ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №1(24), 2015, с. 21–37

УДК 517.977

И. В. Расина, О. В. Батурина

Линейно-квадратические дискретно-непрерывные системы с управляемыми коэффициентами

Аннотация. Рассматривается частный случай дискретно-непрерывных систем (ДНС): линейно-квадратические по состоянию ДНС с управляемыми коэффициентами. Для указанного класса систем строится аналог метода глобального улучшения Кротова, последняя итерация которого дает решение в форме приближенно-оптимального синтеза управления. Полученный результат можно трактовать как развитие теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) применительно к ДНС. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова и фразы: дискретно-непрерывные системы, метод глобального улучшения, оптимальный синтез управления, магистральные решения.

Введение

Наряду с традиционными исследованиями в теории оптимального управления наблюдается постоянный интерес к моделям управления системами неоднородной структуры, систематические исследования которых начаты еще в 1960-е–1970-е гг. В различных публикациях эти системы фигурируют под разными названиями: системы переменной структуры [1], дискретно-непрерывные системы [2], логико-динамические системы [3, 4], импульсные системы [5], гибридные системы [6, 7]. Однако для подобных систем классические методы оптимального управления непосредственно неприменимы. Один из возможных подходов к исследованию задач оптимального управления для систем неоднородной структуры состоит в обобщении для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: проекты 14-31-50894 мол_нр «Разработка и исследование алгоритмов оптимизации линейных динамических систем с управляемыми коэффициентами», 15-01-01923 А «Конструктивные методы оптимизации управления системами неоднородной структуры».

них достаточных условий оптимальности Кротова [8]. В [9] сформулированы общие условия оптимальности для абстрактной динамической системы как многошаговой, операторы которой на разных шагах допускают различную интерпретацию. В [2, 10–12] предложена и развита математическая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС) в виде конкретизации указанной абстрактной модели [9], применимая для широкого класса задач управления неоднородными процессами, и для нее получен аналог достаточных условий Кротова для непрерывных и дискретных систем. Как и в случае однородных систем, получение закона управления в форме синтеза для ДНС при численной реализации вызывает серьезные трудности, связанные с «проклятием размерности». Для преодоления этих сложностей в теории управления принято разделять задачу управления на два больших этапа:

(1) поиск оптимальной (либо вообще некоторой желаемой) временной программы управления,
(2) построение приближенно оптимального синтеза управления с обратной связью в окрестности этой программы с целью ее реализации на основе упрощенной модели объекта, допускающей аналитическое или близкое к нему достаточно простое решение.

Соответствующее направление, связанное с решением задачи (2), получило интенсивное развитие как теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в работах А.М. Летова [13, 14], Р. Калмана [15] и в ряде других публикаций, где исходная модель заменяется неким линейно-квадратическим приближением.

В данной работе рассматривается модель линейно-квадратической ДНС как частный случай общей модели [12], и для нее строится аналог метода глобального улучшения управления [12], позволяющий получить решение в форме приближенно-оптимального синтеза. В отличие от работ [13, 14] предлагается линейно-квадратическое приближение функций Кротова–Беллмана и обобщенного лагранжиана Кротова в окрестности реализуемой программной траектории, как для итерационного поиска оптимальной программы, так и для приближенно-оптимального синтеза в ее окрестности, который автоматически находится по окончании итерационного процесса. Полученный результат можно рассматривать как развитие теории АКОР для ДНС в рамках иного подхода к задачам АКОР, предложенного в [16]. В заключение приведены результаты вычислительных экспериментов на методическом примере.

1. Линейно-квадратические дискретно-непрерывные процессы и основные конструкции

Рассматриваемая модель ДНС представляет собой двухуровневую управляемую систему. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель

$$x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}a(k,u)|x|^2 + b(k,u), \quad x^0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$x(k+1) = A(k,u)x(k) + B(k,u), \quad x \in \mathbb{R}^{m(k)}, \tag{2}$$

$$k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, ..., k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k,x) \subset \mathbb{R}^{r(k)},$$

где k — номер шага (этапа), не обязательно физическое время, $\mathbf{U}(k,x)$ — заданное при каждом k и x множество, $a(k,u)$, $b(k,u)$ — заданные функции, $A(k,u)$, $B(k,u)$ — матрицы размеров $m(k) \times m(k)$, $m(k) \times 1$ соответственно.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$ действует непрерывная система нижнего уровня

$$\dot{x}^{c0} = \frac{1}{2}a^c(t,u^c)|x^c|^2 + b^c(t,u^c), \quad x^{c0} \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\dot{x}^c = A^c(t,u^c)x^c + B^c(t,u^c), \quad x^c \in \mathbb{R}^{n(k)}, \tag{4}$$

$$t \in \mathbf{T}(z) = [t_I(z), t_F(z)],$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z,t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c(z,t,x^c) \subset \mathbb{R}^{p(k)}, \quad z = (k,\ x),$$

$a^c(t,u^c)$, $b^c(t,u^c)$ — заданные функции, $A^c(t,u^c)$, $B^c(t,u^c)$ — матрицы размеров $n(k) \times n(k)$, $n(k) \times 1$.

