ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №1(28), 2016, с. 47–59

УДК 519.8

А. О. Блинов, М. Г. Дмитриев

Чувствительность решения некоторых возмущенных задач оптимизации

Аннотация. Рассматриваются возмущенные задачи оптимизации, формально представляющие собой задачи поиска экстремума функций многих переменных, возникающие при применении методов линейной свертки и идеальной точки, где часть весовых коэффициентов зависят от малого параметра. На основе асимптотического анализа задачи описывается чувствительность решения к изменению малого параметра, позволяющая построить коррекцию решения.

Ключевые слова и фразы: линейная свертка, идеальная точка, малый параметр.

Введение

Под чувствительностью решений к малым изменениям параметров задачи обычно понимают главные части скоростей изменения решений при этих изменениях параметров. В оптимизационных задачах различают два вида чувствительности — по значению функции (критерия) и по решению.

Это понятие полезно для качественного анализа рассматриваемых задач, при оценке робастности систем, при построении разностных схем для численного решения соответствующих задач и других приложений. Зачастую при асимптотическом анализе возмущенных динамических систем не выделяют отдельно проблему чувствительности, но, тем не менее, найденные функции чувствительности активно используются при построении соответствующих асимптотических приближений в качестве членов приближения первого порядка.

Вопросы чувствительности решений динамических систем к изменениям параметров, включая решения динамических и статических

Статья выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №15-29-06053.

задач оптимизации, отдельно изучались в литературе [1]. Асимптотические разложения решений регулярно и сингулярно возмущенных динамических систем, в том числе и задач оптимизации в динамических системах строились в многочисленных работах (см. обзоры [2–4]).

При моделировании процессов принятия решений в реальных задачах появляются многокритериальные задачи оптимизации. Попытка получить решение одновременно лучшее по всем критериям или максимально удовлетворить интересы всех сторон, что возможно только в частных случаях, приводит к определению некоторого рационального компромисса.

Как отмечал Т. Л. Саати в [5], исследование чувствительности в задачах многокритериальной оптимизации является актуальной проблемой.

Один из распространенных методов решения многокритериальных задач — сведение многокритериальной задачи оптимизации к соответствующей скалярной. В литературе имеется много подходов к решению задачи «скаляризации» критериев [6–9], в их числе линейная свертка критериев.

1. Чувствительность линейной свертки для метода главного критерия

Не останавливаясь на аксиоматике и корректности использования линейной свертки [9], определим формулы чувствительности для некоторых возмущенных скалярных задач оптимизации.

Пусть для конечного набора критериев

$$I_k(x) \to \max_{x \in X}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $X \subseteq R^n$ — некоторое выпуклое множество. Используя линейную свертку, приходим к однокритериальной задаче оптимизации

$$I(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k I_k(x) \to \max_{x \in X}, \qquad c_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} c_k = 1, \tag{1}$$

где предполагаем, что веса критериев известны. Будем также считать, что в (1) первый критерий является главным или базовым (доминирующим), т. е. $c_1 > c_k$, $k \neq 1$, а остальные веса достаточно малые $c_k = \alpha_k \varepsilon$, $\alpha_k > 0$, $k = 2, \dots, m$, и их можно упорядочить, используя упорядоченность между α_k. Числовые конкретные значения малого положительного параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$ и множителей α_k вводятся с помощью соотношений $c_1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k \varepsilon = 1,\ c_k = \alpha_k \varepsilon,\ k \neq 1,\ \alpha_k > 0$. Получаем регулярно возмущенную задачу однокритериальной оптимизации

$$I_\varepsilon(x) = c_1 I_1(x) + \sum_{k=2}^{m} \varepsilon \alpha_k I_k(x) \to \max_{x \in X}, \tag{2}$$

решение которой зависит от малого положительного параметра ε. Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) множество X — выпуклое ограниченное множество в пространстве R^n и все функции–критерии $I_k(x)$ достаточно гладкие функции своих переменных на X;
(2) функция–критерий $I_1(x)$ сильно вогнутая на X.

Учитывая, что все критерии — гладкие функции, построим серию задач максимизации для членов разложения $I_\varepsilon(x)$, представляя решение в виде ряда по целым степеням малого параметра и используя соответствующее разложение критерия $I_\varepsilon(x)$ в ряд по целым степеням ε , как в [10, 11].

