ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №4(35), 2017, с. 179–195

УДК 517.977

Е. Ф. Сачкова

Невырожденные анормальные управления в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8)

Аннотация. Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Приводится описание канонических анормальных управлений. Получены формулы для соответствующих сопряженных векторов принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова и фразы: субриманова задача, анормальные управления, анормальные траектории.

Введение

Данная статья является продолжением исследования, начатого в статье [1], в которой были изучены вырожденные анормальные экстремальные пары в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. В данной статье изучаются невырожденные анормальные экстремальные пары в этой задаче. Проинтегрирована вертикальная подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина в анормальном случае. Получено описание класса анормальных управлений.

Полученные результаты являются основой для исследования анормальных траекторий на нестрогую и строгую анормальность. Если множество нестрого анормальных траекторий непусто, то такие траектории целесообразно исследовать на оптимальность.

1. Постановка задачи и необходимые теоретические сведения

В этом разделе сформулируем задачу оптимального управления и принцип максимума Понтрягина для нее.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387).

DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-179-195

1.1. Задача оптимального управления

Нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ ставится как следующая двухточечная задача оптимального управления. Для двух заданных точек x^0, $x^1 \in \mathbb{R}^8$ требуется найти решение задачи оптимального управления

$$\dot{x}_1 = u_1, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = u_2, \tag{2}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{x_2}{2}u_1 + \frac{x_1}{2}u_2, \tag{3}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}u_2, \tag{4}$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}u_1, \tag{5}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{x_1^3}{6}u_2, \tag{6}$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{x_1 x_2^2}{4}u_1 + \frac{x_1^2 x_2}{4}u_2, \tag{7}$$

$$\dot{x}_8 = -\frac{x_2^3}{6}u_1, \tag{8}$$

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1, \tag{9}$$

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min, \tag{10}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Допустимые управления выбираются из класса измеримых и ограниченных на отрезке вектор-функций $u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2)$, допустимые траектории — из класса липшицевых вектор-функций $x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([0, T], \mathbb{R}^8)$.

Задача оптимального управления (1)–(10) является простейшей нильпотентной субримановой задачей на четырехступенной группе Ли. Она задает нильпотентную аппроксимацию субримановой структуры общего положения в восьмимерном пространстве с двумерным управлением, в окрестности точки общего положения, см. [2].

Систему (1)–(8) можно переписать в векторном виде

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x),$$

где $X_1(x)$, $X_2(x)$ суть следующие векторные поля на $\mathbb{R}^8$:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{11}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7}. \tag{12}$$

С помощью скобок Ли построим базис в алгебре Ли, порожденный полями X_1, X_2:

$$\begin{aligned}[X_1,\, X_2] = X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial}{\partial x_5} + {}\\ + \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_6} + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_8},\end{aligned} \tag{13}$$

$$[X_1,\, X_3] = X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1\frac{\partial}{\partial x_6} + x_2\frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{14}$$

$$[X_2,\, X_3] = X_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} + x_1\frac{\partial}{\partial x_7} + x_2\frac{\partial}{\partial x_8}, \tag{15}$$

$$[X_1,\, X_4] = X_6 = \frac{\partial}{\partial x_6}, \tag{16}$$

$$[X_2,\, X_4] = \Big[X_1,\, X_5\Big] = X_7 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \tag{17}$$

$$[X_2,\, X_5] = X_8 = \frac{\partial}{\partial x_8}. \tag{18}$$

Последовательные степени распределения $\Delta = \operatorname{span}(X_1,\, X_2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \Delta + [\Delta,\, \Delta] = \operatorname{span}(X_1,\, X_2,\, X_3),\\ \Delta^3 &= \Delta^2 + [\Delta,\, \Delta^2] = \operatorname{span}(X_1,\, \dots,\, X_5),\\ \Delta^4 &= \Delta^3 + [\Delta,\, \Delta^3] = \operatorname{span}(X_1,\, \dots,\, X_8),\end{aligned}$$

откуда видно, что распределение Δ имеет *вектор роста*

$$(\dim \Delta_x,\, \dim \Delta_x^2,\, \dim \Delta_x^3,\, \dim \Delta_x^4) = (2,\, 3,\, 5,\, 8), \qquad x \in \mathbb{R}^8.$$

В силу инвариантности субримановой задачи относительно левых сдвигов на группе Ли $G \cong \mathbb{R}^8$, можно считать, что начальная точка есть единичный элемент $x^0 = 0$, см. [**1**].

