ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №4(35), 2017, с. 101–115

УДК 511.11+004.222.2+511.12

Н. Н. Непейвода

Аддитивные системы представления чисел: несколько замечаний

Аннотация. Фибоначчиева система является общеизвестным примером аддитивных систем представления чисел. В данной работе рассматриваются общие аддитивные системы и устанавливаются некоторые их свойства, в частности, условия, при которых возможно представление натуральных, целых и действительных чисел. Даются вычислительные характеристики действий. Завершается статья совокупностью задач различной трудности.

Ключевые слова и фразы: представление чисел, аддитивные системы, система Фибоначчи, конечные автоматы.

1. Аддитивные системы

Вопросы представления чисел в нестандартных системах интенсивно исследуются в последние десятилетия ([1], где заодно имеется прекрасная библиография). Получены глубокие результаты, касающиеся экспоненциальных систем представления чисел (где каждый следующий разряд является очередной степенью основания системы). Многое сделано и для мультипликативных систем (где каждый следующий разряд образуется умножением основания данного разряда на произведение предыдущих). Но имеется ещё один любопытный класс систем, в которых разряды являются числами, формально почти независимыми друг от друга.

Определение 1. Аддитивная система $\mathbb{A}$ — *бесконечная по крайней мере в одну из сторон последовательность положительных действительных чисел, называемых* основаниями,

$$f_i \ (i \in \mathbb{Z},\ p < i < q),\ p \geqslant -\infty,\ q \leqslant +\infty,$$

обладающая следующими свойствами:

(1) $\forall i, j \in \mathbb{Z}(p < i < j < q \Rightarrow 0 < f_i \leqslant f_j$;

Статья выполнена в рамках госзадания, тема 0077-2014-0032.

DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-101-115

(2) *для любого i число членов $f_j = f_i$ конечно.*

Представление *действительного числа x в системе $\mathbb{A}$ — последовательность c_i элементов 0, 1 с той же областью определения, что и f, такая, что*

$$\sum_{p<i<q} c_i \cdot f_i = x. \tag{1}$$

В случае бесконечного числа цифр 1 сумма есть сумма ряда.

Аддитивная система целая, *если все f_i при $i \geqslant 0$ натуральные числа, $f_0 = 1$. Целые числа в такой системе представляются в форме*

$$\sum_{i=0}^{k} c_i * f_i. \tag{2}$$

По аналогии с традиционными системами целые числа i из диапазона $p < i < q$ разрядами, *число c_i называется* цифрой *i-того разряда.*

Таким образом, числа представляются как суммы оснований из некоторой последовательности. Общность данного определения показывается следующими примерами.

Определение 2. *Будем говорить, что позиционная система $\mathbb{P}$* эквивалентна *аддитивной системе $\mathbb{A}$, если для каждого разряда i позиционной системы имеется отрезок $p_i \leqslant j \leqslant q_i$ разрядов аддитивной системы, такие, что:*

(1) *для каждой пары представлений одного и того же числа x в системах $\mathbb{P}, \mathbb{A}$ i-тая цифра системы $\mathbb{P}$ однозначно определяется последовательностью цифр c_j представления $\mathbb{A}$ в отрезке $[p_i, q_i]$*

(2) *для каждой цифры i-того разряда системы $\mathbb{P}$ имеется последовательность цифр s_i системы $\mathbb{A}$ в отрезке $[p_i, q_i]$, соответствующая ей, такая, что при замене каждой цифры c_i представления числа x в системе $\mathbb{P}$ на последовательность s_i получается представление числа x в системе $\mathbb{A}$.*

Пример 1. *Экспоненциальные и мультипликативные системы со стандартным набором цифр (цифры i-того разряда от 0 до $p_i - 1$, где p_i — основание i-того разряда) могут быть эквивалентно выражены как аддитивные. В соответствующей последовательности число $p_1 \cdot \cdots \cdot p_{i-1}$ повторяется $p_i - 1$ раз.*

Соответственно, двоичная система эквивалентна аддитивной с последовательностью оснований $1, 2, 4, 8, 16\ldots$ *Троичная — аддитивной* $1, 1, 3, 3, 9, 9, 27, 27\ldots$ *Факториальная* [**2**] *— аддитивной* $1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, \ldots$*, где каждое* n *повторяется* $n - 1$ *раз.*

