1,\ldots,p_n) \times \\
&\qquad \times \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x(\tau_1,\ldots,\tau_n) e^{-(\tau_1 q_1(p_1)+\cdots+\tau_n q_n(p_n))} d\tau_1 \ldots d\tau_n,
\end{aligned}
$$

откуда следует равенство

$$
(16)\quad Y(p_1,p_2,\ldots,p_n) = \hat{G}(p_1,p_2,\ldots,p_n) X(q_1(p_1),q_2(p_2),\ldots,q_n(p_n)).
$$

$\square$

Следствие 1. *Пусть система описывается уравнением* (10), *и импульсная переходная функция* $g(t,\tau,x_1,\xi_1,\ldots,x_n,\xi_n)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1. Условию физической реализуемости:

$$
(17)\qquad g(t,\tau,x_1,\xi_1,\ldots,x_n,\xi_n) = 0 \text{ при } (t,\tau,x_1,\xi_1\ldots,x_n,\xi_n) \notin D,
$$

где

$$
D = \{(t,\tau,x_1,\xi_1,\ldots,x_n,\xi_n) : 0 \le \tau < t, 0 < \xi_1 < x_1,\ldots,0 < \xi_n < x_n,\};
$$

2. Её преобразование Лапласа по переменным $t,x_1,\ldots,x_n$ *удовлетворяет условию*

$$
\begin{aligned}
(18)\quad & G(p,\tau,p_1,\xi_1\ldots,p_n,\xi_n) = \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(t,\tau,x_1,\xi_1,\ldots,x_n,\xi_n) \times \\
&\qquad\qquad \times e^{-(pt+p_1x_1+\cdots+p_nx_n)} dt dx_1 \ldots dx_n = \\
&\qquad\qquad\qquad = \hat{G}(p,p_1,\ldots,p_n) e^{-(\tau q(p)+\xi_1 q_1(p_1)+\cdots+\xi_n q_n(p_n))},
\end{aligned}
$$

где $\hat{G}(p,p_1,\ldots,p_n), q(p), q_1(p_1),\ldots,q_n(p_n)$ *— аналитические функции в области* $\mathrm{Re}\,(p_k) > \sigma_k, k = 0,1,2,\ldots,n$.

Тогда изображение Лапласа уравнения (10) *будет иметь вид*

$$
(19)\qquad Y(p,p_1,\ldots,p_n) = \hat{G}(p,p_1,\ldots,p_n) W(q(p),q_1(p_1),\ldots,q_n(p_n)).
$$

Замечание 1. *Отсюда при* $n = 1$ *следует теорема Бореля* [7], *применение которой к идентификации одномерных систем рассмотрено в работе* [6]. *Для случая* $n = 2$ *идентификация динамических систем с распределенными параметрами расмотрена в работе* [9].

Постановка задачи 2. *Требуется по известным* $n+2$ *входным сигналам* $x_k(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n+2$, *и соответствущим* $n+2$ *выходным сигналам* $y_k(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n+2$, *определить импульсную переходную функцию системы* (10).

Решение. При известных $n + 2$ входных сигналах

$$w_k(t, x_1, \ldots, x_n), \; k = 1, 2, \ldots, n+2$$

и соответствующих $n + 2$ выходных сигналах

$$y_k(t, x_1, \ldots, x_n), \; k = 1, 2, \ldots, n+2,$$

динамической системы (10), получим систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} y_k(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ = \int_0^t \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} g(t, \tau, x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n)\, w_k(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) d\tau d\xi_1 \ldots d\xi_n, \\ k = 1, 2, \ldots, n+2, \end{gathered} \tag{20}$$

относительно искомой функции $g(t, \tau, x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n)$.

Пусть функция $g(t, \tau, x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n)$ удовлетворяет условиям (17), (18). Тогда изображением системы интегральных уравнений (20) будет система алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} Y_k(p, p_1, \ldots, p_n) = \hat{G}(p, p_1, \ldots, p_n) W_k(q(p), q_1(p_1), \ldots, q_n(p_n)), \\ k = 1, 2, \ldots, n+2. \end{gathered} \tag{21}$$

Решая систему (21) относительно искомых функций $\hat{G}(p, p_1, \ldots, p_n)$, $q(p)$, $q_1(p_1)$, $\ldots$, $q_n(p_n)$, найдем изображение импульсной переходной функции в виде

$$\begin{gathered} G(p, p_1, \ldots, p_n, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\ = \hat{G}(p, p_1, \ldots, p_n) e^{-(\tau q(p) + \xi_1 q_1(p_1) + \cdots + \xi_n q_n(p_n))}. \end{gathered} \tag{22}$$

Импульсную переходную фукнкцию определим как обратное преобразование Лапласа по переменным p, p_1, $\ldots$, p_n. □

4. Параметрическая идентификация динамических систем с распределенными парметрами

В разделе 2 описаны методы определения переменных коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном разделе эти результаты распространяются на дифференциальные уравнения с частными производными. Раздел написан по материалам работ [9, 10].