Существование оптимальных траекторий в субримановой задаче (1)–(10) стандартно следует из теорем Рашевского–Чжоу и Филиппова [**3**]. Стандартным образом также можно перейти от задачи минимизации субримановой длины l к задаче минимизации действия

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min .$$

Первым этапом решения задачи оптимального управления является вычисление экстремалей с помощью принципа максимума Понтрягина.

1.2. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим кокасательное расслоение пространства состояний $T^*\mathbb{R}^8 = \{(x,\psi) \,|\, x \in \mathbb{R}^8,\ \psi \in T_x^*\mathbb{R}^8\}$, будем обозначать его элементы $\lambda = (x,\, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$. Определим функцию Понтрягина:

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \psi,\, u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x)\rangle + \frac{\nu}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right),$$

$$\lambda \in T^*\mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Принцип максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом, см. [**3**, **4**].

Теорема 1.1. *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $x(t)$ оптимальны, то существуют липшицева кривая $\lambda(t) = (x(t),\, \psi(t)) \in T^*\mathbb{R}^8$ и число $\nu \in \{-1,\, 0\}$, для которых следующие условия выполняются для п.в. $t \in [0,T]$:*

$$\dot\psi(t) = -\frac{\partial h_u^\nu}{\partial x}, \quad \dot x(t) = \frac{\partial h_u^\nu}{\partial \psi}, \tag{19}$$

$$h_{u(t)}^\nu(\lambda(t)) = \max_{v\in\mathbb{R}^2} h_v^\nu(\lambda(t)), \tag{20}$$

$$(\nu,\, \lambda(t)) \neq (0,0). \tag{21}$$

Кривая $\lambda(t)$ называется *экстремалью*, а удовлетворяющие условиям принципа максимума траектория $x(t)$ и управление $u(t)$ называются *экстремальными.* Случай $\nu = -1$ называется *нормальным*, а случай $\nu = 0$ — *анормальным.*

2. Интегрирование вертикальной подсистемы гамильтоновой системы ПМП

В этом разделе вычислим с помощью принципа максимума Понтрягина семейство невырожденных анормальных траекторий сопряженного пространства для задачи оптимального управления, сформулированной в предыдущем разделе.

2.1. Интегрирование вертикальной подсистемы ПМП в анормальном случае

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \psi, X_i(x) \rangle$, $\lambda = (x, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$, $i = 1, \ldots, 8$, тогда $h_u^\nu(\lambda) = u_1 h_1(\lambda) + u_2 h_2(\lambda) + \dfrac{\nu}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)$. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (19) в сопряженных переменных принимает вид, см. [3]:

$$
\begin{aligned}
&\dot h_1 = -h_3 u_2,\\
&\dot h_2 = h_3 u_1,\\
&\dot h_3 = h_4 u_1 + h_5 u_2,\\
&\dot h_4 = h_6 u_1 + h_7 u_2,\\
&\dot h_5 = h_7 u_1 + h_8 u_2,\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0,\\
&\dot x = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Пусть $\nu = 0$. Тогда функция Понтрягина имеет вид $h_u^0(\lambda) = u_1 h_1(\lambda) + u_2 h_2(\lambda)$. Если $u_1^2(t) + u_2^2(t) \equiv 0$, то $h_u^0(\lambda) \equiv 0$ и $\lambda(t) \equiv \mathrm{const}$, то есть система (22) находится в состоянии равновесия.

Пусть $u_1^2(t) + u_2^2(t) \not\equiv 0$, тогда из (22) следует $\lambda(t) \not\equiv \mathrm{const}$. В этом случае из условия максимума (20) для $h_u^0(\lambda)$ получаем равенства $h_1(\lambda) = h_2(\lambda) = 0$, дифференцируя которые, из первых двух уравнений системы (22) получим $h_3(\lambda) = 0$.

Будем рассматривать ненулевые управления $u_1^2(t) + u_2^2(t) \not\equiv 0$.

Итак, в анормальном случае при условии $u_1^2(t) + u_2^2(t) \not\equiv 0$ подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для сопряженных переменных h_i, или вертикальная подсистема, принимает вид

$$
\begin{aligned}
&h_1 = h_2 = h_3 = 0,\\
&h_4 u_1 + h_5 u_2 = 0,\\
&\dot h_4 = h_6 u_1 + h_7 u_2,\\
&\dot h_5 = h_7 u_1 + h_8 u_2,\\
&\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Рассмотрим уравнение системы (23)

$$h_4 u_1 + h_5 u_2 = 0. \tag{24}$$

Возможны следующие случаи:

1) *невырожденный случай*: $h_4^2 + h_5^2 \not\equiv 0$,

2) *вырожденный случай*: $h_4^2 + h_5^2 \equiv 0$.