Пусть

$$x(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon x^1 + \ldots \in X. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и раскладывая $I_\varepsilon(x)$ в ряд по степеням ε, имеем

$$I(x(\varepsilon)) = I_\varepsilon(x) = I^0(x^0) + \varepsilon I^1(x^0) + \varepsilon^2 I^2(x^1) + \ldots \to \max_{x^0, x^1, \ldots \in X} \tag{4}$$

или

(5)
$$I_\varepsilon(x) = c_1 \left(I_1(x^0) + \varepsilon \left(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + \ldots \right) +$$
$$+ \varepsilon \left(\sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} \alpha_k \left(\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + \ldots \right) =$$

$$= c_1 I_1(x^0) + \varepsilon \left[c_1 \left(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) \right] +$$
$$+\varepsilon^2 \left[\frac{c_1}{2} (x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k \left(\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 \right] + O(\varepsilon^3) =$$
$$= c_1 I_1(x^0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) + \varepsilon^2 \left[\frac{c_1}{2} (x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k \left(\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 \right] + \varepsilon^3 h(x^0, x^1) + O(\varepsilon^4) \to \max_{x^0, x^1, \ldots \in X}.$$

Здесь $h(x^0, x^1)$ — известная функция своих аргументов. На основе леммы о перестановке операции максимизации с разложением в регулярный ряд [**11**], при четных степенях параметра ε последовательно получаются оптимизационные задачи для x^0, x^1 и т. д., а при нечетных степенях параметра ε — известные функции предыдущих приближений.

Из представления (5) получаем, что главный вклад в искомую оптимальную альтернативу $x(\varepsilon)$ вносит x^0 — решение задачи

$$I^0(x^0) = c_1 I_1(x) \to \max_{x \in X}, \tag{6}$$

где последнее выражение — главная часть критерия (2), а коэффициент $c_1 \left(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + \sum\limits_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0)$ при первой степени ε в разложении (5) в силу необходимого условия оптимальности для x^0 принимает вид

$$\sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0). \tag{7}$$

Последнее выражение есть чувствительность по значению функции линейной свертки (2) к изменению параметра ε (или чувствительность оптимального значения функции (2)).

Учитывая гладкость критериальных функций и ограниченность множества X, легко показать, что имеет место

Утверждение 1. *При выполнении условий 1, 2 в задаче (2) найдется такое достаточно малое ε_0, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для* *чувствительности по значению линейной свертки*

$$I^1(x^0) = \sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) \tag{8}$$

имеет место соотношение $I^*_\varepsilon = I^*_0 + \varepsilon I^1(x^0) + O(\varepsilon^2)$, *где* $I^*_\varepsilon = \max\limits_{x\in X} I_\varepsilon(x)$, $I^*_0 = I^0(x^0) = c_1 I_1(x) \to \max\limits_{x\in X}$.

Знание чувствительности оказывается полезным при качественном анализе влияния изменений весов на общую эффективность линейной свертки. Так, если чувствительность отрицательная, то небольшое увеличение весов небазовых критериев, не нарушающее упорядоченности критериев, приводит к уменьшению общей эффективности, а соответствующее уменьшение весов — увеличивает общую эффективность. Если же чувствительность положительная, то при увеличении весов небазовых критериев с сохранением прежней упорядоченности общая эффективность — возрастает, а при уменьшении — убывает.

Далее, из (5) следует, что для нахождения x^1-чувствительности решения задачи (2) к изменениям параметра ε, имеем задачу

$$\frac{1}{2} c_1 (x^1)^T \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}(x^0) x^1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k \left(\frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0) \right)^T x^1 \to \max_{x^1}. \tag{9}$$

Из условия 2 следует, что гессиан функции есть отрицательно определенная матрица и поэтому точка максимума в (9) — искомая чувствительность решения — имеет следующее представление

$$x^1 = -\left(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}(x^0) \right)^{-1} \sum_{k=2}^{m} \frac{\alpha_k}{c_1} \frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0). \tag{10}$$

Из (10) и свойств гессиана следует, что чувствительность x^1 зависит явно от всех весов и градиентов небазовых критериев.