Оператор правой части (1) имеет вид

$$x(k+1) = \theta(k)x^c(k,t_F), \quad k \in \mathbf{K}',$$

$x^c(t_I) = \xi(k)x$, где через ξ, θ обозначены матрицы соответствующих размеров. Здесь $z = (k,\ x)$ — совокупность переменных верхнего уровня, играющая на нижнем уровне роль параметров.

Решением этой двухуровневой системы считается набор $m = (x(k), u(k))$, где при $k \in \mathbf{K}'$: $u(k) = m^c(k)$, $m^c(k) \in \mathbf{D}^c(z(k))$, (называемый *линейно-квадратическим дискретно-непрерывным процессом*), где $m^c(k)$ — непрерывный процесс $(x^c(k,t),\ u^c(k,t))$, $t \in \mathbf{T}(z(k))$, а $\mathbf{D}^c(z)$ — множество допустимых процессов m^c удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (3)–(4) при кусочно-непрерывных $u^c(k,t)$ и кусочно-гладких $x^c(k,t)$ (на каждом дискретном шаге k).

Будем рассматривать для модели (1)–(4) задачу оптимального управления как задачу о минимуме функционала $I = x^0(k_F)$ на множестве $\mathbf{D}$ решений m при фиксированных $k_I = 0$, k_F, $x\,(k_I)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$.

В общем случае достаточные условия оптимальности для такой задачи получены в [**12**]. Функции Кротова φ, φ^c зададим в виде

$$\varphi = \psi^{\mathrm{T}}(k)x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k)x - x^0,$$

$$\varphi^c = \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)x^c + \frac{1}{2}x^{c\mathrm{T}}\sigma^c(k,t)x^c - x^{c0},$$

где $\psi(k)$, $\psi^c(k,t)$ — вектор-функции, а $\sigma(k)$, $\sigma^c(k,t)$ — матрицы соответствующих размеров. При этом основные конструкции общих достаточных условий для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
&G = \psi^{\mathrm{T}}(k_F)x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k_F)x,\\
&R = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)(A(k,u)x(k) + B(k,u)) - x^0(k) -\\
&\quad - \frac{1}{2}a(k,u)|x|^2 - b(k,u) +\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(A(k,u)x(k) + B(k,u)\right)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\left(A(k,u)x(k) + B(k,u)\right) -\\
&\quad - \psi^{\mathrm{T}}(k)x - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k)x,\\
&G^c = -\psi^{\mathrm{T}}(k+1)\theta(k)x^c(k,t_F) - \frac{1}{2}\left(\theta(k)x^c(k,t_F)\right)^{\mathrm{T}}\sigma(k)\theta(k)x^c(k,t_F) +\\
&\quad + \psi^{\mathrm{T}}(k)x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k)x + \psi^{c\mathrm{T}}(k_F)x^c(k,t_F) - \psi^{c\mathrm{T}}(k_I)\xi(k)x +\\
&\quad + \frac{1}{2}x^{c\mathrm{T}}(k,t_F)\sigma^c(k,t_F)x^c(k,t_F) - \frac{1}{2}(\xi(k)x)^{\mathrm{T}}\sigma^c(k,t_I)\xi(k)x,\\
&R^c = x^{c\mathrm{T}}(\psi^c + \sigma^c(k,t))(A^c(t,u^c)x^c + B^c(t,u^c)) -\\
&\quad - \frac{1}{2}a^c(t,u^c)|x^c|^2 - b^c(t,u^c) + \dot{\psi}^{c\mathrm{T}}x^c + \frac{1}{2}x^{c\mathrm{T}}\dot{\sigma}^c(k,t)x^c,\\
&L = G - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R + \sum_{\mathbf{K}'}\left(G^c - \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} R^c dt\right).
\end{aligned}$$

Здесь L — обобщенный лагранжиан, который на множестве $\mathbf{D}$, как показано в [12], совпадает с исходным функционалом I. В соответствии с общей процедурой [12] решение поставленной задачи сводится к исследованию на экстремум введенных конструкций по указанным аргументам при каждом k, t.

2. Метод глобального улучшения

В работах [17, 18] был предложен метод глобального улучшения управления, его аналог для ДНС получен в работе [12], а модификации для линейных ДНС и билинейного случая в [19, 20]. Для однородных процессов один из возможных подходов к реализации указанного метода дан в [21]. Рассмотрим далее его модификацию для класса линейно-квадратических ДНС (1)–(4), но предварительно укажем исходные предпосылки.

Предположим, что $\mathbf{X}(k) = \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{X}^c(z,t) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $t_I = \tau(z)$, $t_F = \vartheta(z)$, k_I, x_I и k_F — заданы, $x_F^c \in \mathbb{R}^{n(k)}$.