Из этих примеров видно, что представление в аддитивной системе однозначно переводится в мультипликативное, а в обратную сторону неоднозначно. Однозначность в обе стороны выполняется лишь для мультипликативных систем с цифрами $0, 1$*, например, для экспоненциальной по основанию* $\sqrt{2}$ *и аддитивной с основаниями*

$$\ldots, \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ 2,\ 2\cdot\sqrt{2},\ 4,\ 4\cdot\sqrt{2}, \ldots$$

Пример 2. *Примером аддитивной системы для натуральных чисел, не сводящейся к традиционным позиционным, является фибоначчиевая* [**3**, **4**]. *Последовательность Фибоначчи* [**5**] *определяется рекурсивно:*

$$f_0 = f_1 = 1; \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Для использования в качестве аддитивной системы достаточно эту последовательность начать с первого члена. Любое натуральное положительное число является суммой чисел Фибоначчи, и формально запись в этой системе подобна записи в двоичной системе.

Определение 3. Правилом замены *называется правило, позволяющее в любом месте и без учёта всех остальных членов представления заменить некоторый сегмент цифр на другой сегмент той же длины. Совокупность правил замены называется* полной, *если любое правило замены в данной системе является производным относительно неё, то есть получается применением фиксированной конечной последовательности правил данной системы.*

Пример 3. *Пример правила замены:* $110 \leftrightarrow 001$ *для системы Фибоначчи. Тем самым любое представление чисел в системе Фибоначчи можно преобразовать в такое, где нет двух единиц подряд. С этим свойством связано, в частности, использование фибоначчиевой системы при помехоустойчивом кодировании и во многих других областях информатики* [**6**].

А правило $11010 \leftrightarrow 00001$ *для этой системы является производным относительно предыдущего.*

Пример 4. *Примером аддитивной системы для рациональных чисел является гармоническая. или система египетских (аликвотных) дробей. Область определения последовательности оснований* $-\infty < i < 0$. *Сами основания суть* $1/|i|$. *Любое положительное рациональное число представляется в этой системе как сумма конечной последовательности различных дробей вида* $1/|i|$ [7]. *Например,*

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

Недостатком этой системы является очень большое число знаков, необходимых для представления чисел, больших 2.

Теорема 1. *Любое натуральное число может быть выражено в целой аддитивной системе с последовательностью оснований* f_n *тогда и только тогда, когда для любого* n *выполнено неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \geqslant f_{n+1} - 1. \tag{3}$$

Доказательство. **Представимость**. Воспользуемся возвратной индукцией[1]. Пусть для всех $0 < m < n$ числа, меньшие $\sum\limits_{i=0}^{m} f_i$, представимы в виде $\sum\limits_{i=0}^{m-1} c_i \cdot f_i$, где все $c_i \in \{0, 1\}$. Покажем, что то же выполнено и для n. Возьмём произвольное $f_{n-1} < x < f_n$. Положим $y = x - f_{n-1}$. По предположению индукции y представляется в виде

$$y = \sum_{i=0}^{n-2} c_i \cdot f_i. \tag{4}$$

Тогда

$$x = f_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \cdot f_i. \tag{5}$$

Видно, что здесь работает стандартный для перевода из одной системы в другую жадный алгоритм.

[1]Возвратная индукция используется в корректной логической форме, не требующей явного выделения базиса и шага индукции (см., например, [8]).

$$\forall n\, (\forall m (m < n \Rightarrow A(m)) \Rightarrow A(n)) \Rightarrow \forall x\, A(x).$$

Если посылка посылки всегда ложна, то, согласно таблицам истинности, посылка истинна, и можно не заботиться о значении выражений в $A(m)$.

Необходимость. Если

$$\sum_{i=0}^{n} f_i < f_{n+1} - 1$$

то $f_{n+1} - 1$ не представляется.

□

Однозначность представления даже для целых систем выполнена лишь для двоичной системы.

2. Фибоначчиева система и её вариации

Рассмотрим свойства фибоначчиевой системы для вычислений.