Используя (10), субоптимальная альтернатива первого порядка для задачи (2), или асимптотическое приближение первого порядка, получается из (3) и имеет вид

$$\tilde{x}(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon x^1 = x^0 - \left(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2}(x^0) \right)^{-1} \sum_{k=2}^{m} \frac{c_k}{c_1} \frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0). \tag{11}$$

Теперь, применяя традиционные рассуждения при построении асимптотического приближения решения вариационных задач методом малого параметра (см. [**11**]), нетрудно получить, что имеет место доказанное в [**10**]

Утверждение 2. *Если при выполнении условий* 1, 2 *в задаче* (2) *найдется достаточно малое* ε_0 *такое, что* $\tilde{x}(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon x^1 \in X$ *при всех* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *тогда*

(1) *решение* x^*_ε *задачи* (2) *существует и единственно в некоторой окрестности решения* x^0, *и при этом имеет место оценка* $\|x^*_\varepsilon - \tilde{x}(\varepsilon)\| \leq C\varepsilon^2$;
(2) $I_\varepsilon(x^0) \leq I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon))$, *причем неравенство строгое, если* $x^1 \neq 0$;
(3) $I^*_\varepsilon - I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon)) \leq C\varepsilon^4$, *где* $C > 0$ — *некоторая постоянная.*

Если вычисляемая по формуле (10) чувствительность x^1 решения x^*_ε ненулевая, то она формирует коррекцию к x^0 и приближение (11) к решению обеспечивает точность приближения порядка $O(\varepsilon^2)$, а по значению функции линейной свертки — порядка $O(\varepsilon^4)$.

Следствие 1. *Значение критерия линейной свертки имеет вид*

$$I^*_\varepsilon = I_\varepsilon(x^*_\varepsilon) = I_1(x^0) + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} \alpha_k I_k(x^0) + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[(x^1)^T \frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2} x^1 + 2\sum_{k=2}^{m} \alpha_k \left(\frac{\partial I_k(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 \right] + O(\varepsilon^3).$$

Последнее представление следует из (5), поскольку в силу необходимых условий оптимальности для базовой альтернативы выполняются соотношения $\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x} = 0$.

Таким образом, несмотря на сравнительно малый вклад εx^1 в общую эффективность (порядка $O(\varepsilon^2)$), эта коррекционная альтернатива может существенно влиять на изменение базовой альтернативы, приближая ее к оптимальной.

Следующий член $\varepsilon^2 I^2(x^1)$ в представлении (4) вносит существенно меньший (на порядок по ε) вклад в общий критерий эффективности $I_\varepsilon(x)$. Он формируется на основе определения x^1 решением задачи максимизации квадратичного критерия, порождаемого гессианом базового и градиентами остальных критериев.

Так как в общем случае базовая альтернатива не является оптимальной для небазовых критериев, величины норм их градиентов, вычисляемых вдоль базовой альтернативы, говорят о степени пренебрежения базовой альтернативой целей, формируемых небазовыми критериями.

Например, если вдоль базовой альтернативы значение $\left\|\frac{c_s}{c_1}\frac{\partial I_s}{\partial x}(x^0)\right\|$ больше значений взвешенных норм градиентов других небазовых критериев, тогда больший вклад в чувствительность x^1 вносит слагаемое, порождаемое соответствующим небазовым критерием с номером s.

Отметим также, что сравнение норм векторов $\frac{\alpha_k}{c_1}\frac{\partial I_k}{\partial x}(x^0)$, $k = 2,\ldots,m$, намечает другой подход к сравнению критериев между собой с точки зрения альтернативы x^0, и при этом это ранжирование может не совпадать с первоначальным.

Пример. Пусть рассматриваются три задачи максимизации:

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= -0.5((x_1-1)^2+(x_2-0.5)^2) \to \max,\\
I_2(x) &= -0.5((x_1-2)^2+(x_2-3)^2) \to \max,\\
I_3(x) &= -0.5((x_1-4)^2+(x_2-6)^2) \to \max,
\end{aligned}$$

и для линейной свертки предложены веса $c_1 = 0.75$, $c_2 = 0.15$, $c_3 = 0.1$. Имеем

$$I(x) = \sum_{k=1}^{3} c_k I_k(x) = -0.375((x_1-1)^2+(x_2-0.5)^2)-$$
$$-\,0.075((x_1-2)^2+(x_2-3)^2) - 0.05((x_1-4)^2+(x_2-6)^2) \to \max_{x\in X}.$$

Пусть при этом $\varepsilon = 0.1$, $\alpha_2 = 1.5$, $\alpha_3 = 1$, тогда

$$I(x) = I_\varepsilon(x) = I_1(x) + \varepsilon\sum_{k=2}^{3}\alpha_k I_k(x) \to \max_{x\in X}.$$

Нетрудно видеть, что точное решение $x^*(\varepsilon)$ в задаче на максимум линейной свертки (2) имеет вид $x^*_\varepsilon = \binom{1.45}{1.425}$, и оптимальное значение критерия линейной свертки $I(x^*_\varepsilon) = -1.977$. Вдоль очевидного базового решения $x^0 = \binom{1}{0.5}$ линейная свертка принимает значение $I_\varepsilon(x^0) = -2.506$. Находя градиенты всех частных критериев и гессиан базового критерия вдоль x^0, из (9) получаем поправку к базовой альтернативе $x^1 = \binom{6}{12.333}$. Теперь из (11) следует, что $\tilde{x}(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon x^1 = \binom{1.6}{1.733}$.