Задан элемент $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ и требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$ такой, что $I\left(m^{\mathrm{II}}\right) \le I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$. Функции $\varphi\left(k, x\left(k\right)\right), \varphi^c\left(z, t, x^c\right)$ найдем из условий:

$$R\left(k, x(k), u^I(k)\right) \to \min_x, \tag{5}$$

$$G\left(x\right) \to \max, \tag{6}$$

$$R^c\left(z, t, x^c\left(k, t\right), u^{c\mathrm{I}}\left(k, t\right)\right) \to \min_{x^c}, \tag{7}$$

$$G^c\left(z, \tilde{x}^c(t_F, z)\right) - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c(z(k), t, \tilde{x}^c(t, z), u^{c\mathrm{I}}(k,t))dt \to \max_x, \tag{8}$$

где $\tilde{x}^c(t,z)$ — результат операции в (7). Минимизация и максимизация производится по областям, где ожидается прохождение улучшенной траектории. Такие области, как правило, известны в практических приложениях.

Эти условия могут быть выполнены неоднозначно и оставляют значительную свободу выбора функций φ и φ^c. Если потребовать, чтобы левые части в этих условиях не зависели от x, x^c, то получится дискретно-непрерывная цепочка относительно φ, φ^c, описываемая уравнениями типа Беллмана, не содержащими операции поиска максимума по u, u^c и, следовательно, линейными относительно φ^c:

$$\varphi(k,x)=\varphi\left(k+1,f\left(k,x(k),u^{\mathrm{I}}(k)\right)\right),\quad k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F, \tag{9}$$

$$\varphi(k_F,x)=-F(x),\quad \varphi^c_t=-H^c\left(z,t,x^c,\varphi^c_{x^c}\right), \tag{10}$$

$$H^c\left(z,t,x^c,u^{c\mathrm{I}},p\right)=p^{\mathrm{T}}f^c\left(z,t,x^c,u^{c\mathrm{I}}\right),$$

$$\varphi^c\left(z,t_F,x^c_F\right)=\varphi\left(k+1,\theta\left(z,x^c_F\right)\right), \tag{11}$$

$$\varphi(k,x)=\varphi^c\left(z,\tau(z),\xi(z)\right),\quad k\in\mathbf{K}', \tag{12}$$

которая разрешается в порядке следования от k_F к k_I.

Пусть

$$\tilde u(k,x)=\arg\max_{u\in\mathbf{U}(k,x)}R\left(k,x(k),u(k)\right),$$

$$\tilde u^c(z,t,x^c)=\arg\max_{u^c\in\mathbf{U}^c(z,t,x^c)}R^c\left(z,t,x^c,u^c\right).$$

Тогда из заданной дискретно-непрерывной системы и начальных условий при полученных управлениях находятся функции $x^{\mathrm{II}}(k)$, $x^{c\mathrm{II}}(k,t)$ и программы управлений:

$$u^{\mathrm{II}}(k)=\tilde u\left(k,x^{\mathrm{II}}(k)\right),\quad u^{c\mathrm{II}}(k,t)=\tilde u^c\left(k,t,x^{\mathrm{II}}(k),x^{c\mathrm{II}}(k,t)\right),$$

т.е. элемент m^{II}. Повторяя итерационно эти операции, получим улучшающую последовательность $\{m_s\}$.

Теорема 1. *Для элементов m^{I} и m^{II} справедливо неравенство $I\left(m^{\mathrm{I}}\right)\geq I\left(m^{\mathrm{II}}\right)$.*

Доказательство. Покажем, что $I\left(m^{\mathrm{II}}\right)-I\left(m^{\mathrm{I}}\right)\leq 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&I\left(m^{\mathrm{II}}\right)-I\left(m^{\mathrm{I}}\right)=L\left(m^{\mathrm{II}},\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{c\mathrm{I}}\right)-L\left(m^{\mathrm{I}},\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{c\mathrm{I}}\right)=\\
&=G\left(x^{\mathrm{II}},\varphi^{\mathrm{I}}\right)-G\left(x^{\mathrm{I}},\varphi^{\mathrm{I}}\right)-\sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F}\left(R\left(k,x^{\mathrm{II}}(k),u^{\mathrm{II}}(k),\varphi^{\mathrm{I}}\right)-\right.\\
&-\left.R\left(k,x^{\mathrm{I}}(k),u^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}}\right)\right)+\sum_{\mathbf{K}'}\left(G^c\left(z^{\mathrm{II}}(k),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{c\mathrm{I}}\right)-\right.\\
&-\left.G^c\left(z^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{c\mathrm{I}}\right)\right)-\int\limits_{\mathbf{T}(z)}\left(R^c\left(z^{\mathrm{II}}(k),t,x^{c\mathrm{II}}(t),u^{c\mathrm{II}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{c\mathrm{I}}\right)-\right.\\
&-\left.R^c\left(z^{\mathrm{I}}(k),t,x^{c\mathrm{I}}(t),u^{c\mathrm{I}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{c\mathrm{I}}\right)\right)dt=\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-\Delta_4.
\end{aligned}$$

где $\Delta_1=G\left(x^{\mathrm{II}}\right)-G\left(x^{\mathrm{I}}\right)\leq 0$ в силу условия (6).

