ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 10, № 2(41), с. 79–91

ББК B182:B185.42
УДК 517.977

И. В. Расина, О. В. Фесько

Приближенный синтез оптимального управления для линейно-квадратических по состоянию неоднородных дискретных систем

Аннотация. Рассматриваются линейно-квадратические по состоянию неоднородные дискретные системы (НДС). Для указанного класса на основе аналога достаточных условий оптимальности Кротова строится метод приближенного синтеза оптимального управления и приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова и фразы: неоднородные дискретные системы, достаточные условия оптимальности, приближенный синтез оптимального управления.

Введение

В теории оптимального управления активно исследуются неоднородные управляемые процессы, для которых характерна с течением времени смена описаний в терминах управляемых дифференциальных или дискретных систем. Их отличает разнообразие используемых математических моделей, подходов к исследованию, а также терминология: системы переменной структуры [?1], дискретно-непрерывные системы [?2], логико-динамические системы [?3, ?4], импульсные системы [?5], гибридные системы [?6, ?7]. Одна из возможных схем исследования задач оптимального управления для таких систем состоит в обобщении для них достаточных условий оптимальности Кротова [?8, ?9]. Так, в [?2, ?10, ?11, ?12] предложена математическая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС). Это двухуровневая модель, в которой нижний уровень представляет собой описания однородных непрерывных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень

10.25209/2079-3316-2019-10-2-79-91

(дискретный) связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом с целью обеспечения минимума функционала. Для такой модели получены достаточные условия оптимальности типа Кротова и построены методы улучшения управления [?12].

Позднее эта модель была распространена на случай, когда на нижнем уровне функционируют дискретные системы [?13], и получила название неоднородных дискретных систем (НДС). Для указанной модели в [?14] предложен метод улучшения управления, предполагающий задание функций Кротова на обоих уровнях линейно зависящих от состояний систем этих же уровней. Но ситуация принципиально меняется при рассмотрении неоднородной линейно-квадратической системы. Линейно-квадратические функции Кротова обоих уровней позволяют получить из той же схемы метода решение в форме приближенного синтеза оптимального управления. Далее излагается вывод указанного метода и приводится иллюстративный пример.

1. Линейно-квадратические по состоянию неоднородные дискретные системы

Модель НДС представляет собой двухуровневую управляемую систему вида:

$$x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}a(k)|x|^2 + b(k,u), \qquad a \geqslant 0,$$
$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k,u), \qquad x^0 \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R}^{m(k)},$$
$$k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, ..., k_F\}, \qquad u \in \mathbf{U}(k,x) \subset \mathbb{R}^{r(k)},$$

где k — номер шага (этапа), $\mathbf{U}(k,x)$ — заданное при каждом k и x множество, $A(k)$, $B(k,u)$ — матрицы размеров $m(k) \times m(k)$, $m(k) \times 1$ соответственно, $a(k)$, $b(k,u)$ — заданные функции.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$ действует дискретная система нижнего уровня

$$x^{d0}(k,t+1) = x^{d0}(k,t) + \frac{1}{2}a^d(k,t)|x^d|^2 + b^d(k,t,u^d), \qquad x^{d0} \in \mathbb{R},$$
$$x^d(k,t+1) = A^d(k,t)x^d + B^d(k,t,u^d), \qquad x^d \in \mathbf{X}^d(z,t) \subset \mathbb{R}^{n(k)},$$
$$t \in \mathbf{T}\,(z) = \{t_I(z), t_I(z)+1, \ldots, t_F(z)\}, \qquad a^d \geqslant 0,$$

$$u^d \in \mathbf{U}^d\left(z, t, x^d\right) \subset \mathbb{R}^{p(k)},$$

где $A^d(k,t)$, $B^d(k,t,u^d)$ — матрицы размеров $n(k) \times n(k)$, $n(k) \times 1$, $a^d(k,t)$, $b^d(k,t,u^d)$ — заданные функции, при этом оператор правой части дискретной системы имеет вид

$$x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}\beta(k)|x_F^d|^2, \qquad x(k+1) = x(k) + \zeta(k)x_F^d,$$

$$x^d(k,t_I) = \xi(k)x, \qquad x^{0d}(k,t_I) = \frac{1}{2}\xi^1(k)|x|^2, \qquad k \in \mathbf{K}',$$

где через ξ, ξ^1, ζ, β обозначены матрицы соответствующих размеров. Здесь $z = (k,x)$ — совокупность переменных верхнего уровня, играющая на нижнем уровне роль параметров.

