ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 9, №4(39), с. 307–317

ББК 51.1(2)
ГРНТИ 76.75.75
УДК 519.22:519.65

А. А. Ованесян

О связи между потребностью в медицинском обслуживании и распределением продолжительности жизни

Аннотация. В статье рассмотрена возможность прогнозирования потребности в медицинском обслуживании населения с использованием плотности распределения продолжительности жизни и вероятностной зависимости потребности в медицинском обслуживании от возраста. Установлена связь между распределением продолжительности жизни и распределением возрастов пациентов. Она выражена средней продолжительностью жизни.

Приведен пример распределения продолжительности жизни. Представлен в графическом виде, демонстрирующий вид найденного приближения вместе с фактическими данными. По приближению рассчитано распределение продолжительности жизни.

Вероятность зависимости потребности в медицинском обслуживании от возраста приведена в статье на основе статистических данных, представлена в графическом виде. Поскольку есть связь между данной зависимостью и распределением пациентов по возрастам реализовано прогнозирование потребности в медицинском обслуживании. Приведены примеры расчета по конкретным возрастам, указана возможность расчета для всех возрастов.

В результате в исследовании определена возможность прогнозирования необходимости медицинского обслуживания на основе данных о продолжительности жизни.

Ключевые слова и фразы: связь распределений, продолжительность жизни, распределение возраста, потребность в медуслугах.

Введение

Важнейшим фактором при прогнозировании объема медицинских услуг и их распределения по отдельным видам болезней является рапределение пациентов по возрасту. К сожалению, во многих случаях это распределение недостоверно, особенно в масштабе регионов.

10.25209/2079-3316-2018-9-4-307-317

Значительно точнее известно распределение продолжительности жизни пациентов в том числе и в каждом регионе, обслуживаемом заданным набором медицинских учреждений. При этом предполагаем, что известна статистическая зависимость в медуслугах от возраста пациента. Была взята статистика по раковым заболеваниям (см. [1]). Эта зависимость имеет максимум для пациентов с 55 до 70 лет и убывает за пределами этого интервала.

В работах [2–4] рассмотрены задачи прогноза медицинских услуг, заболеваемости региона. Представлены методы решения задач прогнозирования на основе регрессионного анализа, Фурье преобразования, кластерного анализа, временных рядов. В них необходимыми данными для моделирования являются показатели заболеваемости. Различием в данной работе является промежуточная оценка распределения пациентов по возрасту на основе точных данных о продолжительности жизни пациентов. Модель адаптирована к изменчивости населения.

Ниже показано, что между распределением пациентов по возрастам и их распределением по продолжительности жизни существует зависимость, а значит в задачах прогнозирования, основанных на распределении возраста, могут быть использованы данные о продолжительности жизни. В текущем прогнозе речь пойдет о нахождении количества пациентов, нуждающихся в медуслугах заданного типа, за определенный период на основе данных о продолжительности жизни.

1. Связь между распределениями возраста и продолжительности жизни пациентов

Будем предполагать, что возраст пациента τ_i и его продолжительность жизни τ_f случайны. Эти случайные величины взаимосвязанны, а значит, связаны друг с другом и их плотности распределения $P_1(\tau_i)$ и $P_2(\tau_f)$. Найдя эту связь, можно распределение возраста $P_1(\tau_i)$ рассчитать по $P_2(\tau_f)$.

Будем рассматривать стационарный случай, когда общее число пациентов в выделенном регионе постоянно, число рождающихся и умерших пациентов равно q (см. [5–7]). Пусть функция распределения P_2 задана, тогда доля пациентов, имеющих возраст от τ_i до $\tau_i + d\tau_i$ в момент t пропорциональна произведению g на $d\tau_i$, за исключением доли пациентов, которые скончались за время от $(t-\tau_i)$ до t . Эта доля равна:

$$F(\tau_i) = \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f. \tag{1}$$

Плотность распределения возраста равна доле оставшихся пациентов с возрастом от τ_i до $\tau_i + d\tau_i$. С учетом нормирования плотности распределения получим

$$P_1(\tau_i) = \frac{1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f}{\int\limits_0^{\infty} \left(1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f\right) d\tau_i}. \tag{2}$$