При этом

$$\begin{aligned}\Delta_2 = &\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \left(R\left(k, x^{\mathrm{II}}(k), u^{\mathrm{II}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}\right) - R\left(k, x^{\mathrm{I}}(k), u^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}\right)\right) = \\ = &\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \left(R\left(k, x^{\mathrm{II}}(k), u^{\mathrm{II}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}\right) - R\left(k, x^{\mathrm{II}}(k), u^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}\right)\right) + \\ + &\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \left(R\left(k, x^{\mathrm{II}}(k), u^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}\right) - R\left(k, x^{\mathrm{I}}(k), u^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}\right)\right) \geq 0\end{aligned}$$

согласно (5).

Далее имеем

$$\Delta_3 = \sum_{\mathbf{K}'} \left(G^c\left(z^{\mathrm{II}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right) - G^c\left(z^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right)\right) \leq 0$$

и

$$\begin{aligned}\Delta_4 = &\int\limits_{\mathbf{T}(z)} \left(R^c\left(z^{\mathrm{II}}(k), t, x^{c\mathrm{II}}(t), u^{c\mathrm{II}}(t), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right) - \right. \\ &\left. - R^c\left(z^{\mathrm{I}}(k), t, x^{c\mathrm{I}}(t), u^{c\mathrm{I}}(t), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right)\right) dt = \\ = &\int\limits_{\mathbf{T}(z)} \left(R^c\left(z^{\mathrm{II}}(k), t, x^{c\mathrm{II}}(t), u^{c\mathrm{II}}(t), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right) - \right. \\ &\left. - R^c\left(z^{\mathrm{II}}(k), t, x^{c\mathrm{II}}(t), u^{c\mathrm{I}}(t), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right)\right) dt + \\ + &\int\limits_{\mathbf{T}(z)} \left(R^c\left(z^{\mathrm{II}}(k), t, x^{c\mathrm{II}}(t), u^{c\mathrm{I}}(t), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right) - \right. \\ &\left. - R^c\left(z^{\mathrm{I}}(k), t, x^{c\mathrm{I}}(t), u^{c\mathrm{I}}(t), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{c\mathrm{I}}\right)\right) dt \geq 0\end{aligned}$$

в силу условий (7), (8).

Тогда

$$I\left(m^{\mathrm{II}}\right) - I\left(m^{\mathrm{I}}\right) = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 \leq 0.$$

□

Вернемся к исходной задаче и рассмотрим соотношения (9)–(12)

более подробно. Из указанных равенств получаем:

$$\psi(k_F) = 0, \quad \sigma(k_F) = 0, \tag{13}$$

$$\psi(k) = A^{\mathrm{T}}(k, u^{\mathrm{I}})\psi(k+1) + A^{\mathrm{T}}(k, u^{\mathrm{I}})\sigma(k+1)B(k, u^{\mathrm{I}}), \tag{14}$$

$$\sigma(k) = A^{\mathrm{T}}(k, u^{\mathrm{I}})\sigma(k+1)A(k, u^{\mathrm{I}}) - a(k, u^{\mathrm{I}})E, \quad k \in \mathbf{K} \backslash \mathbf{K}' \backslash k_F, \tag{15}$$

$$\dot{\psi}^c = A^{c\mathrm{T}}(t, u^{c\mathrm{I}})\psi^c + \sigma^c B^c(t, u^{c\mathrm{I}}), \tag{16}$$

$$\dot{\sigma}^c = -a^c(t, u^{c\mathrm{I}})E + \sigma^c A^{c\mathrm{T}}(t, u^{c\mathrm{I}}), \tag{17}$$

$$\psi^c(k, t_F) = \theta^{\mathrm{T}}(k)\psi(k), \quad \sigma^c(k, t_F) = \theta^{\mathrm{T}}\sigma(k)\theta, \tag{18}$$

$$\psi(k) = \xi^{\mathrm{T}}\psi^c(k+1, t_I), \quad \sigma(k) = \xi^{\mathrm{T}}\sigma^c(k+1, t_I)\xi, \quad k \in \mathbf{K}'. \tag{19}$$

Замечание 1. Если уравнения (1), (3) содержат линейные слагаемые:

$$x^0(k+1) = x^0(k) + a^0(k, u)x + \frac{1}{2}a(k, u)|x|^2 + b(k, u),$$

$$\dot{x}^{c0} = a^{c0}(t, u^c)x^c + \frac{1}{2}a^c(t, u^c)|x^c|^2 + b^c(t, u^c),$$

где $a^0(k, u)$, $a^{c0}(t, u^c)$ — вектор-функции строки, то уравнения для ψ, ψ^c примут вид:

$$\psi(k) = -Ea^{0\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}(k, u^{\mathrm{I}})\psi(k+1) + A^{\mathrm{T}}(k, u^{\mathrm{I}})\sigma(k+1)B(k, u^{\mathrm{I}}),$$

$$\dot{\psi}^c = -Ea^{c0\mathrm{T}} + A^{c\mathrm{T}}(t, u^{c\mathrm{I}})\psi^c + B^{c\mathrm{T}}(t, u^{c\mathrm{I}})\sigma^c.$$

Нетрудно видеть, что выражения для поиска функций $\tilde{u}, \tilde{u}^c$ пополнятся дополнительными слагаемыми.