В данной работе будем исследовать невырожденный случай (вырожденный случай рассмотрен в работе [1]).

В работе [1] было дано следующее

Определение 1. *Пусть даны управление $u \in L^\infty([a,\, b], \mathbb{R}^m)$ и функция $t \in \mathrm{Lip}([\tilde{a},\, \tilde{b}], [a,\, b])$. Управление*

$$\tilde{u}(s) = t'(s)u(t(s)) \in L^\infty([\tilde{a},\, \tilde{b}], \mathbb{R}^m)$$

называется обобщенной перепараметризацией управления $u(t)$.

Согласно предложению 1 статьи [1] обобщенная перепараметризация анормальной экстремальной пары сохраняет свойство анормальности.

Из уравнения (24) находим следующее выражение управления через сопряженные переменные:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -s'(t)h_5(s(t)) = -\alpha(t)h_5(s(t)), \\ u_2(t) &= s'(t)h_4(s(t)) = \alpha(t)h_4(s(t)), \end{aligned}$$

$$s(t) = \int_0^t \alpha(\theta)d\theta, \quad \alpha(t) \in L^\infty([0,\, T], \mathbb{R}), \quad s : [0,\, T] \to [0,\, S]. \tag{25}$$

Рассмотрим управления u_1, u_2 при $\alpha(t) \equiv 1$:

$$\begin{aligned} u_1(s) &= -h_5(s), \\ u_2(s) &= h_4(s). \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда система (23) примет вид

$$\begin{aligned} &h_1 = h_2 = h_3 = 0, \\ &u_1 = -h_5, \\ &u_2 = h_4, \\ &\dot{h}_4 = h_7 h_4 - h_6 h_5, \\ &\dot{h}_5 = h_8 h_4 - h_7 h_5, \\ &\dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Пусть начальное условие для системы (27) есть

$$h(0) = h^0 \neq 0. \tag{28}$$

Тогда задача Коши (27), (28) сводится к задаче Коши для автономного линейного ОДУ

$$\begin{pmatrix} \dot h_4 \\ \dot h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} \tag{29}$$

с начальными условиями

$$(h_4(0), h_5(0)) = (h_4^0,\, h_5^0). \tag{30}$$

Обозначим $C = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix}$, $\det C = \Delta$, $\mathbf{h} = (h_4,\, h_5)$. Задачу (29), (30) запишем кратко:

$$\dot{\mathbf{h}} = C\mathbf{h}, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}^0. \tag{31}$$

Будем рассматривать нетривиальный случай

$$\mathbf{h}^0 \neq 0. \tag{32}$$

Заметим, что если $\mathbf{h}^0 = 0$, то решением задачи Коши (31) является неподвижная точка $\mathbf{h}(t) = (0,\, 0)$, $t \in [0,\, T]$.

Определение 2. *Анормальные управления*

$$u_1^c(s) = -h_5(s), \quad u_2^c(s) = h_4(s), \quad s \in [0,\, S], \tag{33}$$

где $(h_4(s),\, h_5(s))$ есть решение задачи Коши (29), (30), назовем каноническими анормальными управлениями.

Заметим, что каноническое анормальное управление зависит от трех парамеров $(h_6,\, h_7,\, h_8)$ и от $\mathbf{h}^0$. Обозначим вектор параметров $(h_6,\, h_7,\, h_8) = \chi$, тогда запишем $u^c(t) = u^c(t; \chi,\, \mathbf{h}^0)$.

Анормальная экстремаль $\lambda^c(s;\chi,\,\mathbf{h}^0)=(x(s;\chi,\,\mathbf{h}^0),\,\psi^c(s;\chi,\,\mathbf{h}^0))$, $s\in[0,\,S]$, соответствующая каноническому анормальному управлению (33), имеет вид:

(34)

$$\psi^c(s;\chi,\,\mathbf{h}^0)=\sum_{i=4}^{5}h_i(s;\chi,\,\mathbf{h}^0)X_i(x_1(s;\chi,\,\mathbf{h}^0),x_2(s;\chi,\,\mathbf{h}^0))+ \\ +\sum_{i=6}^{8}h_iX_i(x_1(s;\chi,\,\mathbf{h}^0),x_2(s;\chi,\,\mathbf{h}^0))\neq 0,$$

$$x(s;\chi,\,\mathbf{h}^0)=\int_0^s -h_5(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0)X_1(x_1(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0),x_2(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0))+ \\ +h_4(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0)X_2(x_1(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0),x_2(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0))d\theta,$$