Определение 4. *Нормальная форма числа в фибоначчиевой системе — представление, в котором две цифры* 1 *не идут подряд* [6]. Нормализацией *называется преобразование представления к нормальной форме.*

Предложение 1.1. *Нормализация является автоматным преобразованием лишь в том случае, если число подаётся в конечный автомат, начиная со старшего разряда.*

Доказательство. Если число подаётся со старшего разряда, то 0 заменяется на 1 в том и только в том случае, когда две предыдущих цифры 1. Непосредственно предшествующая цифра после такой замены в любом случае 0, а для второй возобновляются правила для старшего 0. Тем самым мы описали действие автомата, нормализующего числа.

Неавтоматность нормализации, начиная с младшего разряда, доказывается следующим примером. Первая 1 в числе вида $011\ldots10$ становится 0 лишь в том случае, когда последовательность следующих за ней единиц нечётной длины. Но распознать это за заранее ограниченное число шагов автомат, движущийся снизу, не может. □

Рассмотрим теперь сложение чисел в фибоначчиевой системе. Оно оказывается как максимум квадратичным по числу операций, но не автоматным. В самом деле, имеют место тождества

$$2 \cdot f_n = f_{n-2} + f_{n-1} + f_n = f_{n-2} + f_{n+1} \tag{6}$$

$$3 \cdot f_n = f_{n-2} + f_n + f_{n+1} = f_{n-2} + f_{n+2} \tag{7}$$

На их базе легко строится алгоритм, складывающий два числа Фибоначчи с переносами вверх и вниз. Неавтоматность даже в случае нормализованных слагаемых доказывается примером сложения двух чисел вида

$$0010101\dots1010101^{*}01010101\dots0100 \tag{8}$$

$$0001010\dots0101001^{*}00101010\dots1000 \tag{9}$$

Определить, во что переходят второй 0 и последний 0 можно, зная лишь чётности повторений числа обеих периодических подпоследовательностей, окружающих критические 1, помеченные $*$.

М. Барр [9, 10] предложил обобщения чисел Фибоначчи произвольного натурального порядка больше 2. n-боначчи числа задаются рекурсивным определением [11–18]

$$\begin{cases} g_0 = g_1 = \dots = g_{n-1} = 0; \; g_n = 1; \\ g_{i+n} = \sum\limits_{j=i}^{i+n-1} g_j \end{cases} \tag{10}$$

Эти числа удовлетворяют условию теоремы о представимости и задают квазидвоичную систему с правилом замены

$$1\cdots10 \;\leftrightarrow\; 0\cdots01 \text{ (цифр 1 и 0 по } n).$$

Для чисел Барра аналогично доказывается автоматность в одну сторону нормализации и неавтоматность сложения.

Кубичный по числу действий алгоритм умножения для системы Фибоначчи легко конструируется, исходя из тождеств [5, 6]

$$f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}; \tag{11}$$

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2\cdot n+1}. \tag{12}$$

3. Аликвотные системы

На базе гармонического ряда, как уже замечено, можно построить систему представления всех положительных рациональных чисел [19, 20].

$$a_{-i} = \frac{1}{i}.$$

На самом деле это система представления всех положительных действительных чисел. Это следует из факта, что в гармоническом ряде имеется подпоследовательность, сходящаяся к любому наперёд заданному действительному числу $x > 0$. Для наших целей усилим результат, воспользовавшись следующим фактом о гармоническом ряде.

Теорема 2. (*Серпинский 1956* [**7**]) *Для каждого* $n > 0$ *любое рациональное число представляется как сумма конечного числа различных* $\frac{1}{i}$ *с* $i > n$, *причём это представление вычисляется примитивно-рекурсивно.*

В статье Серпинского примитивная рекурсивность конструкции явно не подчёркивалась, но она очевидно следует из его построений.

Таким образом, каждое рациональное число имеет конечное представление, максимальный разряд в котором меньше наперёд заданного. Исходя из этого, можно усилить теорему о представлении действительных чисел.