Таким образом, алгоритм метода состоит из следующих этапов:

1. Задается элемент m^{I}.
2. Справа налево решаются системы уравнений (13)–(19) относительно вектор-функций ψ, ψ^c и матриц σ, σ^c.
3. Находятся функции $\tilde{u}$, $\tilde{u}^c$ из условий

$$\tilde{u}\,(k, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}(k,x)} \Big(\psi(k+1)^{\mathrm{T}}\Big)B(k, u) - b(k, u) + \\ + \frac{1}{2}\left(A(k)x(k) + B(k, u)\right)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)(A(k)x(k) + B(k, u)),$$

$$\tilde{u}^c\,(z, t, x^c) = \arg \max_{u^c \in \mathbf{U}^c(z,t,x^c)} \Big((\psi^c(k, t) + \sigma^c(k, t)x^c)^{\mathrm{T}}B^c(t, u^c) - b^c(t, u^c)\Big).$$

4. Полученные управления подставляются в исходную ДНС. Тем самым находится элемент m^{II}.

Подчеркнем тот факт, что управления $\tilde{u}$, $\tilde{u}^c$ зависят от переменных состояний верхнего и нижнего уровней линейно-квадратическим образом, т.е. дают решение в форме приближенного синтеза оптимального управления. Такую форму решения можно рассматривать как один из видов АКОР для ДНС. При этом, в отличие от традиционной задачи АКОР, которая получается при линейно-квадратической аппроксимации исходной нелинейной задачи по состоянию и управлению, здесь рассматривается аппроксимация только по состоянию, а управление остается нелинейным, ограниченным исходным множеством, что позволяет использовать имеющиеся ресурсы управления полностью.

Процесс итераций заканчивается при выполнении условия

$$|I_{s+1} - I_s| < \epsilon,$$

где ϵ — заданная точность вычислений.

Заметим, что если функционал ограничен снизу, то построенный итерационный процесс сходится по функционалу. Действительно, в силу теоремы 1 алгоритм генерирует монотонную по функционалу улучшающую последовательность, которой соответствует монотонно убывающая числовая последовательность $I_s = I(m_s)$, сходящаяся, как известно из анализа, к некоторому пределу I_*.

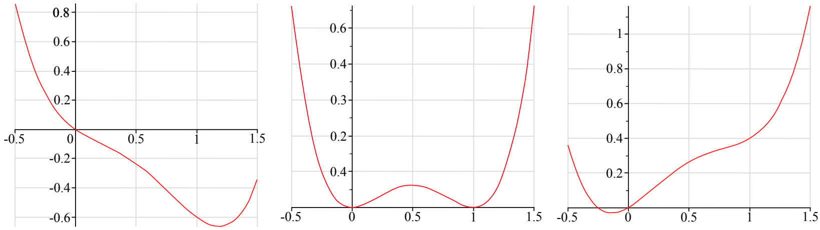
Пример 1. Рассматривается нелинейная задача:

$$\dot{x}^1 = (x^2)^2(x^2-1)^2 + (t-1)x^2 + x^2u, \quad \dot{x}^2 = u,$$
$$x^1(0) = 0, \quad x^2(0) = 0,$$
$$|u| \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad I = x^1(t_F) \to \inf, \quad t_F = 2.$$

Эта задача при предположении, что управление не ограничено, сводится к производной задаче (первого порядка) [22–24]:

$$\dot{y} = (x^2)^2(x^2-1)^2 + (t-1)x^2, \quad y = x^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2, \tag{20}$$
$$I = \left(y_F + \frac{1}{2}(x_F^2)^2\right) \to \inf,$$

которая решается непосредственно минимизацией правой части и функционала по новому управлению. Нетрудно видеть, что правая часть указанного уравнения — выпуклая функция по переменной x^2 и, следовательно, ее минимум достигается в стационарной точке.



а) $t = 0.4$, $x^2_{\min} = -0.6629404488$ б) $t = 1$, $x^2_{\min} = 0,\ 1$ в) $t = 1.4$, $x^2_{\min} = -0.0305372597$

Рис. 1. Графики x^2 для некоторых t

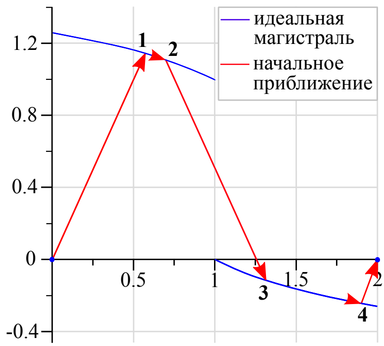


Рис. 2. Идеальная магистраль и начальное приближение

Для его поиска при фиксированном t с некоторым шагом на отрезке $[0,\ 2]$ находился минимум функции $(x^2)^2(x^2-1)^2+(t-1)x^2$. На рис. 1 представлены графики x^2 для некоторых значений t. Непосредственно из выражения функционала следует, что его минимум достигается на управлении $x^2_F = 0$. Тем самым получается идеальное магистральное решение исходной задачи с кусочно-непрерывной функцией $x^2(t)$ в качестве управления. Это решение модифицируется естественным образом — заменой в окрестностях точек разрыва решениями уравнения $\dot{x}^2 = u$ при $|u| \le 2$. Получается кусочно-гладкая функция $x^2(t)$, используемая далее как начальное приближение в итерационной процедуре минимизации функционала (рис. 2).