Решением этой двухуровневой системы считается набор

$$m = \left(x^0(k), x(k), u(k)\right),$$

где при $k \in \mathbf{K}'$: $u(k) = \left(u^d(k), m^d(k)\right)$, $m^d(k) \in \mathbf{D}^d\left(z(k)\right)$ (называемый *линейно-квадратическим по состоянию неоднородным дискретным процессом*), где $m^d(k)$ — дискретный процесс $(x^{d0}, x^d(k,t), u^d(k,t))$, $t \in \mathbf{T}(z(k))$, а $\mathbf{D}^d(z)$ — множество допустимых процессов m^d, удовлетворяющих указанной дискретной системе. Совокупность элементов m, удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям, обозначим через $\mathbf{D}$ и назовем множеством допустимых линейно-квадратических по состоянию неоднородных дискретных процессов.

Рассматривается задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала

$$I = l^{\mathrm{T}}x\left(k_F\right) + \frac{1}{2}\kappa|x(k_F)|^2 + d,$$

где l — вектор, κ — матрица, d — константа, при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x\left(k_I\right)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$, $x^d \in \mathbf{X}^d\left(z,t\right)$, где $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^d\left(z,t\right)$ — заданные множества.

2. Основные конструкции и достаточные условия оптимальности

Достаточные условия оптимальности для такой модели получаются по аналогии с условиями Кротова для дискретных систем [?9] следующим образом. Из ограничений множеств $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^d$ исключаются дискретные цепочки и вводятся функционалы (функции) $\varphi\left(k,x\right)$,

$\varphi^c\left(z,t,x^d\right)$, и с их помощью строятся ниже указанные конструкции. Кроме того, рассматривается обобщенный лагранжиан по аналогии с лагранжианом Кротова для дискретных систем:

$$L = G\left(x\left(k_F\right)\right) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \\ + \sum_{\mathbf{K}'}\Big(G^d(z) - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F} R^d(z,t,x^d(k,t),u^d(k,t))\Big),$$

$$G\left(x\right) = F\left(x\right) + \varphi\left(k_F, x\right) - \varphi\left(k_I, x\left(k_I\right)\right),$$

$$R\left(k,x,u\right) = \varphi\left(k+1, f\left(k,x,u\right)\right) - \varphi\left(k,x\right),$$

$$G^d\left(k,z,\gamma^d\right) = -\varphi\left(k+1, \theta\left(k,z,\gamma^d\right)\right) + \varphi\left(k, x\left(k\right)\right) + \\ + \varphi^d\left(k,z,t_F,x_F^d\right) - \varphi^d\left(k,z,t_I,x_I^d\right),$$

$$R^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right) = \varphi^d\left(k,z,t+1, f^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right)\right) - \varphi^d(k,z,t,x^d),$$

$$\mu^d\left(k,z,t\right) = \sup\left\{R^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right) : x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t), \\ u^d \in \mathbf{U}^d\left(k,z,t,x^d\right)\right\},$$

$$l^d\left(k,z\right) = \inf\left\{G^d\left(k,z,\gamma^d\right) :\ (\gamma^d) \in \mathbf{\Gamma}^d(k,z), \quad x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t_F)\right\}.$$

$$\mu\left(k\right) = \begin{cases} \sup\{R\left(k,x,u\right) : x \in \mathbf{X}(k), u \in \mathbf{U}\left(k,x\right)\}, & t \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K}', \\ -\inf\{l^d\left(z\right) :\ x \in \mathbf{X}\left(k\right), \quad u^v \in \mathbf{U}^v\left(k,x\right)\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases}$$

$$l = \inf\{G\left(x\right) :\ x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{X}\left(k_F\right)\}.$$

Здесь $\varphi(k,x)$ — произвольный функционал, $\varphi^d(k,z,t,x^d)$ — произвольное параметрическое семейство функционалов (с параметрами k и z), а через f, θ и f^d обозначены соответственно правые части систем дискретных уравнений верхнего и нижнего уровней на множествах $\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{T}$.