Рассмотрим динамические системы, описываемые параболическими уравнениями

$$a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{23}$$

с начальными условиями $u(x,0) = 0$ и краевыми условиями $u(0,t) = 0$, и гиперболическими уравнениями

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + b(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{24}$$

с начальными условиями $u(x,0) = 0$ и краевыми условиями $u(0,t) = 0$.

Здесь $f(x,t)$ — входной сигнал, $u(x,t)$ — выходной сигнал, $a(x,t)$ и $b(x,t)$ — параметры системы.

Опишем метод определения коэффициентов динамической системы на примере уравнения (23). Воспользовавшись методом, описанным в разделе 3, определим импульсную переходную функцию $g(x,\xi,t,\tau)$ динамической системы (23). Для системы (23) входной и выходной сигналы связаны уравнением [4, 5]:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^x g(x,\xi,t,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau. \tag{25}$$

Возьмем два линейно-независимых виртуальные сигнала $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Используя соотношение (25), составим два интегральных уравнения для определения соответствующих виртуальных входных сигналов $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \int_0^t \int_0^x g(x,\xi,t,\tau) f_1(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \\ u_2(x,t) &= \int_0^t \int_0^x g(x,\xi,t,\tau) f_2(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{26}$$

из решения которых найдем виртуальные сигналы $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$.

Подставляя $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ в (23), получим систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $a(x,t)$ и $b(x,t)$:

$$\begin{cases} a(x,t)\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + b(x,t)\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = f_1(x,t), \\ a(x,t)\dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} + b(x,t)\dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = f_2(x,t). \end{cases} \tag{27}$$

Решая систему (27), находим искомые коэффициенты $a(x,t)$ и $b(x,t)$. Это решение принимает более простой вид, если в качестве виртуальных выходных сигналов взять

$$u_1(x,t) = \varphi_1(t) \text{ и } u_2(x,t) = \varphi_2(x).$$

Тогда коэфффициенты уравнения (23) будут равны

$$a(x,t) = \frac{f_1(x,t)}{\varphi_1'(t)}, \ b(x,t) = \frac{f_1(x,t)}{\varphi_2''(x)}. \tag{28}$$

Для уравнения (24) искомые коэффициенты определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a(x,t)\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} + b(x,t)\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = f_1(x,t), \\ a(x,t)\dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} + b(x,t)\dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = f_2(x,t). \end{cases} \tag{29}$$

В случае, когда $u_1(x,t) = \varphi_1(t)$ и $u_2(x,t) = \varphi_2(x)$, то

$$a(x,t) = \frac{f_1(x,t)}{\varphi_1''(t)}, \ b(x,t) = \frac{f_1(x,t)}{\varphi_2''(x)}. \tag{30}$$

5. Эредитарные системы

При исследовании многих динамических систем возникает задача учета последействий, когда система описывается не только мгновенными значениями ее составляющих, но и состоянием системы в предшествующие промежутки времени. Подобные последействия в последнее время активно исследуются в различных разделах техники, физики, экологии и биологии и получили общее название эредитарных. Подробное изложение теории и основные приложения эредитарных процессов содержатся в книгах [**11–13**].

В большинстве известных публикаций решается прямая задача — исследование динамического процесса при известных параметрах. Авторам неизвестны работы, в которых исследуется идентификация систем, описываемых уравнениями с дробными производными. Этому вопросу посвящен данный раздел.

