ISSN 2079-3316 **ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ** **т. 9**, №4(39), с. 293–305

ББК 22.622.7
ГРНТИ 30.15.31, 89.21.21
УДК 629.7.05

М. Н. Бурдаев

О поиске новых методов и форм решения уравнения Ламберта–Эйлера

Аннотация. В статье рассмотрены возможности употребления в качестве независимой переменной в итерационных расчетах параметров орбитальных движений истинной аномалии и эксцентриситета орбиты. Разработаны аналитические формы однозначных решений уравнения Ламберта–Эйлера в функции этих переменных для эллиптических и для всех типов орбит.

Ключевые слова и фразы: орбитальное движение, истинная аномалия, эксцентриситет орбиты, уравнение перелета, однозначные решения уравнения Ламберта–Эйлера.

Введение

Одним из направлений в общем стремлении к совершенствованию математического аппарата прикладной космонавтики является поиск новых, более совершенных способов решения практических задач, в которых в качестве начальных условий используется взаимное положение двух точек в центральном поле тяготения. К ним относится задача определения орбиты по известному времени перелета между ними. В XVIII веке она была впервые решена Ламбертом и Эйлером. В современных обозначениях это уравнение имеет вид

$$\Delta M = (E_N - E_M) - (e \sin E_N - e \sin E_M),$$

где ΔM — разность средних аномалий начальной и конечной точек траектории перелета, E — эксцентрические аномалии начальной и конечной точек траектории перелета, e — эксцентриситет траектории

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18–07–00014–а «Разработка и исследование интеллектуальных графических интерфейсов с элементами когнитивной визуализации, служащих для поддержки принятия решений в системах управления, контроля и диагностики космических аппаратов»).

© М. Н. Бурдаев, 2018
© Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, 2018
© Программные системы: теория и приложения (дизайн), 2018

10.25209/2079-3316-2018-9-4-293-305

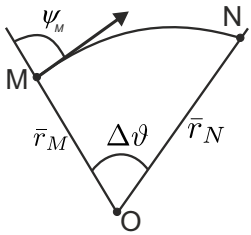

Рисунок 1. Начальные условия перелета между заданными точками центрального поля тяготения

перелета. В этом уравнении и далее индексом «M» отмечены параметры орбиты в начальной точке перелета, индексом «N» — в его конечной точке. Особенность полученного Ламбертом и Эйлером общего решения состояла в том, что оно было четырехзначным. Выбор из них варианта, соответствующего начальным условиям, зависит от расположения траектории перелета и ее граничных радиусов относительно обоих фокусов орбиты, элементом которой эта траектория является. В [**1**, **2**] отмечается, что при проведении астрономических вычислений применяются только два из этих вариантов. В прикладной космонавтике рассматриваются все четыре варианта [**3**].

Необходимость выполнения операций по выбору варианта решения, соответствующего начальным условиям конкретной задачи, увеличивает затраты времени на выполнение расчетов. За прошедшее с тех пор время многие исследователи, например, [**4**, **5**], искали однозначное решение этого уравнения в конечном виде и универсальную его форму для всех типов орбит. Известно много вариантов формул уравнения Ламберта-Эйлера, выведенных на основе уравнения Кеплера. Подробный обзор и систематизация большинства из этих работ выполнены в [**1**].

1. Возможность использования в качестве независимой переменной в расчетах параметров орбитальных движений истинной аномалии и эксцентриситета орбиты

Путь к новым методам решения и формам его представления был найден при исследовании возможности использования в качестве независимой переменной в расчетах параметров орбитальных движений угла между местной вертикалью и вектором орбитальной скорости в начальной точке перелета. Общее решение задачи перелета (см.

