ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №3(30), 2016, с. 71–78

УДК 517.977

В. И. Гурман, И. В. Расина

Сети дискретных операторов

Аннотация. Рассматриваются сети дискретных операторов как обобщение класса неоднородных дискретных систем (НДС), для которых ставится задача оптимального управления. Для последней формулируются достаточные условия оптимальности в виде обобщения и развития работ Кротова.

Ключевые слова и фразы: сети операторов, достаточные условия оптимальности, дискретные системы.

Введение

Системы неоднородной структуры широко распространены на практике и в настоящее время являются предметом активного изучения представителями различных научных школ и направлений. К ним традиционно относят дискретно-непрерывные, логико-динамические, гибридные и гетерогенные динамические системы, а также системы с переменной структурой. В данной работе рассматриваются системы неоднородной сетевой структуры. Для их моделирования и исследования применяется иерархический подход: строится двухуровневая модель, нижний уровень которой представлен различными управляемыми дискретными системами однородной структуры, а верхний — сетью операторов, обеспечивающей целенаправленное взаимодействие дискретных подсистем. Эту модель можно рассматривать как дальнейшее развитие неоднородной дискретной модели, предложенной и исследованной в ряде работ авторов [1, 2]. Ставится задача оптимального управления, и приводятся достаточные условия оптимальности управления — аналоги известных достаточных условий оптимальности Кротова [3], в которых фигурируют разрешающие функции типа Кротова для каждого уровня.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: проекты № 15-01-01915_а , № 15-01-01923_а, № 15-07-09091_а.

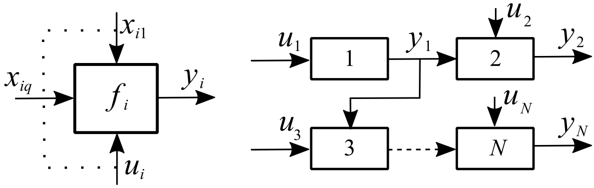

Рис. 1.

1. Сеть операторов и достаточные условия оптимальности

Пусть имеется N операторов произвольной природы $f_k : \mathbb{X}_k \times \mathbb{U}_k \to \mathbb{Y}_k$,

$$y_k = f(k, x_k, u_k). \tag{1}$$

Вводятся подмножества $\mathbb{X}_{kq}$, такие что $\prod_{q=1}^{n_k} \mathbb{X}_{kq} = \mathbb{X}_k$.

Говорят, что выход оператора l *подается на вход* оператора k, если для некоторого q имеет место равенство $\chi(k, q, x_k) = y_l$, где $\chi(k, q, x_k)$ — оператор проектирования на подмножество $\mathbb{X}_{kq}$.

Пусть рассматриваемые операторы соединены указанным образом по некоторой схеме, представляемой ориентированным графом (рис. 1).

Предполагается, что для данного k между номерами q и l имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Иными словами, $\mathbb{X}_k$ олицетворяет множество входов k-го оператора, занятых в соединениях, а $\mathbb{U}_k$ — множество свободных входов. Такая модель называется *сетью операторов*. Специальный случай сети — цепочка произвольных операторов — может рассматриваться как общая модель динамической системы с переменной структурой.

Рассматривается задача о минимуме функционала

$$I = \sum_{1}^{N} I_k(y_k) = \sum_{1}^{N} I_k(f(k, x_k, u_k)) = \sum_{1}^{N} f^0(k, x_k, u_k) \tag{2}$$

на множестве $\mathbf{D}$ наборов $m = \{(x_k, u_k)\}, \quad k = 1, \ldots, N$, связанных указанными соотношениями сети и возможными дополнительными ограничениями вида $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$, где $\mathbf{B}(k)$ — заданное при каждом k множество. Требуется найти минимизирующую последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$, т.е. такую, что $I(m_s) \to \inf\limits_{\mathbf{D}} I$.