5.1. Параметрическая идентификация эредитарных систем с сосредоточенными параметрами

Рассмотрим динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с дробными производными

$$\sum_{k=1}^{n} A_k D_{0t}^{\alpha_k} y = x(t) \tag{31}$$

и с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha_k - j} y = b_{kj}, k = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m_k; m_k = [\alpha_k] + 1. \tag{32}$$

Здесь [**12**]

$$D_{0t}^{\alpha_k} y = \frac{1}{\Gamma(m_k - \alpha_k)} \frac{d^{m_k}}{dt^{m_k}} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_k - m_k + 1}} d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Будем считать, что параметры системы удовлетворяют условиям $\alpha_k > 0, m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k$, $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Постановка задачи 3. *Требуется, зная входной $x(t)$ и соответствующий выходной $y(t)$ сигналы системы, найти ее параметры $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Решение. Решение поставленной задачи основано на применении метода наименьших квадратов для минимизации в спектральной области функционалов от полиномов с неизвестными коэффициентами и дробными показателями.

Учитывая, что преобразование Лапласа для производной дробного порядка имеет вид [**12**]

$$L\left[D_{0t}^{\alpha} y(t)\right] = p^{\alpha} Y(p) - \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1},$$

где $Y(p) = \int_0^{+\infty} y(t) e^{-pt} dp$ — преобразование Лапласа функции $y(t)$, определенное в области $\operatorname{Re} p > \sigma$, в которой функция $Y(p)$ является аналитической; $b_j = D_{0t}^{\alpha - j} y$, $j = 1, 2, \ldots, n, n = [\alpha] + 1$, — значения производных соответствующего порядка функции $y(t)$ при $t = 0$.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (31) с начальными условиями (32), получим

$$Y(p)\sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} = X(p).$$

Отсюда, при значениях p таких, что $Y(p) \neq 0$ и $\operatorname{Re} p > \sigma$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1}}{Y(p)} + \frac{X(p)}{Y(p)}. \tag{33}$$

Эта формула положена в основу алгоритма определения параметров α_k, A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Постановка задачи 4 (Общий случай). *Требуется, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (31) с начальными условиями (32), найти дробные показатели α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и коэффициенты $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Решение. Воспользовавшись выражением (33), введем функционал

$$\Phi(B_1, B_2, \ldots, B_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} B_k p^{\beta_k} - \frac{\sum_{k=1}^{n} B_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1}}{Y(p)} - \frac{X(p)}{Y(p)} \right)^2$$

с неизвестными параметрами $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, которые найдем из условия минимума функционала

$$\Phi(B_1, B_2, \ldots, B_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \to \min.$$

Необходимым условием минимума функционала

$$\Phi(B_1, B_2, \ldots, B_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

является решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial B_j} = 0, & j = 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_j} = 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Из этого условия получаем систему уравнений для определения искомых параметров $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, далее находим приближенные значения искомых неизвестных A_1, $A_2, \ldots, A_n$, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. $\square$

В работе авторов [**14**] приведены примеры, реализующие предложенный метод.

5.2. Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами

Рассматриваются динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка

$$A\partial_{ot}^{\alpha}u(t,x) = B\partial_{ox}^{\beta}u(t,x) + g(t,x), t \in [0,\infty), t \in [0,\infty) \tag{34}$$

с начальными

$$\partial_{ot}^{\alpha}u(0,x) = a_k(x), k = 1,2,\ldots,m = [\alpha]+1, \tag{35}$$

и краевыми условиями

$$\partial_{ot}^{\beta}u(t,0) = b_k(t), k = 1,2,\ldots,n = [\beta]+1. \tag{36}$$

Постановка задачи 5. *Требуется, зная входной сигнал $g(t,x)$, выходной сигнал $u(t,x)$ для системы (34) с начальными и краевыми условиями (35), (36), найти ее параметры A, B, α, β.*

Решение. Решение поставленной задачи основано на применении метода наименьших квадратов для минимизации в спектральной области функционалов от полиномов с неизвестными коэффициентами и дробными показателями.

Отметим, что преобразование Лапласа для производной дробного порядка имеет вид [**13**]:

$$L\left[D_{0t}^{\alpha}y(t)\right] = p^{\alpha}Y(p) - \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1},$$

где

$$Y(p) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-pt}dp$$

— преобразование Лапласа функции $y(t)$, определенное в области $\operatorname{Re} p > \sigma$, в которой функция $Y(p)$ является аналитической, $b_j = D_{0t}^{\alpha-j}y$, $j = 1,2,\ldots,n$; $n = [\alpha]+1$ — значения производных соответствующего порядка функции $y(t)$ при $t = 0$.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (34) с начальными и краевыми условиями (35), (36) по переменным t, x, в предположении, что $U(p_1, p_2) \neq 0$, получим

$$Ap_1^{\alpha} - Bp_2^{\beta} = \frac{A\left(p_1^{m-1}a_1\left(p_2\right) + \cdots + a_m\left(p_2\right)\right)}{U\left(p_1, p_2\right)} - \\ - \frac{B\left(p_2^{n-1}b_1\left(p_1\right) + \cdots + b_n\left(p_1\right)\right) - G\left(p_1, p_2\right)}{U\left(p_1, p_2\right)}.$$