(35)

$$x_1(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0)=-\int_0^\theta h_5(\tau;\chi,\,\mathbf{h}^0)d\tau,\quad x_2(\theta;\chi,\,\mathbf{h}^0)=\int_0^\theta h_4(\tau;\chi,\,\mathbf{h}^0)d\tau.$$

Итак, результатом интегрирования гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина (ПМП) (22) в каноническом анормальном случае является каноническая анормальная пара (33)–(35) $(u^c(s;\chi,\,\mathbf{h}^0),\lambda^c(s;\chi,\,\mathbf{h}^0))$, $s\in[0,\,S]$.

Определение 3. *Управления*

(36) $$u(t)=\alpha(t)\tilde{u}^c(t),$$

где $\tilde{u}^c(t)=u^c(s(t))$ *есть перепараметризация управлений* (33), $s(t)$ *есть параметризация* (25), *назовем обобщенными анормальными управлениями.*

Заметим, что, вычислив канонические анормальные управления, можно описать, в силу произвольности функции $\alpha(t)\not\equiv 0$, весь класс невырожденных анормальных экстремальных управлений.

Итак, результатом интегрирования гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина (22) в анормальном случае является анормальная пара $(u^a(t),\lambda^a(t))$, где $u^a(t)$ есть управление (36), $\lambda^a(t)=\lambda^c(s(t))$, см. [1], $s:[0,\,T]\to[0,\,S]$.

2.2. Классификация анормальных параметров

Параметры χ определяют собственные значения матрицы C и, следовательно, тип носителей сопряженных траекторий $\mathbf{h}(s;\chi,\, \mathbf{h}^0)$. Опишем множество параметров χ в зависимости от знака $\det C = \Delta = -h_7^2 + h_6 h_8$. Назовем случаи:

1. $\Delta > 0$ эллиптическим;
2. $\Delta < 0$ гиперболическим;
3. $\Delta = 0$ параболическим.

Пусть χ^+ суть параметры, соответствующие $\Delta > 0$; χ^- суть параметры, соответствующие$\Delta < 0$; χ^0 суть параметры, соответствующие $\Delta = 0$; $\chi^{00} = 0$ суть параметры, соответствующие $\Delta = 0$ и $C = 0$.

2.3. Семейство сопряженных эллиптических траекторий

Найдем решение задачи Коши (31) в эллиптическом случае

$$\Delta > 0. \tag{37}$$

Поскольку все собственные значения матрицы C при $\Delta > 0$ чисто мнимые и различные: $\lambda_1 = i\delta$, $\lambda_2 = -i\delta$, $\delta = \sqrt{\Delta}$, то решения системы (31), (37) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_4^0 & \dot{h}_4^0/\delta \\ h_5^0 & \dot{h}_5^0/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta t \\ \sin\delta t \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} h_4^0 & \dot{h}_4^0/\delta \\ h_5^0 & \dot{h}_5^0/\delta \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Условие (32), то есть $\mathbf{h}^0 \neq 0$, имеет место. Несложно показать, что из условия $\Delta \neq 0$ и из определения вектора $\dot{\mathbf{h}}^0 = \dfrac{1}{\delta} C\mathbf{h}^0$ следует, что $\dot{\mathbf{h}}^0 \neq 0$.

Предложение 2.1. *Определитель матрицы Q отличен от нуля, если $\Delta \neq 0$.*

Доказательство. Так как система функций $\mathbf{h}(t) = \{h_4(t),\, h_5(t)\}$ является фундаментальной системой решений ОДУ (29), то вронскиан функций $\{h_4(t),\, h_5(t)\}$ всегда отличен от нуля, следовательно, $\det Q = \dfrac{1}{\delta} W(0) \neq 0$.

Следствие 2.1. *В случае* $\Delta \neq 0$ *вектор-функции* $\mathbf{h}(t)$ *и* $\dot{\mathbf{h}}(t)$ *являются линейно независимыми на отрезке* $[0, T]$.