рисунок 1) в виде зависимости между величиной V и направлением ψ вектора орбитальной скорости в начальной точке перелета было представлено в работах [6, 7] в виде уравнения

$$\sqrt{\frac{r_M}{\mu}}V_M = k_M = \frac{\left(1+\operatorname{ctg}^2\psi_M\right)\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}, \tag{1}$$

где V_M — начальная скорость перелета;

r_M — гравицентрический радиус начальной точки M перелета;

μ — гравитационная постоянная поля тяготения;

ψ_M — угол между местной вертикалью и вектором орбитальной скорости $\bar{V}_M$;

$\Delta\vartheta$ — угол между радиусом r_M начальной точки перелета и радиусом r_N его конечной точки N;

$\Delta\psi_M$ — угол между местной вертикалью в начальной точке M перелета и направлением из нее на конечную точку N перелета, определяемый из соотношения

$$\operatorname{ctg}\Delta\psi_M = \frac{\cos\Delta\vartheta - \frac{r_M}{r_N}}{\sin\Delta\vartheta}. \tag{2}$$

Уравнение (1) позволило представить общее решение задачи перелета в двумерной форме и изобразить его на графике (см. рисунок 2).

На основании этого решения были разработаны уравнение расчета времени перелета для эллиптических орбит [8]:

$$\begin{gathered} t_N - t_M = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{r_M^{\frac{3}{2}}}{\left[2-k_M\right]^{\frac{3}{2}}}\times \\ \times\left\{2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{2\left(\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M\right)\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - 1 - \operatorname{ctg}^2\psi_M}}{\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M}\right] + \right. \\ + \frac{\sqrt{2\left(\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M\right)\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}^2\psi_M - 1}}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}\times \\ \left.\times\left[\left(\frac{r_N}{r_M}+1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\operatorname{ctg}\psi_M - 1\right) + 2\right]\right\}, \end{gathered} \tag{3}$$

где параметр k_M представлен уравнением годографа начальных скоростей перелета (1), и универсальное уравнение расчета времени

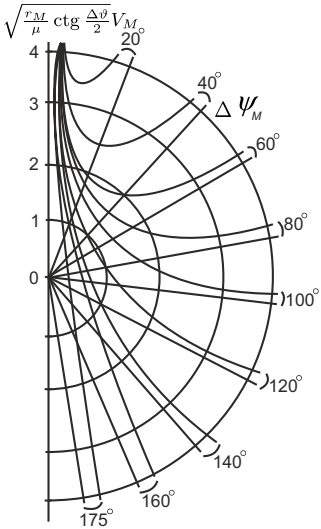

Рисунок 2. Семейство годографов обобщенного параметра $\sqrt{\frac{r_M}{\mu}\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}}V_M$ начальной скорости перелета

перелета для всех типов орбит [9, 10]:

$$t_N - t_M = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{r_M^{\frac{3}{2}}}{[2-k_M]^{\frac{3}{2}}}\times \tag{4}$$

$$\times\left\{\sqrt{|1-e^2|}\left(\left(\frac{r_N}{r_M}+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}-\operatorname{ctg}\psi_M\right)-2\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-2\,(*)\,\frac{\sqrt{|1-e^2|}\,(\operatorname{ctg}\psi_M-\operatorname{ctg}\Delta\psi_M)}{\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}-\operatorname{ctg}\psi_M}\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right\},$$

где

$$\sqrt{|1-e^2|}=\sqrt{\left|\frac{k_M\,(k_M-2)}{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}\right|}.$$

Подстановка: (*) — arctg для эллиптических орбит и arth — ареатангенс для орбит гиперболических.

В обоих этих уравнениях в качестве исходной переменной используется новая величина — угол ψ_M между местной вертикалью и вектором орбитальной скорости, заменивший угол θ между вектором скорости и

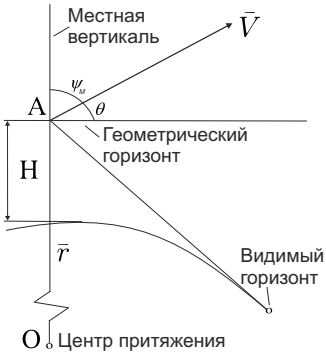

Рисунок 3. Параметры орбитального движения в точке плоскости орбиты и горизонты

местным горизонтом, используемый во всех трудах по теоретической астрономии и прикладной космонавтике.