Покажем, что знаменатель этого выражения равен среднему времени жизни пациентов

$$\Theta = \int\limits_0^{\infty} \tau_f P_2(\tau_f) d\tau_f. \tag{3}$$

Действительно, в знаменателе (2) интеграл равен пределу изображения по Лапласу подынтегрального выражения при $s \to 0$. Запишем это отображение (см. [8]) с учетом того, что изображения отдельных слагаемых равны:

$$1 \mapsto \frac{1}{s}, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f \mapsto \frac{P_2(s)}{s}. \tag{5}$$

При записи (5) использовано свойство преобразования Лапласа, согласно которому интегрирование оригинала соответствует делению изображения на s. В итоге знаменатель равен:

$$\Theta = \int\limits_0^{\infty} \left(1 - \int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f) d\tau_f\right) d\tau_i = \lim_{s \to 0} (\frac{1 - P_2(s)}{s}). \tag{6}$$

При вычислении предела этого изображения при $s \to 0$ получаем неопределенность типа ноль на ноль. С использованием правила Лопиталя, это отношение равно отношению производных числителя и знаменателя:

$$\Theta = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1-P_2(s)}{s}\right) = \lim_{s\to 0} -\frac{dP_2(s)}{ds}. \tag{7}$$

Переходя от изображения по Лапласу к оригиналу, получим следующее выражение

$$\Theta = \lim_{s\to 0} -\frac{dP_2(s)}{ds} \mapsto \int\limits_0^{\infty} \tau_f P_2(\tau_f) d\tau_f. \tag{8}$$

С учетом полученного соотношения равенство (2) перепишется как

$$P_1(\tau_i) = \frac{1-\int\limits_0^{\tau_i} P_2(\tau_f)d\tau_f}{\Theta}. \tag{9}$$

Перепишем равенство (9) с использованием преобразования Лапласа, которое применяли в (4) и (5)

$$P_1(s) = \frac{1}{\Theta}\left(\frac{1}{s} - \frac{P_2(s)}{s}\right) = \frac{1}{\Theta s}\left(1 - P_2(s)\right). \tag{10}$$

Эти выражения позволяют найти плотность распределения возраста пациентов, по плотности распределения их продолжительности жизни в предположении стационарного состояния, когда одинакова плотность распределения возраста жителей, приезжающих в регион и уезжающих из него или когда основную долю новых пациентов составляют рождающиеся дети.

Распределения $P_2(\tau_f)$ и $P_1(\tau_i)$ одинаковы в случае, когда

$$P_2(\tau_f) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\tau_f}{\Theta}}.$$

Действительно, в этом случае

$$P_2(s) = \frac{1}{\Theta s + 1}.$$

По (10) имеем

$$P_1(s) = \frac{1}{\Theta s}\left(1 - \frac{1}{\Theta s + 1}\right) = \frac{1}{\Theta s + 1}.$$

Пример

Распределение продолжительности жизни является известной. Его можно, к примеру, получить из статистических показателей демографи-

Таблица 1. Данные для плотности распределения продолжительности жизни

Возраст, диапазон лет	Доля умерших в определенном возрасте
0	0,03022
1-4	0,00181
5-9	0,00091
10-14	0,00107
15-19	0,00230
20-24	0,00492
25-29	0,01174
30-34	0,01995
35-39	0,02660
40-44	0,02985
45-49	0,03316
50-54	0,04996
55-59	0,07727
60-64	0,09602
65-69	0,10374
70-74	0,06599
75-79	0,15463
80-85	0,12270

ческих ежегодников, последнее издание которых использовалось для расчета (см. [9]). Данные для аппроксимации представлены в таблице 1.

Для получения функциональных зависимостей по заданным точкам воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$\sigma_i(a_1, a_2, ..., a_k) = \sum_{j=1}^{n} (y(x_j) - y^{*j})^2 \to \min, \tag{11}$$

где i – номер функции; k – количество коэффициентов; n – количество данных; $y(x_j)$ – расчетное значение функции; y^{*j} – выходной параметр.