Производится тейлоровская линейно-квадратическая аппроксимация исходной системы по x^2 в окрестности траектории текущей s-й итерации:

$$\begin{gathered}\dot{x}^1 = a(t) + b(t)(x^2 - x_s^2(t)) + \frac{1}{2}c(t)(x^2 - x_s^2(t))^2 + x^2 u, \quad \dot{x}^2 = u, \\ x^1(0) = 0, \quad x^2(0) = x_0^2, \quad |u| \le 1, \quad 0 \le t \le 2,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= (x_s^2)^2(x_s^2 - 1)^2 + (t-1)x_s^2, \\ b(t) &= 2x_s^2(x_s^2 - 1)(2x_s^2 - 1) + t - 1, \\ c(t) &= 2((2x_s^2 - 1)^2 + 2x_s^2(x_s^2 - 1)). \end{aligned}$$

Преобразованная система допускает аналогично исходной нелинейной переход к производной системе с использованием того же преобразования $y = x^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2$:

$$\dot{y} = a(t) + b(t)(x^2 - x_s^2(t)) + \frac{1}{2}c(t)(x^2 - x_s^2(t))^2. \tag{22}$$

Если присоединить уравнение $\dot{x}^2 = u$, то получится удобная запись системы (21) в новых переменных (y, x^2), где управление входит лишь в одно уравнение.

Для последовательного улучшения приближенного магистрального решения представим его как дискретно-непрерывный процесс, предполагая, что его структура по итерациям не меняется. Будем рассматривать $t_F(k)$ как дискретное управление u^1. В данном случае $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \backslash k_F = 0, \ldots, 4$. Векторы переменных верхнего (дискретного) уровня обозначим через x, u, а нижнего (непрерывного) уровня — через x^c, u^c. Будем иметь:

$$x^1(k+1) = u^1, \quad x^1(k) \le u^1 \le u^1_{\max}, \quad k \in \mathbf{K}', \quad u^1_{\max} = 2, \quad x^1(0) = 0.$$

При $k = 2,\ 4$:

$$\begin{gathered} q_I^c = x^2(k),\ x_I^{c2} = x^3(k), \\ \dot{q}^c = b(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(t)) + \frac{1}{2}c(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(t))^2, \\ \dot{x}^{c2} = u^c, \quad t \in [x^1(k),\ u^1(k)], \\ x^2(k+1) = q_F^c(k), \quad x^3(k+1) = x_F^{c2}(k), \quad |u^c| \le 2. \end{gathered}$$

При $k = 1,\ 3$:

$$q_I^c = x^2(k), \quad t \in [x^1(k),\ u^1(k)],$$

$$\dot{q}^c = b(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(k,t)) + \frac{1}{2}c(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(t))^2,$$

$$x^2(k+1) = q_F^c(k) - \frac{1}{2}\left(x_F^{c2}(k)\right)^2, \quad x^3(k+1) = u^2(k),$$

$$b(t) = 2x_s^2(x_s^2 - 1)(2x_s^2 - 1) + t - 1,$$

$$c(t) = 2((2x_s^2 - 1)^2 + 2x_s^2(x_s^2 - 1)).$$

Переменная $x^{c1}(k,t)$ находится по формуле $x^{c1} = q^c + a + x^{c2} - u_s$, $a(t) = (x_s^{c2})^2(x_s^{c2} - 1)^2 + (t-1)x_s^{c2}$. Здесь переменная q^c введена с целью преобразования линеаризованной модели к виду, рассмотренному в теории.

Заданы начальные условия и минимизируемый функционал:

$$x^1(0) = 0, \quad x^2(0) = 0, \quad x^3(0) = x_I^3, \quad I = x^2(5).$$

Обратим внимание, что на разных этапах используются разные непрерывные системы: на четных этапах — исходная преобразованная система, а на нечетных — производная.

Соответствующая ДНС для сопряженных переменных ψ, ψ^c, σ, σ^c имеет следующий вид.

При $k = 2,\ 4$: $\psi(5) = 0$, $\sigma(5) = 0$, $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$, $\psi^c = (\psi^{c1}, \psi^{c2})$, σ, σ^c — матрицы размера $3 \times 3, 2 \times 2$, $\xi = (0, 1, 1)$,

$$\psi(k) = \xi\psi^c(k+1, t_I), \quad \sigma(k) = \xi^{\mathrm{T}}\sigma^c(k+1, t_I)\xi,$$

$$\dot{\psi}^c = E(0, -b) + \sigma^c(0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \dot{\sigma}^c = -cE,$$

$$\psi^c(k, t_F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\psi(k), \quad \sigma^c(k, t_F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\sigma(k)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При $k = 1,\ 3$:

$$\dot{\psi}^c = -b, \quad \dot{\sigma}^c = -c, \quad \psi^c(k, t_F) = \psi^2(k), \quad \sigma^c(k, t_F) = \sigma^{22}(k),$$

$$\psi(k) = \xi\psi^c(k+1, t_I), \quad \sigma(k) = \xi^{\mathrm{T}}\sigma^c(k+1, t_I)\xi, \quad \xi = (0, 1, 0).$$

Здесь σ^{22} — элемент матрицы σ.