Из предложения 2.1 следует, что, если $\Delta \neq 0$, то $\left(h_4^0\right)^2 + \left(\dot{h}_4^0\right)^2/\Delta \neq 0$, $\left(h_5^0\right)^2 + \left(\dot{h}_5^0\right)^2/\Delta \neq 0$. Перепишем решения системы (38) в виде

$$\begin{cases} h_4(t) = r_1 \cos(\delta t - \varphi_1), \\ h_5(t) = r_2 \cos(\delta t - \varphi_2), \end{cases} \tag{40}$$

$$r_1 = \sqrt{\left(h_4^0\right)^2 + \left(\dot{h}_4^0\right)^2/\Delta}, \quad r_2 = \sqrt{\left(h_5^0\right)^2 + \left(\dot{h}_5^0\right)^2/\Delta}. \tag{41}$$

Начальные фазы кривых $h_4(t)$ и $h_5(t)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &\cos\varphi_1 = \frac{h_4^0}{r_1}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{\dot{h}_4^0}{\delta r_1}, \\ &\cos\varphi_2 = \frac{h_5^0}{r_2}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{\dot{h}_5^0}{\delta r_2}, \\ &\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1. \end{aligned} \tag{42}$$

Кривую (38) можно задать неявно:

$$r_2^2 h_4^2 - 2r_1 r_2 \cos\varepsilon h_4 h_5 + r_1^2 h_5^2 - (\det)^2 Q = 0. \tag{43}$$

В эллиптическом случае $\det Q = r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = r_1 r_2 \sin\varepsilon \neq 0$, откуда вытекает условие $\varepsilon \neq 0, \pi$. Несложно показать, используя инварианты квадратичных форм второго порядка, см. [5], стр.152, что уравнение (43) задает на плоскости Oh_4h_5 эллипс, центрированный в начале координат. Действительно, вычислим инварианты квадратичной формы (43): $\delta_+ = (\det Q)^2$, на основании предложения 2.1 заключаем, что $\delta_+ > 0$, следовательно, кривая (43) есть центральная кривая второго порядка в эллиптическом случае; так как след $S = r_1^2 + r_2^2 > 0$, $\Delta_+ = -(\det Q)^4 \neq 0$ и $\Delta_+ S < 0$, то кривая второго порядка (43) есть действительный эллипс. Поскольку коэффициенты при первых степенях h_4 и h_5 равны нулю, то центр эллипса находится в начале координат. Можно утверждать, что носителями траекторий (38) $\mathbf{h}(t; \chi^+, \mathbf{h}^0)$ являются дуги эллипсов, центрированных в начале координат, выходящие из точек $\mathbf{h}^0 \neq 0$.

Замечание 2.1. *Система* (31), (37) *равносильна системе дифференциальных уравнений второго порядка, описывающей малые колебания сферического маятника:*

$$\begin{pmatrix} \ddot{h}_4 \\ \ddot{h}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

или

$$\ddot{\mathbf{h}} = -C^2\mathbf{h}.$$

Из предложения 2.1 следует, что начальные энергии маятников $(h_4(t),\ h_5(t))$ отличны от нуля и маятники всегда колеблются не в одной фазе и не в противофазе.

2.4. Семейство сопряженных гиперболических траекторий

Найдем решение задачи Коши (31) в гиперболическом случае

$$\Delta < 0. \tag{45}$$

Поскольку все собственные значения матрицы C при $\Delta < 0$ действительны и различны: $\lambda_1 = \delta$, $\lambda_2 = -\delta$, $\delta = \sqrt{|\Delta|}$, то решения системы (31), (45) имеют вид:

$$\mathbf{h}(t) = Q\gamma(t), \tag{46}$$

где Q есть матрица (39), $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\delta t \\ \operatorname{sh}\delta t \end{pmatrix}$.

Кривую (46) можно задать неявно:

$$\rho_{11}h_4^2 + 2\rho_{12}h_4h_5 + \rho_{22}h_5^2 - (\det Q)^2 = 0, \tag{47}$$

где $\rho_{11} = (\dot{h}_5^0)^2/\Delta - (h_5^0)^2$, $\rho_{22} = (\dot{h}_4^0)^2/\Delta - (h_4^0)^2$, $\rho_{12} = h_4^0h_5^0 - \dot{h}_4^0\dot{h}_5^0/\Delta$. Несложно показать, используя инварианты квадратичных форм второго порядка, см. [**5**, стр.152], что квадратичная форма (47) является гиперболой на плоскости Oh_4h_5. Действительно, вычислим инварианты квадратичной формы (47): $\delta_- = -(\det Q)^2$, на основании предложения 2.1 заключаем, что $\delta_- < 0$, следовательно, кривая (47) есть центральная кривая второго порядка в гиперболическом случае; так как $\Delta_- = -(\det Q)^4 \neq 0$, то кривая второго порядка (47) есть гипербола. Следовательно, можно утверждать, что носителями траекторий (46) $\mathbf{h}(t;\chi^-,\mathbf{h}^0)$ являются дуги гипербол, выходящие из точек $\mathbf{h}^0 \neq 0$.

