ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №4(27), 2015, с. 353–358

УДК 519.681.2

А. А. Демидов

Возможности вычислений на кристаллах

Аннотация. В работе с позиций квантовой физики исследуются возможности вычислений с использованием процессов рассеяния пучка света на кристаллах. Строится модель вычислений, соответствующая преобразованию пучка света при прохождении через кристалл, приводятся необходимые формулы для расчёта этой модели. Необходимо подчеркнуть абстрактный характер исследования, которое направлено на подведение теоретической базы для дальнейшего изучения получаемых алгебраических конструкций, нежели на создание реального устройства — квантового компьютера или подобного. Работа выполнена в рамках программы создания алгебраического вычислителя [1].

Ключевые слова и фразы: параллельные вычисления, программные алгебры, квантовая оптика.

Преобразование пучка света кристаллом обычно связывают с задачей рассеяния, заключающейся в определении изменения пространственного распределения, частоты, поляризации оптического излучения при его взаимодействии с веществом [2, 3]. Последовательное решение задачи рассеяния возможно только в соответствующей квантовой теории — квантовой электродинамике. Элементарный акт рассеяния трактуется как поглощение веществом падающего фотона, а затем спонтанное испускание рассеянного фотона с другими значениями энергии, импульса и поляризации [4, 5]. В данной работе задача рассеяния рассматривается упрощённо: поскольку исследуются потенциальные вычислительные возможности физических процессов, то детали преобразования пучка света кристаллом игнорируются.

Пусть имеется кристалл или совокупность кристаллов, на который подаётся входящий пучок световых лучей. Кристалл преобразует пучок унитарным образом, после чего параметры исходящего пучка определяются измерительным прибором.

Работа поддержана грантом Министерства Образования и Науки Российской Федерации (id RFMEFI61314X0030).

Вектор поля $\mathbf{E}$ монохроматической волны можно представить в виде

$$\mathbf{E} = A\mathbf{e}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{1}$$

где A — амплитуда, $\mathbf{e}$ — вектор поляризации, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — угловая частота [6][§1.2.1]. Произвольный вектор поляризации $\mathbf{e}$ можно разложить по двум ортогональным векторам, например $\mathbf{e_x}$ и $\mathbf{e_y}$:

$$\mathbf{e} = a_1\mathbf{e_x} + a_2e^{i\delta}\mathbf{e_y}, \tag{2}$$

где $a_1 = \cos\beta$ и $a_2 = \sin\beta$ — действительные коэффициенты, β — параметр (при линейной поляризации имеет смысл угла между $\mathbf{e}$ и осью x).

Для описания преобразования пучка, состоящего из множества лучей, целесообразно использовать аппарат квантовой механики. Это же обеспечит полноту исследования возможностей кристаллов. Впоследствии результат можно будет огрубить до классического приближения.

Каждому входящему лучу можно приписать вектор состояния

$$|e\rangle = a_1|e_x\rangle + a_2e^{i\delta}|e_y\rangle. \tag{3}$$

Состояние полной системы получается с помощью операции тензорного умножения:

$$\psi = e_1 \otimes \ldots \otimes e_n = |e_1\rangle \ldots |e_n\rangle. \tag{4}$$

Результирующее состояние системы в общем случае не раскладывается на состояния подсистем по формуле (4), являясь *несепарабельным.* Поэтому часто для описания состояния системы применяют функционал (матрицу) плотности ρ_0 [7], которая задаётся выражением

$$\rho_0 = \psi\psi^* = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{5}$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение.

Чтобы определить поляризационные свойства каждого луча, необходимо выполнить четыре независимых измерения, например, определить параметры Стокса — интенсивность и три степени поляризации луча [6][§1.2.5.4]. Далее эти параметры используются как исходные данные для определения матрицы плотности входящего пучка.