Для нахождения коэффициентов надо составить систему уравнений, состоящих из частных производных по всем коэффициентам

$$\begin{cases} \frac{\delta\sigma_i(a_1,a_2,...,a_k)}{\delta a_1} = 0, \\ \frac{\delta\sigma_i(a_1,a_2,...,a_k)}{\delta a_2} = 0, \\ \ldots \\ \frac{\delta\sigma_i(a_1,a_2,...,a_k)}{\delta a_k} = 0; \end{cases} \tag{12}$$

Критерием выбора определенной функции является дисперсия

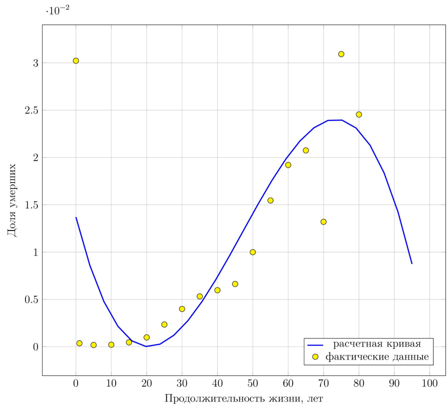

Рисунок 1. Кривая плотности распределения продолжительности жизни

отклонений расчетных данных от фактических показателей (11). Функция должна быть нормирована.

Найден полином 3-й степени $y(\tau) = -3,25 \cdot 10^{-7}\tau^3 + 4,58 \cdot 10^{-5}\tau^2 - 0,00147\tau + 0,0137$. Приближение показано на графике рисунка 1.

В итоге P_2 равна

$$P_2(\tau_f) = -3,25 \cdot 10^{-7}\tau_f^3 + 4,58 \cdot 10^{-5}\tau_f^2 - 0,00147\tau_f + 0,0137. \tag{13}$$

Преобразуем равенство (13) по Лапласу. Получим:

$$P_2(s) = -3,25 \cdot 10^{-7}\frac{6}{s^4} + 4,58 \cdot 10^{-5}\frac{2}{s^3} - 0,00147\frac{1}{s^2} + 0,0137\frac{1}{s}. \tag{14}$$

Плотность распределения возраста согласно (10) и (14) равна:

$$\begin{gathered} P_1(s) = \tfrac{1}{\Theta}(\tfrac{1}{s} + 3,25 \cdot 10^{-7}\tfrac{6}{s^5} - \\ -4,58 \cdot 10^{-5}\tfrac{2}{s^4} + 0,00147\tfrac{1}{s^3} - 0,0137\tfrac{1}{s^2}). \end{gathered} \tag{15}$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем

$$\begin{gathered} P_1(\tau_i) = \tfrac{1}{\Theta}(1 + 8,125 \cdot 10^{-8}\tau_i^4 - 1,527 \cdot 10^{-5}\tau_i^3 + \\ +7,35 \cdot 10^{-4}\tau_i^2 - 0,0137\tau_i), \end{gathered} \tag{16}$$

где по (3) среднее время жизни пациентов $\Theta = 73,42$ года. В результате P_1 равна

$$\begin{gathered} P_1(\tau_i) = 1,105 \cdot 10^{-9}\tau_i^4 - 2,076 \cdot 10^{-7}\tau_i^3 + \\ +9,9 \cdot 10^{-5}\tau_i^2 - 1,86 \cdot 10^{-4}\tau_i + 0,0136. \end{gathered} \tag{17}$$

Таблица 2. Зависимость вероятности заболевания от возраста

Возраст, лет	Вероятность заболевания раком, %
2,5	$2,23 \cdot 10^{-4}$
7,5	$1,16 \cdot 10^{-4}$
12,5	$1,05 \cdot 10^{-4}$
17,5	$1,54 \cdot 10^{-4}$
22,5	$2,52 \cdot 10^{-4}$
27,5	$6,5 \cdot 10^{-4}$
32,5	$1,1 \cdot 10^{-3}$
37,5	$1,68 \cdot 10^{-3}$
42,5	$2,51 \cdot 10^{-3}$
47,5	$3,58 \cdot 10^{-3}$
52,5	$6,57 \cdot 10^{-3}$
57,5	0,0106
62,5	0,01311
67,5	0,01312
72,5	$7,69 \cdot 10^{-3}$
77,5	0,0115
82,5	$4,96 \cdot 10^{-3}$
87,5	$3,44 \cdot 10^{-3}$

2. Зависимость в медуслугах от возраста пациента

Обратимся к статистической зависимости в медуслугах от возраста пациента. Будем рассматривать на конкретном примере по заболеваниям злокачественными новообразованиями (см. [1]). Вероятность заболевания определенного возраста представлена в таблице 2.