2.5. Семейство сопряженных параболических траекторий

Найдем решение задачи Коши (31) в параболическом случае

$$\Delta = 0, \qquad C \neq 0. \tag{48}$$

Решение задачи Коши (31), (48) имеет вид:

$$\mathbf{h}(t) = (Ct + \mathrm{Id})\mathbf{h}^0. \tag{49}$$

Носителями траекторий $\mathbf{h}(t; \chi^0, \mathbf{h}^0)$ на плоскости Oh_4h_5 являются:

1. лучи $h_5 = kh_4$, выходящие из точек $\mathbf{h}^0 \neq 0$, если $C\mathbf{h}^0 \neq 0$; $k \neq 0$ есть коэффициент пропорциональности векторов $(h_7, -h_6)$ и $(h_8, -h_7)$;
2. неподвижные точки $P = \mathbf{h}^0 \neq 0$, если $C\mathbf{h}^0 = 0$.

2.6. Особый случай

Решение задачи Коши (31) в случае $\Delta = 0$, $C = 0 \Leftrightarrow \chi^{00} = 0$, $\dot{\mathbf{h}}^0 = 0$, имеют вид:

$$\mathbf{h}(t; \chi^{00}, \mathbf{h}^0)(t) = \mathbf{h}(t; 0, \mathbf{h}^0)(t) = \mathbf{h}^0. \tag{50}$$

Носителями траекторий на плоскости Oh_4h_5 являются неподвижные точки $P = \mathbf{h}^0 \neq 0$.

3. Сопряженные векторы в (2, 3, 5, 8)-задаче

В этом разделе будут приведены формулы для невырожденных канонических анормальных управлений в соответствии с классификацией параметров. Также будут получены формулы для сопряженных канонических анормальных векторов в субримановой (2, 3, 5, 8)-задаче.

3.1. Невырожденные анормальные управления

Пусть U есть семейство невырожденных анормальных управлений; класс управлений, соответствующих $\Delta > 0$, назовем эллиптическим и обозначим U_+; класс управлений, соответствующих $\Delta < 0$, назовем гиперболическими и обозначим U_-; класс управлений, соответствующих $\Delta = 0$, назовем параболическими и обозначим U_0; класс управлений, соответствующих $\Delta = 0$ и $C = 0$, назовем особым и обозначим U_{00}.

Приведем все классы канонических анормальных управлений.

- Эллиптический класс U^c_+:

$$
\begin{aligned}
u_1^c(t;\chi^+) &= -\left(h_5^0\cos\delta t + \frac{\dot h_5^0}{\delta}\sin\delta t\right),\\
u_2^c(t;\chi^+) &= h_4^0\cos\delta t + \frac{\dot h_4^0}{\delta}\sin\delta t.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

- Гиперболический класс U^c_-:

$$
\begin{aligned}
u_1^c(t;\chi^-) &= -\left(h_5^0\operatorname{ch}\delta t + \frac{\dot h_5^0}{\delta}\operatorname{sh}\delta t\right),\\
u_2^c(t;\chi^-) &= h_4^0\operatorname{ch}\delta t + \frac{\dot h_4^0}{\delta}\operatorname{sh}\delta t.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

- Параболический класс U^c_0:

 если $C\mathbf{h}^0 \neq 0$, то

$$
\begin{aligned}
&u_1^c(t;\chi^0) = -(k(h_7h_4^0 - h_6h_5^0)t + h_5^0), \quad k\neq 0,\\
&u_2^c(t;\chi^0) = (h_7h_4^0 - h_6h_5^0)t + h_4^0;
\end{aligned}
\tag{53}
$$

 если $C\mathbf{h}^0 = 0$, то

$$
\begin{aligned}
u_1^c(t;\chi^0) &= -h_5^0,\\
u_2^c(t;\chi^0) &= h_4^0.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

- Класс особых управлений U^c_{00}:

$$
\begin{aligned}
u_1^c(t;\chi^{00}) &= u_1^c(t;0) = -h_5^0,\\
u_2^c(t;\chi^{00}) &= u_2^c(t;0) = h_4^0.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

С помощью обобщенных перепараметризаций (36) канонических анормальных управлений (51)–(55) можно получить все множество анормальных управлений $U = U_+ \cup U_- \cup U_0 \cup U_{00}$ в нильпотентной субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8).