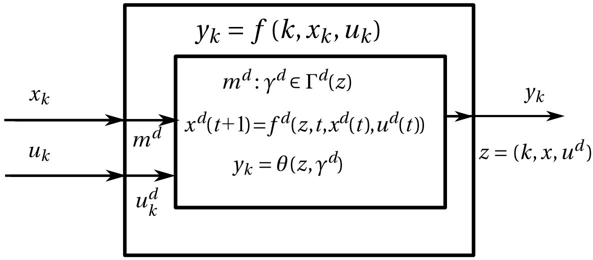

Рис. 2.

Вводится множество $\mathbf{E}$ элементов m, не связанных сетевыми условиями — равенствами $\chi(k, j, x_k) = y_l$. Строится обобщенный лагранжиан:

$$L = -\sum_{k=1}^{N} R(k, x_k, u_k),$$

$$R(k,x,u) = \sum_{l=1}^{N} (\varphi(k,l,f(k,x,u)) - \varphi(l,k,\chi(k,l,x))) - f^0(k,x,u), \tag{3}$$

где $\varphi(k, l, y_k)$, $k, l = 1, \dots, N$ — произвольные функционалы, такие что $\varphi(k, l, y_k) \equiv 0$, если равенство $\chi(k, j, x_k) = y_l$ отсутствует (отсутствует связь $l \to k$).

Теорема 1. *Пусть имеются последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы $\varphi(k, l, y_k)$ такие, что $R(k, x_{ks}, u_{ks}) \to \mu(k)$, $k = 1, \dots, N$, где $\mu(k) = \sup \{R(k, x, u) \colon (x, u) \in \mathbf{B}(k)\}$.*

Тогда $\{m_s\}$ минимизирует функционал I на $\mathbf{D}$.

Доказательство теоремы и первый вариант модели сети операторов даны в [4].

2. Двухуровневая модель с обыкновенными дискретными системами

Предлагается следующая конкретизация абстрактной сети операторов (рис. 2).

Представим условие $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$ в форме $x_k \in \mathbf{X}(k)$, $u_k \in \mathbf{U}(k, x_k)$, где $\mathbf{X}(k)$ — проекция на $\mathbb{X}_k$, $\mathbf{U}(k, x_k)$ — сечение $\mathbf{B}(k)$ при данных k, x_k. Пусть на некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K} = \{1, \dots, N\}$ имеем $u = (v, m^d)$, где u^d — произвольной природы, а m^d — некоторый дискретный управляемый процесс, так что сечение множества $\mathbf{U}(k,x)$ при фиксированных x и v есть допустимое множество $\mathbf{D}^d(k,x,v)$ с соответствующей дискретной системой

$$\dot{x}^d(t+1) = f^d(z,t,x^d(t),u^d(t)),\ t \in \mathbf{T}(z), \tag{4}$$

$$x^d \in \mathbf{X}^d(z,t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^d \in \mathbf{U}^d(z,t,x^d) \subset \mathbb{R}^{p(k)}, \quad z = (k,x,v).$$

$$\gamma^d = (t_I, x_I^d, t_F, x_F^d) \in \{\gamma^c\colon t_I = \tau(z), x_I^d = \xi(z), t_F = \vartheta(z), x_F^d \in \mathbf{\Gamma}^d(z)\}.$$

Решением этой комбинированной системы будем считать набор $m = (x(k), u(k)) \in \mathbf{D}$, где при $k \in \mathbf{K}'$: $u(k) = (v(k), m^d(k)),\ m^d \in \mathbf{D}^d(t, x(k), u^d(k))$.

Задача оптимизации формулируется для верхнего уровня. Требуется минимизировать функционал (1). Рассматривается множество $\mathbf{E}$ элементов m, не связанных сетевыми условиями — равенствами $\chi(k,j,x_k) = y_l$ и дифференциальными связями нижнего уровня. Вводятся произвольные функционалы $\varphi(k,l,y_k)$, $k,l = 1,\ldots,N$, такие что $\varphi(k,l,y_k) \equiv 0$, если равенство $\chi(k,j,x_k) = y_l$ отсутствует (отсутствует связь $l \to k$).