Теорема 3. *Если задана монотонно возрастающая последовательность* α *рациональных чисел, сходящаяся к действительному числу* $x > 0$, *то можно построить примитивно-рекурсивное относительно* α *представление* x *в аликвотной системе.*

Доказательство. Построим последовательность дробей следующим образом. Разложим некоторое $\alpha(n)$ в аликвотную дробь. Найдём наибольшее m_n среди $1/m$ в этом разложении. Разложим $\alpha(n+1)-\alpha(n)$ в аликвотную дробь, все члены которой меньше $1/m_n$. Присоединим это разложение к предыдущему. Повторяем этот процесс для $\alpha(n+2) - \alpha(n+1)$ и так далее. □

Следствие 3.1. *По разложению действительного числа в непрерывную дробь можно примитивно-рекурсивно построить его аликвотное представление.*

Достаточно взять чётные подходящие дроби в качестве монотонной последовательности.

Теперь рассмотрим неожиданный результат. Как известно (см. работы [**21–23**], которые последовательно усиливали результаты о невычислимости), ни в одной позиционной системе сложение, умножение и другие арифметические операции, кроме, возможно, одноместного минуса, невычислимы. В аликвотной системе мы имеем следующую теорему.

Теорема 4. *По аликвотным представлениям чисел $x, y > 0$ можно примитивно-рекурсивно относительно них построить аликвотное представление чисел $x + y$, $x \cdot y$.*

Доказательство. **Сумма**. Рассмотрим очередные члены аликвотных разложений $1/\alpha(n)$, $1/\beta(n)$. Пусть k — наибольший знаменатель дроби, использованный ранее в представлении $\alpha + \beta$. Разложим $1/\alpha(n) + 1/\beta(n)$ в аликвотную дробь из членов со знаменателями, большими k. Присоединим её к ранее построенному разложению.

Произведение. Аналогично, но раскладываем

$$\frac{1}{\alpha(1) \cdot \beta(n)} + \frac{1}{\alpha(2) \cdot \beta(n-1)} + \cdots + \frac{1}{\alpha(n-1) \cdot \beta(2)} + \frac{1}{\alpha(n) \cdot \beta(1)} .$$

□

Данное преимущество стандартной аликвотной системы нивелируется колоссальным числом членов, необходимым для представления числа. Однако доказанные теоремы открывают путь к новому классу систем представления чисел, поскольку их справедливость зависит не от конкретной формы системы, а от следующего её свойства.

Определение 5. *Аддитивная система* обладает свойством аликвотности*, если любое рациональное число для любого заданного $\varepsilon > 0$ имеет вычисляемое примитивно рекурсивно представление с конечным числом единиц, включающее лишь основания, меньшие ε.*

Пример 5. *Система, обладающая свойством аликвотности, но заодно слишком большой избыточностью:*

$$\begin{array}{c} \ldots,\ \frac{1}{n}\ (n-1\ \textit{раз}),\ \ldots, \\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}, \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\ \ldots \end{array} \tag{13}$$

4. Симметризация систем

Пусть теперь цифрами являются $-1, 0, 1$. Будем называть такую систему *симметричной*. Первой из симметричных системы была троичная симметричная, разработанная Фибоначчи [**3**]. Затем Коши предложил десятичную симметричную систему с избыточностью [**24**]. Наш вариант ближе к избыточной симметризации двоичной системы, предложенной в [**25**].

Обобщим результат теоремы 1.

Теорема 5. *Любое целое число может быть выражено в симметричной целой аддитивной системе с последовательностью оснований f_n тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n} f_i \geqslant f_{n+1} - 1. \tag{14}$$

Доказательство. Ведём индукцию по условию

Для всех n выразимы все числа в интервале

$$-f_n < x < f_n.$$

В остальном доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

□

Пример 6. *Обобщения чисел n-боначчи вида*

$$\begin{cases} g_0 = g_1 = \cdots = g_{n-1} = 0; \ g_n = 1; \\ g_{i+n} = 2 \cdot \sum\limits_{j=i}^{i+n-1} g_j \end{cases} \tag{15}$$

с цифрами $-1, 0, 1$ задают квазитроичную симметричную систему с правилами замены

$$1 \cdots 10 = -1 \cdots -11$$
$$-1 \cdots -10 = 1 \cdots 1 -1$$
$$(\text{цифр } 1 \text{ и } -1 \text{ по } n).$$

В случае $n = 2$ эта последовательность называется $2, 2$-фибоначчи [**26**].