Используя метод наименьших квадратов (11) и (12), найдем зависимости в медуслугах определенного типа от возраста.

Самая меньшая дисперсия из построенных была у полинома 4-й степени. Ее вид $y(\tau) = -4,8 \cdot 10^{-11}\tau^4 + 6,7 \cdot 10^{-9}\tau^3 - 2,6 \cdot 10^{-7}\tau^2 + 3,1 \cdot 10^{-6}\tau - 4,3 \cdot 10^{-7}$. Приближение показано на графике рисунка 2.

В итоге доля всех пациентов данного возраста, которая заболела раковыми новообразованиями, определяется следующим образом

$$P_3(\tau_i) = -4,8 \cdot 10^{-11}\tau_i^4 + 6,7 \cdot 10^{-9}\tau_i^3 - 2,6 \cdot 10^{-7}\tau_i^2 + \\ +3,1 \cdot 10^{-6}\tau_i - 4,3 \cdot 10^{-7}. \tag{18}$$

Зная Ψ – общее количество пациентов, по (17) и (18) итоговая

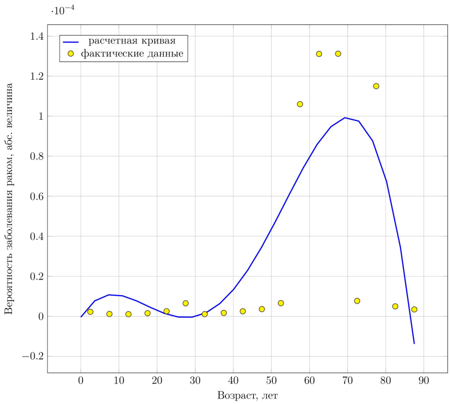

Рисунок 2. Кривая плотности распределения продолжительности жизни

потребность в медуслугах равна:

$$\Omega = \Psi \int\limits_0^\infty P_1(\tau_i)P_3(\tau_i)d\tau_i. \tag{19}$$

Если $\Psi = 100000$, то для двадцатилетних показатель равен 0,74 (1 человек), а для шестидесятилетних – 5,99 (6 человек).

Заключение

Для стационарного режима региона получена связь между плотностями распределения возраста и продолжительности жизни пациентов медицинского учреждения и показано, как можно использовать эту связь для прогноза потребности в медицинских услугах.

Список литературы

[1] А.Д. Каприн, В.В. Старинский, Г.В. Петрова. *Злокачественные новообразования в России в 2015 году (заболеваемость и смертность)*, МНИОИ им. П.А. Герцена, М., 2017, 250 с. ↑308,313

[2] О.Н. Чопоров, С.В. Болгов, И.И. Манакин. «Особенности применения методов интеллектуального анализа данных и многоуровневого мониторинга при решении задач рационализации медицинской помощи», *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*, 2015, №1(8), 2 с. ↑308

[3] О.М. Куликова, Т.М. Любошенко, А.А. Фоменко. «Прогнозирование онкологической заболеваемости в регионах Российской Федерации», *Современные проблемы науки и образования*, 2012, №3, 25 с. ↑308

[4] А.Я. Никитин, Е.А. Сидорова, Е.И. Андаев, М.В. Чеснокова. «Заболеваемость населения Сибирского и Дальневосточного федеральных округов инфекциями, передающимися клещами, в 2009–2010 гг. и прогноз на 2011 г.», *Проблемы особо опасных инфекций*, 2011, №1(107), с. 24–28. ↑308

[5] Ю.С. Попков. *Теория макросистем, равновесные модели*, УРСС, М., 1999, 320 с. ↑308

[6] А.М. Цирлин. *Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах*, Наука, М., 2003, 500 с. ↑308

[7] В.В. Кафаров. *Методы кибернетики в химии и химической технологии*, Химия, М., 1971, 497 с. ↑308

[8] Г. Деч. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z преобразования*, Химия, М., 1965. ↑309