Для номеров $k \in \mathbf{K}'$ вводится дополнительно функционал $\varphi^d(z,t,x^d)$. Основные конструкции достаточных условий оптимальности имеют следующий вид [2]:

$$L = -\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'} R_k - \sum_{\mathbf{K}'} R'_k,$$

где

$$R_k(k,x,u) = \sum_{l=1}^{N} (\varphi(k,l,f(k,x,u)) - \varphi(k,l,\chi(l,k,x)) - f^0(k,x,u),$$

$$R'_k = G(z,\gamma^d) + \sum_{l=1}^{N} \left(R^d(z,t,x^d(t),u^d(t)) - \mu^d(t)\right),$$

$$G\left(z,\gamma^d\right) = \sum_{l=1}^{N} \left(\varphi\left(k,l,y_k\right) - \varphi\left(l,k,\chi\left(l,k,x\right)\right)\right) +$$

$$+\varphi^d\left(z,t_I,x_I^d\right) - \varphi^d\left(z,t_F,x_F^d\right) + \sum_{l=1}^{N} \mu^d\left(z,t\right) - I_k\left(\theta\left(z,\gamma^d\right)\right)),$$

$$R^d\left(z,t,x^d,u^d\right) = \varphi^d(t+1, f^d\left(z,t,x^d(t),u^d(t)\right) - \varphi^d\left(z,t,x^d(t)\right),$$

$$\mu^d\left(z,t\right) = \sup\left\{R^d\colon x^d \in \mathbf{X}^d(z,t),\ u^d \in \mathbf{U}^d\left(z,t,x^d\right)\right\},$$

где $y_k = \theta\left(z, \gamma^d\right)$ при $k \in \mathbf{K}'$, $y_k = f(k, x, u)$ при $k \in \mathbf{K} \backslash \mathbf{K}'$. Обозначим

$$\mu'(k) = \sup\left\{G\left(z, \gamma^d\right) : \gamma^d \in \mathbf{\Gamma}^d(z)\right\},\ x_I^d \in \mathbf{X}^d(z, t_I),$$

$$x_F^d \in \mathbf{X}^d(z, t_F),\ u^d \in \mathbf{U}^d(k),\ x \in \mathbf{X}(k).$$

Легко убедиться, что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т.е. при выполнении отброшенных связей. Для этого рассмотрим вначале выражение для функции R^d. При выполнении рекуррентной цепочки (4)

$$R^d(z, t, x^d, u^d) = \varphi^d\left(z, t+1, x^d(t+1)\right) - \varphi^d\left(z, t, x^d(t)\right).$$

Тогда

$$-\sum_{t_I}^{t_F-1} R^d(z) + \varphi^d\left(z, t_I, x_I^d\right) - \varphi^d\left(z, t_F, x_F^d\right)) =$$

$$-\sum_{t_I}^{t_F-1} (\varphi^d\left(z, t+1, x^d(t+1)\right) - \varphi^d\left(z, t, x^d(t)\right) + \varphi^d\left(z, t_I, x_I^d\right) -$$

$$-\varphi^d\left(z, t_F, x_F^d\right) = -\sum_{t_I}^{t_F-1} (\varphi^d\left(z, t, x^d(t)\right) - \varphi^d\left(z, t, x^d(t)\right)).$$

С учетом выполнения сетевых связей $\chi(k, j, x_k) = y_l$ получим:

$$\sum_{K'} R'_k = \sum_{K'} \sum_{l=1}^{N} m(\varphi(k, l, y_k) - \varphi(l, k, y_l)) +$$

$$+ \sum_{t_I}^{t_F-1} \mu^d(z, t) - I_k(y_k) - \sum_{t_I}^{t_F-1} \mu^d(z, t).$$

Тогда

$$\sum_{K'} R'_k = \sum_{K'} \sum_{l=1}^{N} (\varphi(k, l, y_k) - \varphi(l, k, y_l)) - I_k(y_k).$$

Окончательно имеем:

$$L = -\sum_{K/K'} R_k - \sum_{K'} R'_k =$$

$$= -\sum_{k,l=1}^{N} (\varphi(l, k, x(l)) - \varphi(k, l, x(k)) + \sum_{k=1}^{N} I_k(y_k)) = I.$$

Отсюда непосредственно вытекают следующие утверждения:

Теорема 2.