Углы ψ_M и θ однозначно связаны соотношением $\psi_M+\theta=90°$. Переход от угла θ к углу ψ_M в прикладной космонавтике целесообразен по следующей причине: местный горизонт в научных трудах понимается как перпендикуляр к местной вертикали. Чтобы отсчитать угол от этого «горизонта» необходимо сначала отсчитать угол в 90° от местной вертикали, обозначить по этому направлению линию, называемую местным горизонтом, и уже затем от этой линии отложить угол θ.

В расчетах параметров орбитальных движений всегда присутствуют радиус-векторы точек в полях тяготения. Их направления являются исходным ориентиром для отсчета направления местного горизонта. Поэтому операции, связанные с построением местного горизонта, не являются необходимыми. Проще и быстрее отсчитывать направление вектора скорости непосредственно от исходного ориентира — местной вертикали, имеющей, в отличие от местного горизонта, четкий физический смысл.

Местный горизонт физического смысла не имеет. Из рисунка 3 видно, что угол между местной вертикалью и видимым реальным горизонтом зависит от высоты точки его наблюдения и увеличивается вместе с ней. Этот угол равен 90° только в случае, когда точка наблюдения лежит на Земле. При этом плоскость местного горизонта вырождается в точку.

Начальными условиями исследования возможностей использования

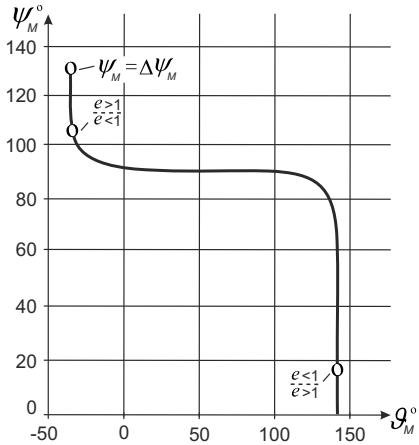

Рисунок 4. Зависимость угла скорости ψ_M от истинной аномалии ϑ_M начальной точки перелета

истинной аномалии начальной точки перелета и эксцентриситета орбиты в качестве независимых переменных в итерационных расчетах угловых параметров орбитальных движений, как и у других авторов, являются величины гравицентрических радиусов r_M и r_N двух точек в центральном поле тяготения и угла $\Delta\vartheta$ между этими радиусами. Вычисление хорды, соединяющей точки M и N, не требуется, его заменило вычисление угла $\Delta\psi_M$ по формуле (2).

Для использования истинной аномалии в качестве исходной независимой переменной вычислим соотношение радиусов r_M и r_N:

$$\frac{r_M}{r_N} = \frac{\dfrac{p}{1 + e\cos\vartheta_M}}{\dfrac{p}{1 + e\cos(\vartheta_M + \Delta\vartheta)}} = \frac{\frac{1}{e} + \cos(\vartheta_M + \Delta\vartheta)}{\frac{1}{e} + \cos\vartheta_M}, \tag{5}$$

где p — фокальный параметр орбиты перелета, e — ее эксцентриситет, ϑ_M — истинная аномалия начальной точки перелета на этой орбите, и решим это уравнение относительно эксцентриситета e:

$$e = \frac{1 - \frac{r_M}{r_N}}{\frac{r_M}{r_N}\cos\vartheta_M - \cos(\vartheta_M + \Delta\vartheta)}. \tag{6}$$

Подставив это выражение в известную формулу

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}\psi_M = \frac{e\sin\vartheta_M}{1+e\cos\vartheta_M}$$

и решив это уравнение относительно $\operatorname{ctg}\psi_M$, получим зависимость

$$\operatorname{ctg}\psi_M = \left(\frac{r_M}{r_N} - 1\right)\frac{\sin\vartheta_M}{\cos(\vartheta_M + \Delta\vartheta) - \cos\vartheta_M}, \tag{7}$$

используя которую можно при заданных r_M/r_N и $\Delta\vartheta$ войти в уравнения (3) и (4) с независимой переменной — истинной аномалией ϑ_M. На рисунке 4 в качестве примера показан вид этой функции для r_M=6571 км, r_N=6771 км и $\Delta\vartheta$=70°.