Обозначая через U унитарное преобразование, осуществляемое кристаллом заданной конфигурации при определённом положении, можно записать результирующую матрицу

$$\rho = U|\psi\rangle\langle\psi|U^*. \tag{6}$$

Состояния исходящих лучей определяются редуцированными матрицами плотности, которые получаются из ρ взятием частичного следа

$$\begin{gathered} \rho^{(a)} = \operatorname{tr}_B \rho = \sum_i \langle B_i|\rho|B_i\rangle, \\ \langle a_j|\rho^{(a)}|a_k\rangle = \sum_i \langle B_i a_j|\rho|B_i a_k\rangle, \end{gathered} \tag{7}$$

где $|a_j\rangle, |a_k\rangle$ — базисные состояния интересующей подсистемы, а $|B_i\rangle$ — базисные состояния остальной части полной системы (см. рис. 1[1]).

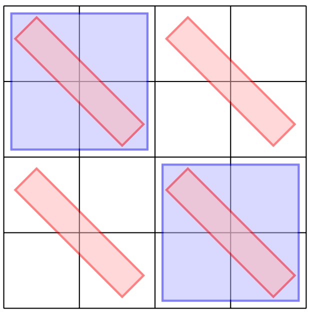

Рис. 1. Операция взятия частичного следа

Состояния (7) в общем случает будут *смешанными*, то есть не будут представимы в виде тензорного произведения векторов (5). В некогерентной смеси в определённой пропорции присутствуют компоненты, описываемые различными векторами состояния, причём разложение смешанного состояния на чистые состояния не единственно. Последнее обстоятельство несущественно, поскольку различные пучки, описываемые одинаковой матрицей плотности, во всех опытах будут вести себя тождественно с точки зрения свойств поляризации [6][§1.1.5.3].

[1]Элементы смежных областей, выделенных одним цветом, суммируются попарно. Операции $\rho^{(a)} = \operatorname{tr}_B \rho$ соответствует красный, а $\rho^{(b)} = \operatorname{tr}_A \rho$ — синий цвет.

Воспользуемся единственностью спектрального разложения матрицы по базису собственных векторов

$$\rho^{(n)} = V\Lambda V^{-1}, \tag{8}$$

где V — матрица собственных векторов матрицы $\rho^{(n)}$ по столбцам, Λ — диагональная матрица собственных значений матрицы $\rho^{(n)}$ на главной диагонали. Тогда луч n будет описываться совокупностью собственных векторов со статистическими весами, представленными собственными значениями:

$$O^{(n)} = \bigcup_i \Lambda_{ii}|V_i\rangle. \tag{9}$$

Выполнение спектрального разложения — нетривиальная задача для размерности $|\rho^{(n)}| > 3$, поскольку при поиске собственных чисел в процессе решения матричного уравнения

$$(\rho^{(n)} - \lambda I)\mathbf{v} = 0, \quad \det(\rho^{(n)} - \lambda I) = 0, \tag{10}$$

возникает алгебраическое уравнение степени $|\rho^{(n)}|$ (см. [**8**]). Поэтому будем выделять в исходящем пуске столько лучей, сколько во входящем. В этом случае размерность матрицы плотности каждого луча $|\rho^{(n)}| = 2$.

Вычислительная модель, соответствующая преобразованиям, осуществляемым кристаллом, будет зависеть от того, какое множество объектов взять за основу: можно рассматривать лишь матрицу плотности полной системы, не проводя измерений над отдельными исходящими лучами — формула (6), или же можно интересоваться состоянием каждого входящего и исходящего луча в отдельности — формула (9). Первый вариант допустим только для случая каскадного соединения кристаллов, заключительной операцией в любом случае должно быть измерение состояния каждого луча.