1. *Для любых* φ, φ^d *и* $m \in \mathbf{D}$ *имеет место оценка*

$$I(m) - I_* \leq \Delta = L(m) - L_*, \quad I_* = \inf_{\mathbf{D}} I, \quad L_* = \inf_{\mathbf{E}} L. \tag{5}$$

2. *Пусть имеются два элемента* $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ *и* $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{E}$ *и функционалы* φ *и* φ^d, *такие, что* $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, *и* $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Теорема 3. *Пусть имеются последовательность элементов* $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ *и пара* (φ, φ^d) *такие, что:*

1) $R\left(k, x_s\left(k\right), u_s\left(k\right)\right) \to \mu\left(k\right);$

2) $\sum\limits_{t_I}^{t_F-1} \left(R^d\left(z_s(k), t, x_s^d\left(k,t\right), U_s^d\left(k,t\right)\right) - \mu^d\left(z_s(k), t\right)\right) \to 0, \ \ k \in \mathbf{K}';$

3) $G\left(z_s(k), \gamma_s^d(k)\right) - \mu'\left(k\right) \to 0, \ \ k \in \mathbf{K}'$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ *— минимизирующая для* I *на* $\mathbf{D}$.

Доказательства теорем 2 и 3 аналогичны приведенным в [**2**]. Сформулированные достаточные условия позволяют строить конкретные методы и алгоритмы оптимизации.

3. Заключение

В работе представлена иерархическая модель сети дискретных операторов, для которой поставлена задача оптимального управления. Даны достаточные условия оптимальности типа Кротова.

Список литературы

[1] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Метод глобального улучшения управления для неоднородных дискретных систем», *Программные системы: теория и приложения*, **7**:1 (2016), с. 171–186, URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_171-186.pdf ↑ 71

[2] И. В. Расина. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*, Физматлит, М., 2014, 160 с. ↑ 71,74,76

[3] В. Ф. Кротов. «Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем», *ДАН СССР*, **172**:1 (1967), с. 18–21. ↑ 71

[4] В. И. Гурман, *Оптимизация дискретных систем*, учебное пособие, Ирк. Гос ун-т, Иркутск, 1976, 121 с. ↑ 73

Пример ссылки на эту публикацию:

В. И. Гурман, И. В. Расина. «Сети дискретных операторов», *Программные системы: теория и приложения*, 2016, **7**:3(30), с. 71–78.
URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_3_71-78.pdf

Об авторах:

Владимир Иосифович Гурман
д.т.н., профессор, зав. кафедрой системного анализа УГП им. А. К. Айламазяна, известный специалист в области теории управления, системного анализа и их приложений, автор и соавтор более 200 статей и 20 монографий
e-mail: vig70@mail.ru

Ирина Викторовна Расина
д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий
e-mail: irinarasina@gmail.com

Vladimir Gurman, Irina Rasina. *Nets of discrete operators.*

Abstract. Generalization of nonhomogeneous discrete systems class — nets of discrete operators — are considered. For this class optimal control problem is stated. For this problem sufficient optimality conditions are formulated in the form of generalization and development of Krotov's works. (*In Russian*).

Key words and phrases: nets of operators, sufficient optimality conditions, discrete systems.

References

[1] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "Global control improvement method for non-homogeneous discrete systems", *Programmnyye sistemy: teoriya i prilozheniya*, **7**:1 (2016), pp. 171–186 (in Russian), URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_171-186.pdf

[2] I. V. Rasina. *Hierarchical control models for systems with inhomogeneous structures*, Fizmatlit, M., 2014 (in Russian), 160 p.

[3] V. F. Krotov. "Sufficient Optimality Conditions for Discrete Controllable Systems", *DAN SSSR*, **172**:1 (1967), pp. 18–21 (in Russian).

[4] V. I. Gurman, *Optimization of discrete systems*, uchebnoye posobiye, Irk. Gos un-t, Irkut·sk, 1976 (in Russian), 121 p.

Sample citation of this publication:

Vladimir Gurman, Irina Rasina. "Nets of discrete operators", *Program systems: theory and applications*, 2016, **7**:3(30), pp. 71–78. (*In Russian*).
URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_3_71-78.pdf