Полученное уравнение показывает, что при использовании в качестве исходной переменной истинной аномалии вход в уравнение расчета времени перелета через это уравнение потребует выполнения дополнительных расчетов.

Возможен другой путь использования истинной аномалии в качестве исходной переменной при расчете времени перелета: ввести ее непосредственно в расчетные уравнения. Уравнение (7) позволяет это сделать. Но при его подстановке в уравнения (3) и (4), даже после выполнения некоторых упрощений, эти уравнения приобретают более сложные формы с увеличенным количеством необходимых вычислений. Очевидно, что этот вариант использования истинной аномалии в качестве исходной независимой переменной при итерационном расчете времени перелета еще менее эффективен, чем предыдущий по сравнению с вариантом, в котором в качестве исходной переменной используется угол ψ_M. При использовании в итерационных расчетах истинной аномалии как исходной переменной следует выбирать ее первое приближение равным $\Delta\psi_M$. К недостаткам истинной аномалии как независимой исходной переменной относятся также отсутствие способов априорного определения границ диапазона ее значений, при которых существует решение задачи расчета времени перелета и выбора ее первого значения для выполнения итерационных расчетов.

2. Универсальная форма решения уравнения Ламберта–Эйлера

Рассмотрим возможность применения при разработке решения уравнения Ламберта–Эйлера эксцентриситета орбиты перелета. Отметим, что из уравнения (5) следует, что при постоянных значениях величин $\frac{r_M}{r_N}$ и $\Delta\vartheta$ параметры ϑ_M и e связаны однозначно, поэтому при

задании одного из этих параметров второй также будет определен однозначно.

Преобразуем известное уравнение

$$e = \sqrt{1 - k(k-2)\cos^2\theta}$$

к виду

$$1 - e^2 = k(2-k)\cos^2\theta = \frac{k(2-k)}{1+\operatorname{ctg}^2\psi}, \tag{8}$$

подставим в него k из уравнения перелета (1):

$$\begin{aligned} 1 - e^2 &= \frac{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}\times \\ &\times\left(2 - \frac{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\left(2 - \frac{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right) = \\ &= \frac{2\left(\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M\right) - \left(1+\operatorname{ctg}^2\psi_M\right)\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\left(\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M\right)^2}\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Избавимся от знаменателя, раскроем скобки и приведем полученное уравнение к каноническому виду:

$$A\ \operatorname{ctg}\psi_M^2 + B\ \operatorname{ctg}\psi_M + C = 0, \tag{10}$$

где

$$A = \left(1 - e^2\right)\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2},$$

$$B = \left(1 - e^2\right)\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\operatorname{ctg}\Delta\psi_M + 1$$

и

$$C = \left[\left(1 - e^2\right)\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\operatorname{ctg}\Delta\psi_M + 2\right]\operatorname{ctg}\Delta\psi_M + \operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}.$$

Решение этого уравнения двузначно и имеет вид

$$\operatorname{ctg}\psi_M = \frac{B \pm \sqrt{(B-1)^2 - A\left(B + 1 + \operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}}{A}. \tag{11}$$

На рисунке 5 показан вид зависимости величины угла ψ_M от значения эксцентриситета e при r_M=6571 км, r_N=6771 км и $\Delta\vartheta$=70°.

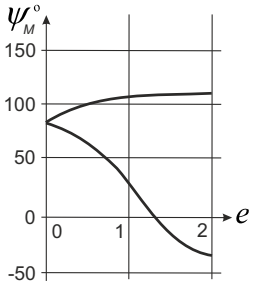

Рисунок 5. Зависимость угла скорости ψ_M от эксцентриситета орбиты e

Полученное решение (11) уравнения (10) позволяет при заданных r_M/r_N и $\Delta\vartheta$ войти в уравнения (3) и (4) с независимой переменной — эксцентриситетом e. При таком варианте решения число выполняемых вычислительных операций также увеличивается по сравнению с вариантом, в котором в качестве независимой переменной используется угол скорости ψ_M.

Попытка ввести решение уравнения (10) непосредственно в расчетные уравнения (3) и (4) приводит к созданию их еще более сложных форм, чем при использовании в качестве независимой исходной переменной истинной аномалии ϑ и к еще большему увеличению количества необходимых вычислений.