Список литературы

[1] Н. Н. Непейвода, «От численного моделирования к алгебраическому», *Труды VI Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления»*. Т. 1, PACO-2012 (24–26 октября 2012 г.), Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, М., 2012, с. 93–103. ↑353,358

[2] Th. Udem, R. Holzwarth, T. W. Hänsch. “Optical frequency metrology”, *Nature*, **416**:6877 (2002), pp. 233–237. ↑353

[3] А. М. Прохоров (ред.), *Физическая энциклопедия*, В 5-ти томах, Советская энциклопедия, М., 1988. ↑353

[4] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, В 10 т.. Т. IV: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1989, 728 с.↑353

[5] R. Fickler, R. Lapkiewicz, W. N. Plick, M. Krenn, C. Schaeff, S. Ramelow, A. Zeilinger. “Quantum entanglement of high angular momenta”, *Science*, **338** (2012), pp. 640–643.↑353

[6] К. Блум, *Теория матрицы плотности и её приложения*, Пер. с англ., Мир, М., 1983, 248 с.↑354,355

[7] Н. В. Никитин. *Матрица плотности. Курс лекций*, Физфак МГУ им. М. В. Ломоносова, М., 2015, 250 с.↑354

[8] Дж. Х. Уилкинсон, *Алгебраическая проблема собственных значений*, Пер. с англ., Наука, М., 1970, 564 с.↑356

Об авторе:

Алексей Александрович Демидов

Младший научный сотрудник Исследовательского центра искусственного интеллекта ИПС им. А. К. Айламазяна РАН

e-mail: alex@dem.botik.ru

Пример ссылки на эту публикацию:

А. А. Демидов. «Возможности вычислений на кристаллах», *Программные системы: теория и приложения*, 2015, **6**:4(27), с. 353–358.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2015_4_353-358.pdf

Aleksey Demidov. *Computing capabilities of crystals.*

Abstract. The work is devoted to investigation from the standpoint of quantum physics the possibility of using the scattering of a beam of light on crystals for calculations. There is proposed a model of computation, corresponding the transformation of the light beam as it passes through the crystal, and provided the necessary formulas for the calculation of the model. It is necessary to emphasize the abstract nature of the research, which is aimed at creation of the theoretical basis for further study of the produced algebraic structures, rather than the construction of a real device — a quantum computer or the like. The work carried out by the program of creation of algebraic computer [1]. (*In Russian*).

Key Words and Phrases: parallel computing, programm algebras, quantum optics.

References

[1] N. N. Nepeyvoda, "From the numerical simulation to the algebraic one", *Trudy VI Mezhdunarodnoy konferentsii "Parallel'nyye vychisleniya i zadachi upravleniya"*. V. 1, PACO-2012 (24–26 oktyabrya 2012 g.), In-t problem upravleniya im. V. A. Trapeznikova RAN, M., 2012, pp. 93–103 (in Russian).

[2] Th. Udem, R. Holzwarth, T. W. Hänsch. "Optical frequency metrology", *Nature*, **416**:6877 (2002), pp. 233–237.

[3] A. M. Prokhorov (red.), *Encyclopedia of physic*, V 5-ti tomakh, Sovetskaya entsiklopediya, M., 1988 (in Russian).

[4] V. B. Berestetskiy, Ye. M. Lifshits, L. P. Pitayevskiy. *Course of Theoretical Physics*. V. IV: *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, 1982.

[5] R. Fickler, R. Lapkiewicz, W. N. Plick, M. Krenn, C. Schaeff, S. Ramelow, A. Zeilinger. "Quantum entanglement of high angular momenta", *Science*, **338** (2012), pp. 640–643.

[6] K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications*, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, vol. **64**, 3nd ed., Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2012, 346 p.

[7] N. V. Nikitin. *The density matrix. Lecture course*, Fizfak MGU im. M. V. Lomonosova, M., 2015 (in Russian), 250 p. *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965, 662 p.

Sample citation of this publication:

Aleksey Demidov. "Computing capabilities of crystals", *Program systems: theory and applications*, 2015, **6**:4(27), pp. 353–358. (*In Russian*).

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2015_4_353-358.pdf