Теорема 1. *Для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любых φ, φ^d имеет место оценка*

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \le \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{E}$ и функции φ и φ^d, такие что $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Теорема 2. *Пусть имеются последовательность процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ и φ^d, такие что*

(1) $R\left(k, x_s\left(k\right), u_s\left(k\right)\right) \to \mu\left(k\right), \quad k \in \mathbf{K}$;

(2) $R^d\left(z_s, t, x_s^d\left(t\right), u_s^d\left(t\right)\right) - \mu^d\left(z_s, t\right) \to 0, \quad k \in \mathbf{K}', \quad t \in \mathbf{T}\left(z_s\right)$;

(3) $G^d\left(z_s, \gamma_s^d\right) - l^d\left(z_s\right) \to 0, \quad k \in \mathbf{K}'$;

(4) $G\left(x_s\left(t_F\right)\right) \to l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ *— минимизирующая для* I *на* $\mathbf{D}$.

Доказательства указанных теорем даны в [?13].

3. Метод приближенного синтеза оптимального управления и алгоритм

Для построения метода воспользуемся достаточными условиями оптимальности, принципами расширения [?gurman] и локализации [?gurman_rasina]. Предположим также, что $\mathbf{U}(k,x) = \mathbb{R}^{r(k)}$, $\mathbf{U}^d\left(z, t, x^d\right) = \mathbb{R}^{p(k)}$, а все используемые конструкции обладают необходимыми в дальнейшем свойствами. При этом будем отталкиваться от задачи улучшения элемента, которая состоит, по существу, в построении оператора $\eta(m) : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, такого что $I(\eta(m)) \le I(m)$ [?15].

Рассмотрим вспомогательный функционал [?gurman_rasina]

$$I_\alpha = L_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}(1-\alpha)\left(\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} |\Delta u\left(k\right)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'}\sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F} |\Delta u^d\left(k,t\right)|^2\right),$$

где $\alpha \in [0,1]$, и его приращение:

$$\Delta L_\alpha \approx G_x^{\mathrm{T}}\Delta x - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'}\left(R_x^{\mathrm{T}}\Delta x + R_u^{\mathrm{T}}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta u\right) -$$
$$- \sum_{\mathbf{K}'}\Big((G_x^{d\mathrm{T}}\Delta x + G_{x_F^d}^{d\mathrm{T}}\Delta x_F^d) -$$
$$- \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}(R_x^{d\mathrm{T}}\Delta x + R_{x^d}^{d\mathrm{T}}\Delta x^d + R_{u^d}^{d\mathrm{T}}\Delta u^d + \frac{1}{2}\Delta u^{d\mathrm{T}} R^d_{u^d u^d}\Delta u^d)\Big),$$

где R, G, R^d, G^d, L — конструкции достаточных условий оптимальности, а $\Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^d = u^d - u^{d\mathrm{I}}$, $\Delta x = x - x^{\mathrm{I}}$, $\Delta x^d = x^d - x^{d\mathrm{I}}$; здесь $m^{\mathrm{I}} = (u^{d\mathrm{I}}, x^{\mathrm{I}}, u^{d\mathrm{I}}, x^{d\mathrm{I}})$ — заданный элемент из класса D.

Предположим, что матрицы R_{uu} и $R^d_{u^d u^d}$ отрицательно определены (этого всегда можно добиться за счет выбора параметра α

[?gurman_rasina]) и найдем минимум ΔL_α по Δu, Δu^d, Δx, Δx^d_F, Δx^d. При этом зададим функции φ, φ^d в виде:

$$\varphi = \psi^{\mathrm{T}}(k)\, x(k) + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}(k)\, \sigma(k)\, x(k) + x^0,$$
$$\varphi^d = \psi^{d\mathrm{T}}(k,t)\, x^d(k,t) + \frac{1}{2} x^{d\mathrm{T}}(k,t)\, \sigma^d(k,t)\, x^d(k,t) + x^{d0},$$

где ψ, ψ^d — вектор-функции, а σ, σ^d — матрицы соответствующих размеров.