Пусть функции $G(p_1, p_2), U(p_1, p_2)$ удовлетворяют условиям:

- $G(p_1, p_2)$ — аналитическая при $\mathrm{Re}\, p_1 \geq c_1$, $\mathrm{Re}\, p_2 \geq c_1'$,
- $U(p_1, p_2)$ — аналитическая при $\mathrm{Re}\, p_1 \geq c_1$, $\mathrm{Re}\, p_2 \geq c_1'$,
- $U(p_1, p_2) \neq 0$ при $\mathrm{Re}\, p_1 \in [a, b]$, $\mathrm{Re}\, p_2 \in [c, d]$,

где сегмент $[a, b]$ расположен в области $[c, +\infty)$, $c = \max(c_1, c_2)$, а сегмент $[c, d]$ расположен в области $[c', +\infty)$, $c' = \max(c_1', c_2')$.

Пусть область $D = [a, b] \times [c, d]$. Введем сетку узлов $(t_i, \tau_j) \in D$:

$$\begin{aligned} t_i &= a + \frac{b-a}{M} i, \quad i = 1, 2, \ldots, M, \\ \tau_j &= c + \frac{d-c}{N} j, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

В области D введем функционал

$$\Phi\left(A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1\right) = \\ = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \left(A_1 t_i^{\alpha_1} - B_1 \tau_j^{\beta_1} - \frac{A_1\left(t_i^{m-1}a_1\left(\tau_j\right) + \cdots + a_m\left(\tau_j\right)\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)} + \right. \\ \left. + \frac{B_1\left(\tau_j^{m-1}b_1\left(t_i\right) + \cdots + b_n\left(t_i\right)\right) + G\left(t_i, \tau_j\right)}{U\left(t_i, \tau_j\right)} \right)^2.$$

Параметры $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1$ находятся методом наименьших квадратов из условия минимума функционала $\Phi\left(A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1\right) \to \min$.

Из необходимого условия минимума функционала имеем систему:

$$
\begin{cases}
A_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_1^2 (t_i, \tau_j) - B_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_2 (t_i, \tau_j) \varphi_1 (t_i, \tau_j) - \\
\qquad - \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \dfrac{G (t_t, \tau_j)}{U (t_i, \tau_j)} \varphi_1 (t_i, \tau_j) = 0, \\
\\
A_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_1 (t_i, \tau_j) \varphi_2 (t_i, \tau_j) - B_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_2^2 (t_i, \tau_j) - \\
\qquad - \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \dfrac{G (t_t, \tau_j)}{U (t_i, \tau_j)} \varphi_2 (t_i, \tau_j) = 0, \\
A_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_1 (t_i, \tau_j) t_i^{\alpha_1} \ln (t_i) - B_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_2 (t_i, \tau_j) t_i^{\alpha_1} \ln (t_i) - \\
\qquad - \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \dfrac{G (t_t, \tau_j)}{U (t_i, \tau_j)} t_i^{\alpha_1} \ln (t_i) = 0, \\
A_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_1 (t_i, \tau_j) t_i^{\beta_1} \ln (t_i) - B_1 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \varphi_2 (t_i, \tau_j) t_i^{\beta_1} \ln (t_i) - \\
\qquad - \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \dfrac{G (t_t, \tau_j)}{U (t_i, \tau_j)} t_i^{\beta_1} \ln (\tau_i) = 0,
\end{cases}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 (t, \tau) =& t^{\alpha_1} - \frac{t^{m-1} a_1 (\tau) + \cdots + a_m (\tau)}{U (t, \tau)}, \\
\varphi_2 (t, \tau) =& t^{\beta_1} - \frac{\tau^{n-1} b_1 (t) + \cdots + b_n (t)}{U (t, \tau)}.
\end{aligned}
$$

Решая данную систему относительно неизвестных $A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1$, получим приближенные значения искомых параметров A, B, α, β. □

В работе авторов [**15**] приведены примеры, реализующие предложенный метод.