3.2. Сопряженные векоторы

Проинтегрируем подсистему (1), (2) в соответствии с классификацией параметров χ:

$$
\begin{aligned}
&\dot x_1 = u_1^c(t;\chi),\\
&\dot x_2 = u_2^c(t;\chi),\\
&(x_1(0),\, x_2(0)) = (0,\, 0).
\end{aligned}
\tag{56}
$$

3.2.1. *Эллипический случай*

В случае эллиптических канонических анормальных управлений после интегрирования системы (56) получаем следующие функции:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot h_5^0/\Delta & -h_5^0/\delta \\ -\dot h_4^0/\Delta & h_4^0/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta t \\ \sin\delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot h_5^0/\Delta \\ \dot h_4^0/\Delta \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Подставив функции (57) в выражения для векторных полей (11)–(18), получим вектор-функции $F_i(t;\chi^+,\mathbf{h}^0)$, $i=1,\dots,8$.

Вектор сопряженных переменных в эллипическом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi^c(t;\chi^+,\,\mathbf{h}^0) =& r_1\cos(\delta t-\varphi_1)F_4(t;\chi^+,\mathbf{h}^0)+ \\ &+ r_2\cos(\delta t-\varphi_2)F_5(t;\chi^+,\mathbf{h}^0)+\sum_{i=6}^{8} h_iF_i(t;\chi^+,\mathbf{h}^0).\end{aligned} \tag{58}$$

3.2.2. *Гиперболический случай*

В случае гиперболических канонических анормальных управлений после интегрирования системы (56) получаем следующие функции:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot h_5^0/\Delta & -h_5^0/\delta \\ \dot h_4^0/\Delta & h_4^0/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\delta t \\ \operatorname{sh}\delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot h_5^0/\Delta \\ -\dot h_4^0/\Delta \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Подставив функции (59) в выражения для векторных полей (11)–(18), получим вектор-функции $F_i(t;\chi^-,\mathbf{h}^0)$, $i=1,\dots,8$.

Вектор сопряженных переменных в гиперболическом случае:

$$\begin{aligned}\psi^c(t;\chi^-,\,\mathbf{h}^0) =& \left(h_4^0\operatorname{ch}\delta t+\frac{\dot h_4^0}{\delta}\operatorname{sh}\delta t\right)F_4(t;\chi^-,\mathbf{h}^0)+ \\ &+\left(h_5^0\operatorname{ch}\delta t+\frac{\dot h_5^0}{\delta}\operatorname{sh}\delta t\right)F_5(t;\chi^-,\mathbf{h}^0)+\sum_{i=6}^{8} h_iF_i(t;\chi^-,\mathbf{h}^0).\end{aligned} \tag{60}$$

3.2.3. *Параболический случай*

В случае параболических канонических анормальных управлений после интегрирования системы (56) получаем функции, которые определяются начальным состоянием $\mathbf{h}^0$. Если $C\mathbf{h}^0 \neq 0$, то решения имеет вид:

$$x_1 = -k/2(h_7h_4^0 - h_6h_5^0)t^2 - h_5^0 t, \quad k \neq 0, \tag{61}$$
$$x_2 = 1/2(h_7h_4^0 - h_6h_5^0)t^2 + h_4^0 t.$$

Подставив функции (61) в выражения для векторных полей (11)–(18), получим вектор-функции $F_i(t;\chi^0,\mathbf{h}^0)$, $i = 1,\dots,8$.

Вектор сопряженных переменных в параболическом случае, если начальное состояние не принадлежит ядру оператора C, имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi^c(t;\chi^0,\,\mathbf{h}^0) =&((h_7h_4^0 - h_6h_5^0)t + h_4^0)F_4(t;\chi^0,\mathbf{h}^0)+\\ &+ (k(h_7h_4^0 - h_6h_5^0)t + h_5^0)F_5(t;\chi^0,\mathbf{h}^0)+\\ &+\sum_{i=6}^{8} h_iF_i(t;\chi^0,\mathbf{h}^0), \quad k \neq 0.\end{aligned} \tag{62}$$

В результате интегрирования системы (56) в параболическом случае, если $C\mathbf{h}^0 = 0$, получаем функции:

$$x_1 = -h_5^0 t, \tag{63}$$
$$x_2 = h_4^0 t.$$

Подставив функции (63) в выражения для векторных полей (11)–(18), получим вектор-функции $F_i(t;\chi^0,\mathbf{h}^0)$, $i = 1,\dots,8$.