Тогда из сформулированных требований получим:

$$\Delta u = -R_{uu}^{-1} R_u, \qquad \Delta u^d = -{R^d}^{-1}_{u^d u^d} R^d_{u^d}, \tag{1}$$

$$G_{x_F} = 0, \quad R_x = 0, \quad G^d_x = 0, \quad G^d_{x^d_F} = \mathrm{const}, \quad R^d_x = 0, \quad R^d_{x^d} = 0. \tag{2}$$

Запишем условия (**??**) более подробно:

$$G_{x_F} = \alpha(l + \kappa x_F) + \psi(k_F) + \sigma(k_F) x_F = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} R_x = A^{\mathrm{T}}\psi(k+1) + \frac{1}{2}(Ax+B)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)A + {} \\ + \frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)(Ax+B) + ax - \psi(k) - \sigma(k)x = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} G^d_x = -\psi(k+1) - \frac{1}{2}\sigma(k+1)(x + \zeta(k)x^d_F) - {} \\ - \frac{1}{2}(x + \zeta(k)x^d_F)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1) + \psi(k) + \sigma(k)x - \xi^{\mathrm{T}}\psi^d - {} \\ - \frac{1}{2}\xi^{\mathrm{T}}\sigma^d(t_I)\xi x - \frac{1}{2}(\xi x)^{\mathrm{T}}\sigma^d(t_I)\xi - \xi^1 x = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} G^d_{x^d_F} = -\theta(k)^{\mathrm{T}}\psi(k+1) - \frac{1}{2}\zeta(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)(x + \zeta(k)x^d_F) - {} \\ - \frac{1}{2}(x + \zeta(k)x^d_F)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\zeta(k) - {} \\ - \beta x^d_F + \psi^d(t_F) + \sigma^d(t_F)x^d_F = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} R^d_{x^d} = A^{d\mathrm{T}}\psi^d(k,t+1) + \frac{1}{2}(A^d x^d + {} \\ + B^d)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)A^d + \frac{1}{2}A^{d\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)(A^d x + B^d) + {} \\ + a^d x^d - \psi^d(k,t) - \sigma^d(k,t)x^d = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Равенства (**??**)–(**??**) будут справедливы, если

$$(8)\quad \begin{aligned}\psi(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\psi(k+1) + \frac{1}{2}A(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)B(k) + \\ + \frac{1}{2}B(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)A(k), \quad \psi(k_F) = -\alpha l,\end{aligned}$$

$$(9)\quad \sigma(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)A(k) + a(k), \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \quad \sigma(k_F) = -\alpha\kappa,$$

$$(10)\quad \begin{aligned}\psi(k) = \psi(k+1) + \frac{1}{2}\sigma(k+1)\beta(k)x_F^d + \frac{1}{2}(\beta(k)x_F^d)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1) + \\ + \xi^{\mathrm{T}}\psi^d(k,t_I), \sigma(k) = \sigma(k+1) + \xi^{\mathrm{T}}\sigma^d(t_I)\xi + \xi^1, \quad k \in \mathbf{K}',\end{aligned}$$

$$(11)\quad \begin{aligned}\psi^d(k,t) = A(k,t)^{d\mathrm{T}}\psi^d(k,t+1) + \\ + \frac{1}{2}A^d(k,t)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)B^d(k,t) + \\ + \frac{1}{2}B^d(k,t)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t), \\ \psi^d(k,t_F) = \zeta^{\mathrm{T}}\psi(k+1) = H_{x^d F},\end{aligned}$$

$$(12)\quad \begin{aligned}\sigma^d(t_F) = \zeta^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\zeta + \beta, \quad k \in \mathbf{K}', \\ \sigma^d(k,t) = A^d(k,t)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t) + a^d(k,t).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что полученная неоднородная дискретная система векторно-матричных уравнений для ψ, ψ^d, σ, σ^d — линейная и, следовательно, всегда имеет решение.