6. Идентификация нелинейных систем

В данном разделе кратко перечисляется ряд результатов авторов по идентификации нелинейных систем:

- идентификация нелинейных систем с запаздыванием исследована в [16];
- идентификация нелинейных систем, описываемых интегральными уравнениями, рассмотрена в [17];
- приближенным методам идентификации нелинейных систем, по серии входных тестовых сигналов посвящена работа [18];
- в работе [19] предложен метод восстановления входных сигналов нелинейных систем.

Список литературы

[1] И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, «Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами», *Измерительная техника*, 2000, № 9, с. 29–33 ↑ 79.

[2] И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, «Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами», *Измерительная техника*, 2013, № 4, с. 6–10 ↑ 79, 81, 83.

[3] К. А. Пупков, Н. Д. Егупов (ред.), *Методы классической и современной теории автоматического управления*, Учеб. пособие. т. 1–5, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2004 ↑ 79, 80, 81, 82.

[4] Бутковский А. Г., *Характеристики систем с распределенными параметрами*, Справочное пособие, Наука, М., 1979, 224 с. ↑ 80, 82, 83, 87.

[5] Полянин А. Д., *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001, 576 с. ↑ 80, 83, 87.

[6] И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, «Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами», *Метрология*, 2012, № 8, с. 3–14 ↑ 80, 81, 86.

[7] Эфрос А. М., Данилевский А. М., *Операционное исчисление и контурные интегралы*, Государственное научно-издательское издательство Украины, Харьков, 1937, 384 с. ↑ 80, 86.

[8] И. В. Бойков, *Аналитические методы идентификации динамических систем*, Учеб. пособие, Изд-во Пензенского политехнического института, Пенза, 1992, 112 с. ↑ 81, 82.

[9] Н. П. Кривулин, «Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами», *Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем*, Сборник статей, VIII Международная научно-техническая конференция (26–30 мая 2014 г.), Приволжский Дом знаний, Пенза, с. 172–178 ↑ 86, 87.

[10] И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, «Идентификация систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных», *Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем*, Сборник статей, VII Международная научно-техническая конференция (24–26 мая 2012 г.), Приволжский Дом знаний, Пенза, с. 23–27 ↑ 87.

[11] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. ↑ 88.

[12] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. ↑ 88, 89.

[13] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. ↑ 88, 91.

[14] И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, «Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков», *Метрология*, 2013, № 9, с. 3–17 ↑ 91.

[15] И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, «Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами», *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*, 2013, № 2(26), с. 120–129 ↑ 93.

[16] И. В. Бойков, «Об идентификации нелинейных систем с запаздыванием», *Измерительная техника*, 1995, № 4, с. 14–15 ↑ 94.

[17] И. В. Бойков, «Об идентификации нелинейных систем», *Метрология*, 1997, № 2, с. 52–60 ↑ 94.

[18] Н. П. Кривулин, *Об идентификации нелинейных измерительных преобразователей с распределенными параметрами*, Деп. в ВИНИТИ 13.11.2000, № 2854-В00, Пенз. гос. университет, Пенза, 2000 (Рус.), 19 с., Библиография 7 назв. ↑ 94.

[19] И. В. Бойков, «Приближенные методы восстановления входных сигналов, искаженных нелинейными динамическими системами», *Измерительная техника*, 1995, № 11, с. 3–7 ↑ 94.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. И. Гурман*

Об авторах:

Илья Владимирович Бойков

Заведущий кафедрой «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета, профессор, доктор физико-математических наук.

e-mail: boikov@pnzgu.ru

Николай Петрович Кривулин

Доцент кафедры «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета, кандидат технических наук.

e-mail: krivulin@bk.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. *Методы идентификации динамических систем* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2014. Т. 5, № 5(23), с. 79–96.

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5_79-96.pdf

Ilya Boikov, Nikolay Krivulin. *The methods for identification of dynamical systems.*

ABSTRACT. The review of authors investigations devoted to analytical and approximative method for identification of systems with lumped and disturbed parameters are given. Considered the dynamical systems which are described with ordinary differential equations and partial differential equations. Hereditary systems are considered too. (*In Russian*).

Key Words and Phrases: dynamical system, impulse transition function, systems with distributed parameters, generalized Borel theorem, differential equations with variable parameters, differential equations, partial derivatives, variable coefficients, distributed parameters.