Управляющие воздействия находятся по приведенным ниже формулам.

Таблица 1. Изменение функционала по итерациям

№ итерации	Значение функционала
0	−0.285436
1	−0.296333
2	−0.300289
3	−0.300284

При $k = 2,\ 4$:

$$\tilde{u}^1\,(k,x) = \arg\max(\psi^1(k+1)u^1 + \\ + \frac{1}{2}(u^1, q_F^c(k), x_F^{c2})\sigma(k+1)(u^1, q_F^c(k), x_F^{c2})^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{u}^c\,(z,t,x^c) = \arg\max(\psi^c + \sigma^c(q^c, x^{c2}))^{\mathrm{T}}(\dot{q}^c, u^c)^{\mathrm{T}}(\psi^c + \\ + \sigma^c(q^c, x^{c2})), \quad |u^c| \le 2,$$

где $\dot{q}^c = b(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(k,t)) + \frac{1}{2}c(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(t))^2$.

При $k = 1,\ 3$:

$$\tilde{u}^1\,(k,x) = \arg\max(\psi^1(k+1)u^1 + \frac{1}{2}(u^1, q_F^c(k) - \\ - \frac{1}{2}(x_F^{c2}(k))^2, u^2)\sigma(k+1)(u^1, q_F^c(k) - \frac{1}{2}(x_F^{c2}(k))^2, u^2)^{\mathrm{T}}),$$

$$\tilde{u}^2\,(k,x) = \arg\max(\psi^3(k+1)u^2 + \frac{1}{2}(u^1, q_F^c(k) - \\ - \frac{1}{2}(x_F^{c2}(k))^2, u^2)\sigma(k+1)(u^1, q_F^c(k) - \frac{1}{2}(x_F^{c2}(k))^2, u^2)^{\mathrm{T}}),$$

$$\tilde{u}^c\,(z,t,x^c) = \tilde{x}^{c2} = \arg\max(-b(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(t)) - \\ - \frac{1}{2}c(t)(x^{c2} - x_s^{c2}(t))^2).$$

Расчеты проводились предложенным в работе алгоритмом. В качестве начального приближения использовалась траектория, приведенная на рис. 2. Решение получено за 3 итерации. Соответствующие управления и траектория $x^2(t)$ приведены на рис. 3, 4. Изменение функционала по итерациям дано в таблице 1.

Для сравнения эта же задача в исходной постановке без преобразования к ДНС и специального выбора начального приближения была решена тем же методом при начальном приближении управления $u(t) = 0$ на всем заданном отрезке времени. Близкое решение

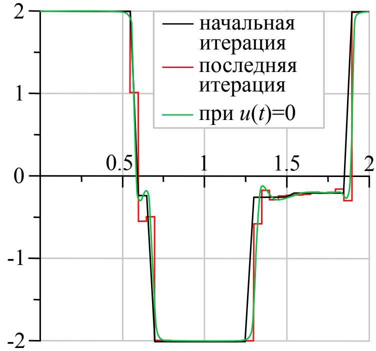


Рис. 3. Управление на начальном приближении и на итерациях

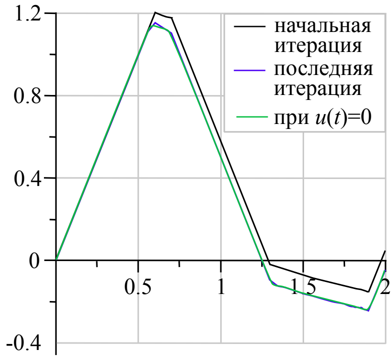


Рис. 4. Траектория x^2 на начальном приближении и на итерациях

со значением функционала $I = -0.302669$ получено за 85 итераций. Траектория и управление также приведены на рис. 3, 4 и носят аналогичный характер.

3. Заключение

Таким образом, в работе предложена математическая модель линейно-квадратической по состоянию ДНС с управляемыми коэффициентами, для которой дана конкретизация общих достаточных условий оптимальности и построен метод глобального улучшения управления с линейно-квадратическими функциями Кротова. Доказана теорема об улучшаемости начального приближения.

Этот метод особенно эффективен для вырожденных задач оптимального управления с магистральными решениями, широко распространенных на практике. Это подтверждается проведенными вычислительными экспериментами на тестовом примере. Найденное начальное приближение в магистральной форме дало значительный эффект по сравнению с традиционным случайным выбором начального приближения из множества допустимых управлений.

Список литературы

[1] С. В. Емельянов (ред.). *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970 ↑ 21.

[2] В. И. Гурман. «К теории оптимальных дискретных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 1973, №6, с. 53–58 ↑ 21, 22.

[3] С. Н. Васильев, «Теория и применение логико-управляемых систем», *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03, 2003, с. 23–52 ↑ 21.