Обозначим

$$\begin{aligned}H(k,x,u,\psi(k+1)) = \\ = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)(A(k)x(k) + B(k,u)) - b(k) - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta u|^2, \\ k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H^d(k,t,x,x^d,u^d,\psi^d(k,t)) = \\ = \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)(A^d(k,t)x^d + B^d(k,t,u^d)) - \\ - b^d(k,t,u) - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta u^d\,(k,t)\,|^2.\end{aligned}$$

Тогда

$$R_u = H_u + \frac{1}{2}B_u^{\mathrm{T}}A\sigma x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\sigma B_u + \frac{1}{2}B^{\mathrm{T}}\sigma B_u + \frac{1}{2}B_u^{\mathrm{T}}\sigma B + b_u,$$

$$R_{uu} = H_{uu} + \frac{1}{2}B_{uu}^{\mathrm{T}}A\sigma x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\sigma B_{uu} + B_u^{\mathrm{T}}\sigma B_u + B^{\mathrm{T}}\sigma B_{uu} + b_{uu},$$

$$R^d_{u^d} = H^d_{u^d} + \frac{1}{2}B^{d\mathrm{T}}_{u^d}A^d\sigma^d x^d + \frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}A^{d\mathrm{T}}\sigma^d B^d_{u^d} + \\ + \frac{1}{2}B^{d\mathrm{T}}\sigma^d B^d_{u^d} + \frac{1}{2}B^{d\mathrm{T}}_{u^d}\sigma^d B^d + b^d_{u^d},$$

$$R^d_{u^d u^d} = H^d_{u^d u^d} + \frac{1}{2}B^{d\mathrm{T}}_{u^d u^d}A^d\sigma^d x^d + \frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}A^{d\mathrm{T}}\sigma^d B^d_{u^d u^d} + \\ + B^{d\mathrm{T}}_{u^d}\sigma^d B^d_{u^d} + B^{d\mathrm{T}}\sigma^d B^d_{u^d u^d} + b^d_{u^d u^d}.$$

Заметим, что равенство $R^d_x = 0$ не дает уравнений. Очевидно, что формулы для первых и вторых производных функций R, R^d по управлениям линейно зависят от переменных состояния соответственно верхнего и нижнего уровней. Следовательно, полученное решение представляет собой приближенный синтез оптимального управления.

4. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру на шаге s.

1. «Слева направо» просчитывается исходная НДС при $u = u_s(k)$, $u^d = u^d_s(k,t)$ и заданных начальных условиях, получаются соответствующие траектории $x_s(k)$, $x^d_s(k,t)$.
2. «Справа налево» разрешается НДС относительно $\psi\,(k)$, $\psi^d\,(k,t)$, $\sigma(k)$, $\sigma^d(k,t)$ согласно (**??**)–(**??**).
3. Находятся Δu, Δu^d и новые управления $u_{s+1}(k) = u_s(k) + \Delta u$, $u^d_{s+1}(k,t) = u^c_s(k,t) + \Delta u^d$ согласно (**??**).
4. Просчитывается «слева направо» исходная НДС при новых управлениях с заданными начальными условиями.

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Теорема 3. *Пусть для заданной НДС построена указанная итерационная процедура, и функционал I ограничен снизу. Тогда она генерирует улучшающую последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$, сходящуюся по функционалу, т.е. существует число I^*, такое что $I^* \le I(m_s)$, $I(m_s) \to I^*$.*

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из свойства монотонности (по функционалу) рассмотренного оператора улучшения. Таким образом, получается монотонная числовая последовательность

$$\{I_s\} = \{I(m_s)\}, \qquad I_{s+1} \le I_s,$$

ограниченная снизу, которая по известной теореме анализа сходится к некоторому пределу: $I_s \to I_*$. □