При использовании в итерационных расчетах эксцентриситета как исходной переменной следует выбирать его первое значение из условия равенства нулю подкоренного выражения в формуле (11) и направление шага в сторону увеличения значения эксцентриситета.

Заключение

В итоге проведенных исследований возможностей использования при расчетах параметров орбитальных движений в качестве независимых переменных истинной аномалии и эксцентриситета орбиты и поиска новых аналитических форм однозначных решений уравнения Ламберта для всех типов орбит в функции этих переменных получены следующие результаты:

- вариант с использованием в качестве независимой исходной переменной истинной аномалии ϑ дает единственное решение; в варианте с использованием эксцентриситета e решение двузначно;
- вариант метода выполнения итерационных расчетов с использованием в качестве независимой исходной переменной истинной аномалии

ϑ более экономичен по количеству выполняемых расчетных операций и затратам времени на расчеты по сравнению с вариантом, в котором используется эксцентриситет e;

- использование при итерационных расчетах параметров орбит по уравнениям (3) и (4) в качестве независимой исходной переменной истинной аномалии ϑ или эксцентриситета e увеличивает количество выполняемых вычислений по сравнению с вариантом использования в этом качестве угла ψ_M между местной вертикалью и вектором скорости в начальной точке перелета.

Данной статьей завершается цикл работ автора по поиску однозначных и универсальных форм решений уравнения Ламберта–Эйлера. Для решения этих проблем использовался принципиально новый подход, состоявший в замене использовавшихся в решениях Ламберта, Эйлера и последовавших авторов элементов орбит, имеющих размерность длины (геоцентрические радиусы граничных точек, соединяющая их хорда) безразмерными величинами эксцентриситета, отношения радиусов граничных точек и углом между направлением одного из этих радиусов и соединяющей их хордой.

В цикле исследований получены единые и максимально близкие по своей структуре к общей для всех типов орбит формы итерационного решения уравнения Ламберта–Эйлера. Их особенностью является различие в одной букве машинной программы расчетов для эллиптических и гиперболических орбит.

Сравнение этих форм для трех различных независимых переменных: 1) угла ψ_M между местной вертикалью и вектором скорости V_M в начальной точке M перелета; 2) истинной аномалии ϑ начальной точки перелета и 3) эксцентриситета e орбиты перелета показало, что общее количество вычислительных операций минимально в варианте формулы для угла ψ_M. В этом же варианте присутствует наиболее простое правило выбора первого значения независимой переменной для начала цикла итерационных расчетов.

На этих основаниях для практического использования рекомендуется вариант с углом ψ_M в качестве независимой переменной.

Список литературы

[1] М. Ф. Дубошин. *Введение в теоретическую астрономию*, Наука, М., 1968, 800 с. ↑294

[2] В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, В. Г. Демин, Ю. А. Рябов. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*, Изд. 2-е, исправленное и переработанное, ред. Г.Н. Дубошин, Наука, М., 1976, 864 с. ↑294

[3] А. И. Беляков. *Графоаналитический метод исследования движения космических аппаратов*, Машиностроение, М., 1973, 148 с. ↑294

[4] Р. Беттин. *Наведение в космосе*, Машиностроение, М., 1966, 448 с. ↑294

[5] С. Херрик. *Астродинамика.* Т. 2, Мир, М., 1977, 263 с. ↑294

[6] М. Н. Бурдаев. *Теория годографов в механике космического полета*, Машиностроение, М., 1975, 151 с. ↑295

[7] М. Н. Бурдаев. «Годографы и уравнение перелета в центральном поле тяготения», *Программные системы: теория и приложения*, **3**:3 (2012), с. 81–95. URL * ↑295

[8] М. Н. Бурдаев. «Новое уравнение времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения», *Авиакосмическое приборостроение*, 2006, №6, с. 56–60. * ↑295

[9] М. Н. Бурдаев. «Новое универсальное уравнение времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения», *Космические исследования*, 2011, №5, с. 476–479. * ↑296