Вычисляя $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon)) = -2.036$, замечаем, что $I_\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon)) = -2.036 > I_\varepsilon(x^0) = -2.506$, т. е. с ростом номера асимптотического приближения растет точность аппроксимации по оптимизируемому критерию и значение критерия свертки вдоль асимптотического приближения значительно возрастает.

Хотя вес второго критерия в 1.5 раза выше веса третьего критерия, вклад третьего критерия в коррекционную альтернативу примерно во столько же раз выше соответствующего вклада второго критерия. Последнее обстоятельство связано с различной величиной соответствующих градиентов, и поэтому величины реакций сторон при определении коррекций в базовой альтернативе определяются не только весами критериев, но и величинами норм их градиентов.

2. Чувствительность решения для метода идеальной точки

Перейдем к анализу чувствительности для метода идеальной точки при наличии главного критерия.

Для простоты изложения рассмотрение проведем на классе трехкритериальных задач. Пусть известен вектор

$$I^*_{ideal} = (I^*_1, I^*_2, I^*_3)^T, \quad I^*_k = \max_{x\in X} I_k(x),\ k = 1,2,3,$$

определяющий так называемую идеальную точку в пространстве критериев.

Предположим, что положительно определенная матрица весов R, ранжирующая среднеквадратичные отклонения компонент текущего критериального вектора $I_r(x) = (I_1(x)\ I_2(x)\ I_3(x))^T$ от их идеальных значений I^*_k, $k = 1,2,3$, имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & \varepsilon R_2 \\ \varepsilon R_2^T & \varepsilon R_3 \end{pmatrix} > 0,$$

где ε — малый параметр, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 < 1$, и

$$R_1 = r_{11}, \quad R_2 = (r_{12}\ r_{13}), \quad R_3 = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Будем искать альтернативу $x \in X \subseteq R^n$ путем решения задачи

$$I_\varepsilon(x) = (I_r(x) - I^*_{ideal})^T R (I_r(x) - I^*_{ideal}) \to \min_{x\in X}. \tag{12}$$

С учетом представлений $I_r(x) = \begin{pmatrix} L_r(x) \\ D_r(x) \end{pmatrix}$, $I^*_{ideal} = \begin{pmatrix} L^*_{ideal} \\ D^*_{ideal} \end{pmatrix}$, где $L_r(x) = I_1(x)$, $D_r(x) = \begin{pmatrix} I_2(x) \\ I_3(x) \end{pmatrix}$, $L^*_{ideal} = I^*_1$, $D^*_{ideal} \begin{pmatrix} I^*_2 \\ I^*_3 \end{pmatrix}$, из (11) имеем

$$\begin{aligned}
(13) \qquad & \min_{x\in X}\{I_\varepsilon(x) = (I_r(x) - I^*_{ideal})^T R(I_r(x) - I^*_{ideal})\} = \\
&= \min_{x\in X}\{[(L_r(x) - L^*_{ideal})^T R_1(L_r(x) - L^*_{ideal}) + \\
&+ 2\varepsilon(L_r(x) - L^*_{ideal})^T R_2(D_r(x) - D^*_{ideal}) + \\
&+ \varepsilon(D_r(x) - D^*_{ideal})^T R_3(D_r(x) - D^*_{ideal})]\} = \\
&= \{[r_{11}(I_1(x) - I_1^*)^2 + \varepsilon r_{22}(I_2(x) - I_2^*)^2 + \varepsilon r_{33}(I_3(x) - I_3^*)^2 + \\
&+ 2\varepsilon r_{12}(I_1(x) - I_1^*)(I_2(x) - I_2^*) + 2\varepsilon r_{13}(I_1(x) - I_1^*)(I_3(x) - I_3^*) + \\
&+ 2\varepsilon r_{23}(I_2(x) - I_2^*)(I_3(x) - I_3^*) + \ldots]\} \to \min_{x\in X}.
\end{aligned}$$

Подставим (3) в (13) и разложим $I_\varepsilon(x(\varepsilon))$ в ряд по степеням ε:

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(x(\varepsilon)) = \Bigg\{ & r_{11}\Bigg[(I_1(x^0) - I_1^*) + \\
&+ \varepsilon\left(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\Bigg]^2 + \\
&+ \varepsilon r_{22}\left[(I_2(x^0) - I_2^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_2(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_2(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right]^2 + \\
&+ \varepsilon r_{33}\left[(I_3(x^0) - I_3^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_3(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_3(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right]^2 + \\
&+ 2\varepsilon r_{12}\left[(I_1(x^0) - I_1^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right] \times \\
&\times \left[(I_2(x^0) - I_2^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_2(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_2(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right] + \\
&+ 2\varepsilon r_{13}\left[(I_1(x^0) - I_1^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_1(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right] \times \\
&\times \left[(I_3(x^0) - I_3^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_3(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_3(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right] + \\
&+ 2\varepsilon r_{23}\left[(I_2(x^0) - I_2^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_2(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_2(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right] \times \\
&\times \left[(I_3(x^0) - I_3^*) + \varepsilon\left(\frac{\partial I_3(x^0)}{\partial x}\right)^T x^1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(x^1)^T\frac{\partial^2 I_3(x^0)}{\partial x^2}x^1 + \ldots\right]\Bigg\} \\
&\to \min_{x^0, x^1, \ldots \in X}
\end{aligned}$$

или

$$I_\varepsilon(x(\varepsilon)) = \varepsilon\{r_{22}(I_2(x^0) - I_2^*)^2 + \\ + r_{33}(I_3(x^0) - I_3^*)^2 + 2r_{23}(I_2(x^0) - I_2^*)(I_3(x^0) - I_3^*)\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ 2r_{22}(I_2(x^0) - I_2^*) \left(\frac{\partial I_2(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + 2r_{33}(I_3(x^0) - I_3^*) \left(\frac{\partial I_3(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + \right. \\ \left. + 2r_{23} \left[(I_2(x^0) - I_2^*) \left(\frac{\partial I_3(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 + (I_3(x^0) - I_3^*) \left(\frac{\partial I_2(x^0)}{\partial x} \right)^T x^1 \right] \right\} + \\ + H(x^0, x^1)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \to \min_{x^0, x^1, \ldots \in X}. \tag{14}$$

Учитывая гладкость критериев, ограниченность X, а также равенства $I_1(x^0) = I_1^*$, $\frac{\partial I_1(x^0)}{\partial x} = 0$, получаем

Утверждение 3. *При выполнении условий 1, 2 найдется достаточно малое ε_0, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для чувствительности по значению $I^1(x^0)$ функции $I_\varepsilon(x)$ в задаче (13) имеет место соотношение*

$$I^1(x^0) = r_{22}(I_2(x^0) - I_2^*)^2 + r_{33}(I_3(x^0) - I_3^*)^2 + \\ + r_{23}(I_2(x^0) - I_2^*)(I_3(x^0) - I_3^*), \tag{15}$$

и при этом $I_\varepsilon^* = \varepsilon I^1(x^0) + O(\varepsilon^2)$.

Здесь, как и в случае задачи (2), чувствительность по критерию является функцией весов и значений неглавных критериев вдоль базовой альтернативы. Указанная чувствительность является также положительной функцией отклонений значений неглавных критериев от максимальных значений этих критериев и поэтому из (15) следует, что при слабом уменьшении весов неглавных критериев близость к идеальной точке в пространстве всех критериев возрастает, а при слабом увеличении тех же весов – уменьшается.

Заключение

Определение чувствительности по решению в рассмотренных задачах приводит к приближенному аналитическому описанию семейства решений многокритериальной задачи, как функций весов, а определение чувствительности по значению общего критерия позволяет описать приближенно изменение значения общих критериев в зависимости от изменения весов. Итак, функции чувствительности, позволяют создать наглядный механизм обратной связи в итеративной схеме принятия решения, т.е. на «ошибки» в предыдущем выборе решения появляется реакция в следующей итерации, и таким образом, последовательно учитываются интересы всех сторон в процессе принятия решений.