5. Пример

Проиллюстрируем один шаг метода на примере. Пусть задана НДС:

$$\begin{aligned}
&x^{d0}(t+1) = x^{d0}(t) + \frac{1}{2}(x^d(t))^2 + \frac{1}{3}(u_1^d)^3,\\
&\quad x^d(t+1) = -2x^d(t) + (u_1^d - 1)^2, \quad x^d(0) = 1, \qquad t = 0,1,2,3,\\
&x^{d0}(t+1) = x^{d0}(t) + \frac{1}{2}(x^d)^2 + u_2^d,\\
&\qquad\qquad x^d(t+1) = (t - u_2^d)^2, \qquad t = 4,5,6,\\
&\qquad\qquad I = x^d(7) \to \min.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $K = 0,1,2$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^d, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня: $x(0) = x^d(0,0)$, $x(1) = x^d(0,4)$, $x(2) = x^d(1,7)$, $x(1) = x^d(0,4)$ и $x^d(1,4) = x(1)$. Тогда $I = x(2)$. Отсюда следует, что $a^d(0,t) = 1$, $b^d(0,t) = \frac{1}{3}(u_1^d)^3$, $A^d(0,t) = 1$, $B^d(0,t) = (u_1^d - 1)^2$, $a^d(1,t) = 1$, $A^d(1,t) = 0$, $B^d(1,t) = (t - u_2^d)^2$, $\zeta = 1$, $\xi = 1$, $\xi^1 = 0$ и $\beta = 0$.

Уравнения метода имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\psi^d(0,t) = -2\psi^d(0,t+1) - 2\sigma^d(0,t+1)(u_1^d - 1)^2,\\
&&\sigma^d(0,t) = 4\sigma^d(0,t+1) + 1,\\
&\psi^d(1,t) = 0, && \sigma^d(1,t) = 1,\\
&\psi^d(1,t_F) = \psi(k_F) = -\alpha, && \sigma^d(1,t_F) = 0,\\
&\psi(2) = -\alpha, && \sigma(2) = 0,\\
&\psi(1) = \psi(2) + \frac{1}{2}\sigma(2), && \sigma(1) = \sigma(2) + \sigma^d(1,t_I),\\
&\psi^d(0,t_F) = \psi(1), && \sigma^d(0,t_F) = \sigma(1),
\end{aligned}$$

$$R^d(0,t)_{u_1^d} = 2\psi^d(0,t+1)(u_1^d-1)+$$
$$+2\sigma^d(0,t+1)((u_1^d-1)^2-2x^d)(u_1^d-1)+(u_1^d)^2-(1-\alpha)\Delta u_1^d,$$
$$R^d(0,t)_{u_1^d u_1^d} = 2\psi^d(0,t+1)+6\sigma^d(0,t+1)(u_1^d-1)^2-$$
$$-4\sigma^d(0,t+1x^d+2u_1^d-(1-\alpha),$$
$$R^d(1,t)_{u_2^d} = -2\psi^d(1,t+1)(t-u_2^d)-2\sigma^d(1,t+1)(t-u_2^d)^3+$$
$$+1-(1-\alpha)\Delta u_2^d,$$
$$R^d(1,t)_{u_2^d u_2^d} = 2\psi^d(1,t+1)+6\sigma^d(1,t+1)(t-u_2^d)^2-(1-\alpha).$$

Начальное приближение к управлению: $u^d(0) = u^d(1) = 1$, $u^d(2) = u^d(3) = 2$, $u^d(4) = -1$, $u^d(5) = -1$, $u^d(6) = -1$. Результаты и сравнительный анализ представлены на рисунке **??** и в таблице **??**.

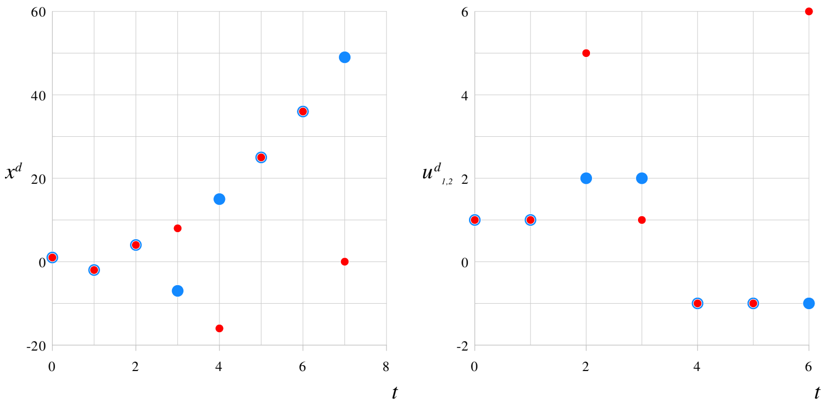


Рисунок 1. Первая и последняя итерация метода улучшения (красный цвет – последняя итерация)