[4] А. С. Бортаковский, «Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами», Информатика. Сер. Автоматизация проектирования, т. **2–3**, ВНИИМИ, М., 1992, с. 72–79 ↑ 21.

[5] Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович, *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*, монография, Наука, М., 2005, 429 с. ↑ 21.

[6] J. Lygeros. *Lecture Notes on Hybrid Systems*, University of Cambridge, Cambridge, 2003, 70 pp. ↑ 21.

[7] A. J. Van der Shaft, H. Schumacher. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, Springer-Verlag, London, 2000, 176 pp. ↑ 21.

[8] В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с. ↑ 22.

[9] В. Ф. Кротов. «Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем», *ДАН СССР*, **172**:1 (1967), с. 18–21 ↑ 22.

[10] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Дискретно-непрерывные представления импульсных решений управляемых систем», *Автоматика и телемеханика*, 2012, №8, с. 16–29 ↑ 22.

[11] И. В. Расина. «Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов», *Программные системы: теория и приложения*, 2011, №5(9), с. 49–72, URL http://psta.psiras.ru/read/psta2011_5_49-72.pdf ↑ 22.

[12] И. В. Расина. «Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 2012, №10, с. 3–17 ↑ 22, 24, 25.

[13] А. М. Летов. «Аналитическое конструирование регуляторов, II», *Автоматика и телемеханика*, **21**:5 (1960), с. 561–568 ↑ 22.

[14] А. М. Летов. *Динамика полета и управление*, Наука, М., 1969, 360 с. ↑ 22.

[15] R. Kalman. "Contributions to the theory of optimal control", *Bul. Soc. Mech. Mat.*, **5** (1960), pp. 102–119 ↑ 22.

[16] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Улучшение и приближенно-оптимальный синтез управления в окрестности опорной траектории», *Автоматика и телемеханика*, 2011, №12, с. 24–37 ↑ 22.

[17] В. Ф. Кротов, И. Н. Фельдман, «Итерационные методы решения экстремальных задач», *Моделирование технико-экономических процессов*, Изд-во Московского экономико-статистического института, М., 1978, с. 22–35 ↑ 25.

[18] В. Ф. Кротов, И. Н. Фельдман. «Итерационный метод решения задач оптимального управления», *Изв. АН СССР. Техн. киберн.*, 1983, №2, с. 160–168 ↑ 25.

[19] И. В. Расина, О. В. Батурина. «Оптимизация линейных по состоянию дискретно-непрерывных систем», *Автоматика и телемеханика*, 2013, №4, с. 80–90 ↑ 25.

[20] И. В. Расина, О. В. Батурина. «Оптимизация управления в билинейных системах», *Автоматика и телемеханика*, 2013, №5, с. 102–113 ↑ 25.

[21] В. И. Гурман, Е. А. Трушкова. «Приближенные методы оптимизации управляемых процессов», *Программные системы: теория и приложения*, 2010, №4(4), с. 85–104, URL http://psta.psiras.ru/read/psta2010_4_85-104.pdf ↑ 25.

[22] В. И. Гурман, М. К. Ни. «Вырожденные задачи оптимального управления, I», *Автоматика и телемеханика*, 2011, №3, с. 36–50 ↑ 29.

[23] В. И. Гурман, М. К. Ни. «Вырожденные задачи оптимального управления, II», *Автоматика и телемеханика*, 2011, №4, с. 57–70 ↑ 29.

[24] В. И. Гурман, М. К. Ни. «Вырожденные задачи оптимального управления, III», *Автоматика и телемеханика*, 2011, №5, с. 32–46 ↑ 29.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. И. Гурман*

Об авторах:

Ирина Викторовна Расина

г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, д.ф.-м.н., специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий.

e-mail: irinarasina@gmail.com

Ольга Владимировна Батурина

м.н.с. Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, к.ф.-м.н., область научных интересов — дискретно-непрерывные системы, методы улучшения управления.

e-mail: ol.baturina@mail.ru

Пример ссылки на эту публикацию:

И. В. Расина, О. В. Батурина. «Линейно-квадратические дискретно-непрерывные системы с управляемыми коэффициентами», *Программные системы: теория и приложения*, 2015, **6**:1(24), с. 21–37.

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2015_1_21-37.pdf

Irina Rasina, Olga Baturina. *Linear quadratic discrete-continuous systems with controllable coefficients.*

Abstract. It is considered a special case of discrete-continuous systems (DCS): linear-quadratic DCS w.r.t. state variables with controllable coefficients. For this class of systems a prototype of Krotov iterative global improvement method is constructed. Its last iteration gives a solution in the form of approximate optimal control synthesis. The obtained result can be treated as development of optimal analytical controllers design theory with application to DCS. A visual example is considered. (*In Russian*).

Key Words and Phrases: discrete-continuous system, global improvement method, optimal control synthesis, turnpike solutions.

Sample citation of this publication

Irina Rasina, Olga Baturina "Linear quadratic discrete-continuous systems with controllable coefficients", *Program systems: theory and applications*, 2015, **6**:1(24), pp. 21–37. (*In Russian.*)

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2015_1_21-37.pdf