Список литературы

[1] Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. *Чувствительность систем управления*, Наука, М., 1981, 464 с. ↑ 48

[2] Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский. «Вычислительные и приближенные методы оптимального управления», Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., т. **14**, ВИНИТИ, М., 1977, с. 101–166. ↑ 48

[3] А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев. «Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления», Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., т. **20**, ВИНИТИ, М., 1982, с. 3–77. ↑ 48

[4] М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина. «Сингулярные возмущения в задачах управления», *Автоматика и телемеханика*, 2006, №1, с. 3–51. ↑ 48

[5] Т. Саати. *Принятие решений при зависимостях и обратных связях. Аналитические сети*, ЛКИ, М., 2008, 360 с. ↑ 48

[6] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (eds.). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, Springer, 2004, 1085 p. ↑ 48

[7] А. Б. Петровский. *Теория принятия решений*, Академия, М., 2009, 400 с. ↑ 48

[8] В. Д. Ногин. *Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход*, Физматлит, М., 2005, 176 с. ↑ 48

[9] В. Д. Ногин. «Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации», *Искусственный интеллект и принятие решений*, 2014, №4, с. 73–82. ↑ 48

[10] М. Г. Дмитриев. «Приближенное решение оптимизационной задачи для линейной свертки многих критериев на основе метода малого параметра», *Технологии техносферной безопасности*, 2010, №3(31), 0421000050/0046, URL: http://agps-2006.narod.ru/ttb/2010-3/16-03-10.ttb.pdf ↑ 49,51

[11] С. В. Белокопытов, М. Г. Дмитриев. «Решение классических задач оптимального управления с погранслоем», *Автомеханика и телемеханика*, 1989, №7, с. 71–82. ↑ 49,50,51

Об авторах:

Александр Олегович Блинов
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
e-mail: aleblinov@yandex.ru

Михаил Геннадьевич Дмитриев
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
e-mail: mdmitriev@mail.ru

Пример ссылки на эту публикацию:

А. О. Блинов, М. Г. Дмитриев. «Чувствительность решения некоторых возмущенных задач оптимизации», *Программные системы: теория и приложения*, 2016, **7**:1(28), с. 47–59.
URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_47-59.pdf

Alexander Blinov, Michael Dmitriev. *The sensitivity of the solution of some optimization problems with perturbation.*

Abstract. There are consider optimization problem with perturbations. It represents the problems of searching the extremum of functions of many variables in the application of methods of linear convolution and an ideal point where some of the weighting coefficients depend on a small parameter. On the basis of the asymptotic analysis of the problem there is describes the sensitivity of the solution to change a small parameter that allows to construct the solution correction. (*in Russian*).

Key words and phrases: linear convolution, ideal point, a small parameter.

References

[1] Ye. N. Rozenvasser, R. M. Yusupov. *Sensitivity control systems*, Nauka, M., 1981 (in Russian), 464 p.

[2] F. L. Chernous'ko, V. B. Kolmanovskiy. "Computational and approximate methods of optimal control", *J. Soviet Math.*, **12**:3 (1979), pp. 310–353.

[3] A. B. Vasil'yeva, M. G. Dmitriyev. "Singular perturbations in optimal control problems", *J. Soviet Math.*, **34**:3 (1986), pp. 1579–1629.

[4] M. G. Dmitriyev, G. A. Kurina. "Singular perturbations in control problems", *Autom. Remote Control*, **67**:1 (2006), pp. 1–43.

[5] T. Saaty. *Decision making with dependence and feedback: the analytic network process*, second edition, Rws Publications, Pittsburgh, USA, 2001, 350 p.

[6] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (eds.). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, Springer, 2004, 1085 p.

[7] A. B. Petrovskiy. *Decision theory*, Akademiya, M., 2009 (in Russian), 400 p.

[8] V. D. Nogin. *Decision-making in multicriteria environment: quantitative approach*, Fizmatlit, M., 2005 (in Russian), 176 p.

[9] V. D. Nogin. "Weighted sum scalarization in multicriteria optimization", *Artficial intelligence and decision making*, 2014, no.4, pp. 73–82 (in Russian).

[10] M. G. Dmitriyev. "Near decision of the problem to optimization for linear folding of the many criterion on base of the method of the small parameter", *Technology of technosphere safety*, 2010, no.3(31), 0421000050/0046 (in Russian), URL: http://agps-2006.narod.ru/ttb/2010-3/16-03-10.ttb.pdf

[11] S. V. Belokopytov, M. G. Dmitriyev. "Solving classical problems of optimal control with a boundary layer", *Autom. Remote Control*, **50**:7 (1989), pp. 907–917.

Sample citation of this publication:

Alexander Blinov, Michael Dmitriev. "The sensitivity of the solution of some optimization problems with perturbation", *Program systems: theory and applications*, 2016, **7**:1(28), pp. 47–59. (*In Russian*).

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_47-59.pdf