5. Задачи и проблемы

5.1. Лёгкие

(*1*) Построить программу сложения и умножения целых чисел в фибоначчиевой системе.

(*2*) Построить программу сложения целых чисел в произвольной n-боначчиевой системе.

(*3*) Построить программу сложения и умножения целых чисел в симметричной фибоначчиевой системе.

(*4*) Построить программу сложения целых чисел в произвольной симметричной n-боначчиевой системе.

(5) Построить программу сложения двух чисел в аликвотной системе (длина исходных разложений и величина исходных знаменателей может быть разумным образом ограничена).

(6) Построить программу сложения двух чисел в симметричной аликвотной системе (длина исходных разложений и величина исходных знаменателей может быть разумным образом ограничена).

(7) Построить программу умножения двух чисел в аликвотной системе (длина исходных разложений и величина исходных знаменателей может быть разумным образом ограничена).

(8) Построить программу умножения двух чисел в симметричной аликвотной системе (длина исходных разложений и величина исходных знаменателей может быть разумным образом ограничена).

(9) Какие новые правила замены появляются в симметризованной системе Фибоначчи? Приведите три примера.

5.2. Средние

(1) Построить программу умножения целых чисел в произвольной n-боначчиевой системе.

(2) Построить программу умножения целых чисел в произвольной симметричной n-боначчиевой системе.

(3) Построить программу перевода цепных дробей в аликвотные разложения.

(4) Выяснить, верна ли теорема о вычислимости аликвотного представления для задания действительных чисел в виде последовательность вложенных друг в друга сегментов $[a_i, b_i]$.

(5) Выяснить, верна ли теорема о представимости аликвотного представления для задания действительных чисел как сходящихся последовательностей рациональных чисел.

(6) Ряд обратных к простым $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ расходится. Может ли он быть использован в качестве аликвотной системы?

(7) В последние десятилетия интенсивно рассматриваются позиционные системы общего вида [**27**–**30**]. Основанием служит некоторое комплексное число p, $|p| > 1$. Задаётся конечное множество цифр $\mathbb{C}$, среди которых обязательно присутствуют 0 и 1. Число представляется как сумма ряда $\sum\limits_{-\infty}^{i=k} c_i \cdot p^i$, где $c_i \in \mathbb{C}$. Во многих таких системах имеются правила замены. Например, в троичной системе с цифрами $\{0, 1, 2, 4\}$ таковым является $40 \leftrightarrow 11$.

Каковы условия наличия правила замены?

5.3. Трудные

(1) Ряд обратных к простым $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ расходится. Может ли он быть использован в качестве аликвотной системы, если его пополнить всеми степенями данных дробей?

(2) В конструктивном математическом анализе установлено, что вычислимая возрастающая ограниченная сверху последовательность может не иметь конструктивного предела (теорема Шпекера). В оригинальной конструкции это связано с возможностью в непредсказуемый момент получить достаточно большое приращение. У нас члены аликвотного разложения убывают. Каковы соотношения наших теорем с теоремой Шпекера?

(3) В конструктивном анализе функция «целая часть числа» невычислима. В системе с аликвотным свойством (13) вроде бы она вычислима, поскольку задаётся явно. В чём дело?

(4) Верно ли, что система из единственного правила $110 \leftrightarrow 001$ является полной для системы Фибоначчи?

(5) Какие правила замены верны в аликвотной системе?

(6) Построить программу сложения чисел в симметричной системе Фибоначчи, требующую одного прохода по слагаемым.

5.4. Проблемы

(1) Построить аликвотную систему, позволяющую достаточно короткие представления чисел и представления результатов хотя бы некоторых арифметических действий, не более чем линейно превосходящие по длине представления исходных чисел.