Вектор сопряженных переменных в параболическом случае, если $C\mathbf{h}^0 = 0$, имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi^c(t;\chi^0,\,\mathbf{h}^0) =&h_4^0F_4(t;\chi^0,\mathbf{h}^0)+\\ &+ h_5^0F_5(t;\chi^0,\mathbf{h}^0) + \sum_{i=6}^{8} h_iF_i(t;\chi^0,\mathbf{h}^0).\end{aligned} \tag{64}$$

3.2.4. *Особый случай*

Траектории $(x_1(t),\,x_2(t))$ имеют вид (63). Подставив функции (63) в выражения для векторных полей (11)–(18), получим вектор-функции $F_i(t;\chi^{00},\mathbf{h}^0)$, $i = 1,\dots,8$.

Вектор сопряженных переменных в особом случае, когда параметры $h_6 = h_7 = h_8 = 0$, имеет вид:

$$\psi^c(t;\chi^{00},\,\mathbf{h}^0) =h_4^0F_4(t;\chi^{00},\mathbf{h}^0) + h_5^0F_5(t;\chi^{00},\mathbf{h}^0). \tag{65}$$

4. Заключение

В данной работе проинтегрирована вертикальная подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина в анормальном случае. Проведена классификация параметров. В соответствии с классификацией получены формулы сопряженных векторов. Описано множество невырожденных канонических анормальных управлений.

В следующей работе планируется разработать метод исследования анормальных траекторий на нестрогую анормальность, чему могут способствовать полученные в этой статье результаты.

Список литературы

[1] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова. «Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$», *Дифференциальные уравнения*, **53**:3 (2017), с. 362–374. ↑ 179,181,184,186

[2] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry*, 2015, URL: http://webusers.imj-prg.fr/~davide.barilari/Notes.php ↑ 180

[3] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков. *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005, 392 с. ↑ 181,182,183

[4] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961, 392 с. ↑ 182

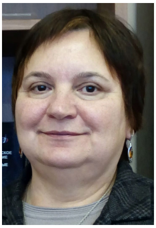
[5] П. С. Александров. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, Наука, М., 1979, 612 с. ↑ 188,189

Пример ссылки на эту публикацию:

Е. Ф. Сачкова. «Невырожденные анормальные управления в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8)», *Программные системы: теория и приложения*, 2017, **8**:4(35), с. 179–195.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_4_179-195.pdf

Об авторе:



Елена Федоровна Сачкова

Закончила механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, кафедра дифференциальных уравнений. К.т.н., с.н.с. исследовательского центра процессов управления ИПС им. А.К. Айламазяна РАН. Область научных интересов — математическая теория управления

e-mail: efsachkova@mail.ru

Elena Sachkova. *Nondegenerate abnormal control in sub-riemannian problem with growth vector* $(2, 3, 5, 8)$.

ABSTRACT. Nilpotent sub-Riemannian problem with growth vector $(2, 3, 5, 8)$ are considered. Canonical abnormal controls are described. Formulas for the corresponding conjugate vectors of the Pontryagin maximum principle are obtained. (*In Russian*).

Key words and phrases: sub-Riemannian problem, abnormal controls, abnormal trajectories.

References

[1] Yu. L. Sachkov, Ye. F. Sachkova. "Degenerate abnormal trajectories in a sub-Riemannian problem with growth vector $(2, 3, 5, 8)$", *Differential Equations*, **53**:3 (2017), pp. 352–365.

[2] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry*, 2015, URL: http://webusers.imj-prg.fr/~davide.barilari/Notes.php

[3] A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov. *Geometric control theory*, Fizmatlit, M., 2005 (in Russian), 392 p.

[4] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskiy, R. V. Gamkrelidze, Ye. F. Mishchenko. *Mathematical theory of optimal processes*, Fizmatgiz, M., 1961 (in Russian), 392 p.

[5] P. S. Aleksandrov. *A course of analytic geometry and linear algebra*, Nauka, M., 1979 (in Russian), 612 p.

Sample citation of this publication:

Elena Sachkova. "Nondegenerate abnormal control in sub-riemannian problem with growth vector $(2, 3, 5, 8)$", *Program systems: Theory and applications*, 2017, **8**:4(35), pp. 179–195. (*In Russian*).

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2017_4_179-195.pdf

DOI: 10.25209/2079-3316-2017-8-4-179-195