[9] *Демографический ежегодник России*, Росстат, М., 2017, 263 с. ↑311

Поступила в редакцию 9.11.2018
Переработана 21.11.2018
Опубликована 17.12.2018

Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Пример ссылки на эту публикацию:

А. А. Ованесян. «О связи между потребностью в медицинском обслуживании и распределением продолжительности жизни». *Программные системы: теория и приложения*, 2018, **9**:4(39), с. 307–317.
10.25209/2079-3316-2018-9-4-307-317
http://psta.psiras.ru/read/psta2018_4_307-317.pdf

Об авторе:

Артур Арутюнович Ованесян

Аспирант Исследовательского центра медицинской информатики Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.

0000-0003-2252-6356
e-mail: ovanesyan@interin.ru

CSCSTI 76.75.75
UDC 519.22:519.65

Artur Ovanesyan. *About relationship between the need for medical care and the distribution of life expectancy.*

Abstract. The article considers the possibility of forecasting the need for medical care of the population using the density distribution of life expectancy and the probabilistic dependence of the need for medical care by age. The relationship between the distribution of life expectancy and age distribution of patients is established. It is expressed by the average life expectancy.

An example of the distribution of life expectancy is given. It is presented in graphical form, showing the form of the found approximation together with the actual data. By approximation, the distribution of life expectancy is calculated.

The probability of dependence of the need for medical care by age is given in the article on the basis of statistical data, presented in graphical form. Since there is a relationship between this dependence and the distribution of patients by age, the forecasting of the need for medical care is realized. Examples of calculation for specific ages are given, the possibility of calculation for all ages is indicated.

As a result, the study identified the possibility of predicting the need for medical care on the basis of data on life expectancy. (*In Russian*).

Key words and phrases: relationship of distributions, life expectancy, age distribution, need for medical services.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 62H10, 33F05

doi 10.25209/2079-3316-2018-9-4-307-317

References

[1] A.D. Kuprin, V.V. Starinskiy, G.V. Petrova. *Malignant neoplasms in Russia in 2015 (morbidity and mortality)*, MNIOI im. P.A. Gertsena, M., 2017 (in Russian), 250 pp.↑308,313

[2] O.N. Choporov, S.V. Bolgov, I.I. Manakin. “Applying data mining techniques and multilevel monitoring to solving a problem of medical aid rationalization”, *Modelirovaniye, optimizatsiya i informatsionnyye tekhnologii*, 2015, no.1(8) (in Russian), 2 pp.↑308

[3] O.M. Kulikova, T.M. Lyuboshenko, A.A. Fomenko. “Oncological disease prediction in regions of the Russian Federation”, *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*, 2012, no.3 (in Russian), 25 pp. URL ↑308

[4] A.Ya. Nikitin, Ye.A. Sidorova, Ye.I. Andayev, M.V. Chesnokova. “Tick-borne infections incidence among the population of Siberian and Far East Federal Districts in 2009 and 2010 and prognosis for 2011”, *Problemy osobo opasnykh infektsiy*, 2011, no.1(107), pp. 24–28 (in Russian). doi ↑308

[5] Yu.S. Popkov. *Macrosystem theory, equilibrium models*, URSS, M., 1999 (in Russian), 320 pp.↑308

[6] A.M. Tsirlin. *Mathematical models and optimal processes in macrosystems*, Nauka, M., 2003 (in Russian), 500 pp.↑308

[7] V.V. Kafarov. *Methods of cybernetics in chemistry and chemical technology*, Khimiya, M., 1971 (in Russian), 497 pp.↑308

[8] Von G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*, Dritte, neu bearbeitete Auflage, R. Oldenbourg, Monchen–Wien, 1967 (in German), 265 pp.↑309

[9] *Demographic Yearbook of Russia*, Rosstat, M., 2017 (in Russian), 263 pp.↑311

Sample citation of this publication:

Artur Ovanesyan. “About relationship between the need for medical care and the distribution of life expectancy”. *Program Systems: Theory and Applications*, 2018, **9**:4(39), pp. 307–317. (*In Russian*).

doi 10.25209/2079-3316-2018-9-4-307-317

URL `http://psta.psiras.ru/read/psta2018_4_307-317.pdf`