Список литературы

[1] C. Frougny, E. Antová, M. Svobodová. “Minimal digit sets for parallel addition in non-standard numeration systems”, *Journal of Integer Sequences*, **16**:13.2 (2013), pp. 1–36. ↑ 101

[2] Ch. A. Laisant. “Sur la numération factorielle, application aux permutations”, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **16** (1888), pp. 176–183 (in French). ↑ 103

[3] L. Pisano. *Fibonacci’s Liber Abaci: A Translation into Modern English of the Book of Calculation*, Springer, 2002. ↑ 103,108

[4] É. Lucas. *Théorie des nombres*. V. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1891 (in French), 392 p. ↑ 103

[5] “Sequence A000045”, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A000045 ↑ 103,106

[6] Н. Н. Воробьёв. *Числа Фибоначчи*, Наука, М., 1978 (in Russian), 144 с. ↑ 103,105,106

[7] W. Sierpinski. “Sur les décompositiones de nombres rationelles en fractions primaries”, *Mathesis*, **65** (1956), pp. 16–32 (in French). ↑ 104,107

[8] С. К. Клини, *Введение в метаматематику*, Пер. с англ., Мир, М., 1957 (in Russian), 528 с. ↑ 104

[9] M. Barr. “Mathematical Amusements”, *The Sketch*, 1913, pp. 32. ↑ 106

[10] M. Barr. “Parameters of beauty”, *Architecture (NY)*, **60** (1929), pp. 325. ↑ 106

[11] D. Zh. Hui. *The formula of t-step Fibonacci sequence*, 2008 (in Chinese, in English), URL: http://bbs.emath.ac.cn/forum.php, 667.4. ↑ 106

[12] *Sequence A000073*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A000073 ↑ 106

[13] *Sequence A000078*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A000078 ↑ 106

[14] *Sequence A001591*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A001592 ↑ 106

[15] *Sequence A001591*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A001592 ↑ 106

[16] *Sequence A122189*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A122189 ↑ 106

[17] *Sequence A079262*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A079262 ↑ 106

[18] *Sequence A104144*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A104144 ↑ 106

[19] W. Creyaufmüller. *Aliquot Sequences*, 2016, URL: http://www.aliquot.de/aliquote.htm ↑ 106

[20] И. Стюарт. *Величайшие математические задачи*, ГИФМЛ, М., 2015 (in Russian), 460 с. ↑ 106

[21] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reele Zahl eine dezimalbruchentwicklung? *Mathematische Annalen*, **83** (1921), pp. 201–210. ↑ 107

[22] В. А. Успенский. *Лекции о вычислимых функциях*, М., 1960, 492 с. ↑ 107

[23] Н. Н. Непейвода, И. Н. Григоревский, Е. П. Лилитко. «О представлении действительных чисел», *Программные системы: теория и приложения*, **5**:4 (22) (2014), с. 105–121 (in Russian), URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_105-121.pdf ↑ 107

[24] A. Cauchy. “Sur les moyens d’éviter les erreurs dans les calculs numériques”, *C.R. Acad. Sc. Paris série I*, **11** (1840), pp. 789–798 (in French). ↑ 108

[25] C. Y. Chow, J. E. Robertson. “Logical design of a redundant binary adder”, Proc. 4th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, *C.R. Acad. Sc. Paris série I*, 1978, pp. 109–115. ↑ 108

[26] *Sequence A002605*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A002605 ↑ 109

[27] A. Rényi. “Representations for real numbers and their ergodic properties”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, **8** (1957), pp. 477–493. ↑ 110

[28] W. Parry. “On the β-expansions of real numbers”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, **11** (1960), pp. 401–416. ↑ 110

[29] D. E. Knuth. “An imaginary number system”, *CACM*, **3** (1960), pp. 245–247. ↑ 110

[30] W. Penney. “A “binary” system for complex numbers”, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **12** (1965), pp. 247–248. ↑ 110

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. С. В. Знаменский*

Пример ссылки на эту публикацию:

Н. Н. Непейвода. «Аддитивные системы представления чисел: несколько замечаний», *Программные системы: теория и приложения*, 2017, **8**:4(35), с. 101–115. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_4_101-115.pdf

Об авторе:

Николай Николаевич Непейвода

Главный научный сотрудник ИПС РАН, научный руководитель работ. Более 200 публикаций по конструктивной математике, логике, информатике

e-mail: nepejvodann@gmail.com

Nikolai Nepejvoda. *Additive representations of numbers: some remarks.*

Abstract. Fibonacci system is the best known example of additive systems. Here considered general additive systems/ Some criteria ate stated of possibility to represent natural, integer and real numbers/ Computational properties of some arithmetical operations are estimated. Paper contains also some problems. (*In Russian*).