[10] М. Н. Бурдаев. «Универсальное уравнение времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения», *Программные системы: теория и приложения*, **3**:3 (2012), с. 71–79. URL * ↑296

Поступила в редакцию	30.10.2018
Переработана	27.11.2018
Опубликована	18.12.2018

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. М. Хачумов*

Пример ссылки на эту публикацию:

М. Н. Бурдаев. «О поиске новых методов и форм решения уравнения Ламберта–Эйлера». *Программные системы: теория и приложения*, 2018, **9**:4(39), с. 293–305. doi 10.25209/2079-3316-2018-9-4-293-305

URL `http://psta.psiras.ru/read/psta2018_4_293-305.pdf`

Об авторе:

Михаил Николаевич Бурдаев

Доктор технических наук, профессор, академик Академии космонавтики, космонавт-испытатель, главный научный сотрудник ИЦМС ИПС. им. А.К.Айламазяна РАН.

iD 0000-0002-4608-6087

e-mail: burdaevmn@mail.ru

CSCSTI 30.15.31, 89.21.21
UDC 629.7.05

Mikhail Burdayev. *About finding new methods and forms of solving the Euler-Lambert equation.*

ABSTRACT. The article considers the possibility of using the true anomaly and eccentricity of the orbit as an independent variable in the iterative calculations of the parameters of the orbital motions. Analytical forms of single-valued solutions of the Lambert–Euler equation are developed in the functions of these variables for elliptic and for all types of orbits. (*In Russian*).

Key words and phrases: orbital motion, true anomaly, eccentricity of the orbit, flight equation, unique solutions of the Lambert-Euler equation.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 70B10; 70B05, 70-08

References

[1] M. F. Duboshin. *Introduction to theoretical astronomy. Main editors of the physics-mathematical literature*, Nauka, M., 1968 (in Russian), 800 pp. ↑294

[2] V. K. Abalakin, E. P. Aksenov, E. A. Grebenikov, V. G. Demin, Ju. A. Rjabov. *Handbook of celestial mechanics and astrodynamics*, 2nd edition, revised and revised, ed. G.N.Duboshin, Nauka, M., 1976 (in Russian), 864 pp. ↑294

[3] A. I. Beljakov. *Graphoanalytical method for studying spacecraft motion*, Mashinostroenie, M., 1973 (in Russian), 148 pp. ↑294

[4] R. Bettin. *Guidance in space*, Mashinostroenie, M., 1966 (in Russian), 448 pp. ↑294

[5] S. Herrik. *Astrodynamics*. V. 2, Mir, M., 1977 (in Russian), 263 pp. ↑294

[6] M. N. Burdaev. *Theory of hodographs in the mechanics of space flight*, Mashinostroenie, M., 1975 (in Russian), 151 pp. ↑295

[7] M. N. Burdaev. "Hodographs and the equation of flight in a central gravitational field", *Program Systems: Theory and Applications*, **3**:3 (2012), pp. 81–95 (in Russian). URL ↑295

[8] M. N. Burdaev. "The new equation of time of flight between two points of the central field of gravitation", *Aerospace Instrument-Making*, 2006, no.6, pp. 56–60 (in Russian). ↑295

[9] M. N. Burdaev. "A new universal equation for the time of transfer between two points of the central gravitational field", *Cosmic Research*, **49**:5 (2011), pp. 464–467. ↑296

© M. N. BURDAYEV, 2018
© AILAMAZYAN PROGRAM SYSTEMS INSTITUTE OF RAS, 2018
© PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS (DESIGN), 2018
10.25209/2079-3316-2018-9-4-293-305

[10] M. N. Burdaev. "Universal equation trip time between two points of the central gravity field", *Program Systems: Theory and Applications*, **3**:3 (2012), pp. 71–79 (in Russian). URL ↑296

Sample citation of this publication:

Mikhail Burdayev. "About finding new methods and forms of solving the Euler-Lambert equation". *Program Systems: Theory and Applications*, 2018, **9**:4(39), pp. 293–305. (*In Russian*). doi 10.25209/2079-3316-2018-9-4-293-305
URL `http://psta.psiras.ru/read/psta2018_4_293-305.pdf`