Key words and phrases: number representation, additive systems, Fibonacci system, finite automata.

References

[1] C. Frougny, E. Antová, M. Svobodová. "Minimal digit sets for parallel addition in non-standard numeration systems", *Journal of Integer Sequences*, **16**:13.2 (2013), pp. 1–36.
[2] Ch. A. Laisant. "Sur la numération factorielle, application aux permutations", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **16** (1888), pp. 176–183 (in French).
[3] L. Pisano. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of the Book of Calculation*, Springer, 2002.
[4] É. Lucas. *Théorie des nombres.* V. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1891 (in French), 392 p.
[5] "Sequence A000045", *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A000045
[6] N. N. Vorob'yëv. *Fibonacci numbers*, Nauka, M., 1978 (in Russian), 144 p.
[7] W. Sierpinski. "Sur les décompositiones de nombres rationelles en fractions primaries", *Mathesis*, **65** (1956), pp. 16–32 (in French).
[8] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*, Wolters-Noordhoff, 1952, 550 p.
[9] M. Barr. "Mathematical Amusements", *The Sketch*, 1913, pp. 32.
[10] M. Barr. "Parameters of beauty", *Architecture (NY)*, **60** (1929), pp. 325.
[11] D. Zh. Hui. *The formula of t-step Fibonacci sequence*, 2008 (in Chinese, in English), URL: http://bbs.emath.ac.cn/forum.php, 667.4.
[12] *Sequence A000073*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A000073
[13] *Sequence A000078*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A000078
[14] *Sequence A001591*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A001592
[15] *Sequence A001591*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A001592
[16] *Sequence A122189*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A122189
[17] *Sequence A079262*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A079262

RAS project 012013354594.

DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-101-115

[18] *Sequence A104144*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A104144

[19] W. Creyaufmüller. *Aliquot Sequences*, 2016, URL: http://www.aliquot.de/aliquote.htm

[20] I. Stewart. *The Great Mathematical Problems: Marvels and Mysteries of Mathematics*, Profile Books Ltd, 2014, 352 p.

[21] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reele Zahl eine dezimalbruchentwicklung? *Mathematische Annalen*, **83** (1921), pp. 201–210.

[22] V. A. Uspenskiy. *Lectures on computable functions*, M., 1960 (in Russian), 492 p.

[23] N. N. Nepeyvoda, I. N. Grigorevskiy, Ye. P. Lilitko. "New representation of real numbers", *Program Systems: Theory and Applications*, **5**:4 (22) (2014), pp. 105–121 (in Russian), URL: URLhttp://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_105-121.pdf

[24] A. Cauchy. "Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques", *C.R. Acad. Sc. Paris série I*, **11** (1840), pp. 789–798 (in French).

[25] C. Y. Chow, J. E. Robertson. "Logical design of a redundant binary adder", Proc. 4th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, *C.R. Acad. Sc. Paris série I*, 1978, pp. 109–115.

[26] *Sequence A002605*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation, 2017, URL: http://oeis.org/A002605

[27] A. Rényi. "Representations for real numbers and their ergodic properties", *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, **8** (1957), pp. 477–493.

[28] W. Parry. "On the β-expansions of real numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, **11** (1960), pp. 401–416.

[29] D. E. Knuth. "An imaginary number system", *CACM*, **3** (1960), pp. 245–247.

[30] W. Penney. "A "binary" system for complex numbers", *Journal of the Association for Computing Machinery*, **12** (1965), pp. 247–248.

Sample citation of this publication:

Nikolai Nepejvoda. "Additive representations of numbers: some remarks", *Program systems: Theory and applications*, 2017, **8**:4(35), pp. 101–115. (*In Russian*). URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_4_101-115.pdf