Таблица 1. Изменение функционала по итерациям

Итерация	Функционал
0	49
1	16
2	4
3	0

Заключение

Таким образом, в работе предложен метод приближенного синтеза оптимального управления для линейно-квадратических по состоянию неоднородных дискретных систем, получающийся из известной схемы при специальном задании функций Кротова. Приведен иллюстративный пример, подтверждающий его работоспособность.

Список литературы

[1] С. В. Емельянов (ред.). *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970. ↑

[2] В. И. Гурман. «К теории оптимальных дискретных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 1973, №6, с. 53–58. ↑

[3] С. Н. Васильев. «Теория и применение логико-управляемых систем», *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (Москва, 2003), с. 23–52. ↑

[4] А. С. Бортаковский. «Достаточные условия оптимальности детерминированными логико-динамическими системами», *Информатика. Сер. Автоматизация проектирования*, 1992, №2-3, с. 72–79. ↑

[5] Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*, Наука, М., 2005, 429 с. ↑

[6] J. Lygeros. *Lecture notes on hybrid systems*, University of Cambridge, Cambridge, 2003, 70 pp. ↑

[7] A. J. Van der Shaft, H. Schumacher. *An introduction to hybrid dynamical systems*, Springer-Verlag, London, 2000, 176 pp. ↑

[8] В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с. ↑

[9] В. Ф. Кротов. «Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем», *ДАН СССР*, **172**:1 (1967), с. 18–21. ↑

[10] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах», *Автомат. и телемех.*, 2012, №8, с. 16–29. ↑

[11] И. В. Расина. «Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов», *Программные системы: теория и приложения*, **5**:9 (2011), с. 49–72. URL ↑

[12] И. В. Расина. «Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов», *Автомат. и телемех.*, 2012, №10, с. 3–17. ↑

[13] И. В. Расина. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*, Физматлит, М., 2014, 160 с. ↑

[14] И. В. Расина, И. С. Гусева. «Метод улучшения управления для неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями», *Программные системы: теория и приложения*, **9**:2 (2018), с. 23–38. ↑

[15] В. И. Гурман. «Абстрактные задачи оптимизации и улучшения», *Программные системы: теория и приложения*, **5**:9 (2011), с. 14–20. ↑

[16] В. И. Гурман. *Принцип расширения в задачах управления*, Наука, М., 1985, 228 с. ↑

[17] В. И. Гурман, И. В. Расина. «О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума», *Автоматика и телемеханика*, 1979, №10, с. 12–18. ↑

Поступила в редакцию 24.02.2019
Переработана 17.06.2019
Опубликована 27.06.2019

Рекомендовал к публикации *к.ф.-м.н. Ни Минь Канъ*

Пример ссылки на эту публикацию:

И. В. Расина, О. В. Фесько. «Приближенный синтез оптимального управления для линейно-квадратических по состоянию неоднородных дискретных систем». *Программные системы: теория и приложения*, 2019, **10**:2(41), с. 79–91. 10.25209/2079-3316-2019-10-2-79-91
`http://psta.psiras.ru/read/psta2019_2_79-91.pdf`

Эта же статья по-английски: 10.25209/2079-3316-2019-10-2-67-77

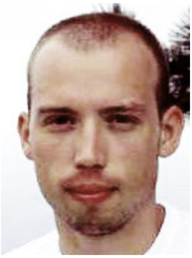
Об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968

e-mail: irinarasina@gmail.com



Олесь Владимирович Фесько

к.т.н., н.с. ИЦСА Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

0000-0002-9329-5754

e-mail: oles.fesko@hotmail.com

Sample citation of this publication:

Irina V. Rasina, Oles V. Fesko. "Approximate optimal control synthesis for nonuniform discrete systems with linear quadratic state". *Program Systems: Theory and Applications*, 2019, **10**:2(41), pp. 79–91. (*In Russian*).

10.25209/2079-3316-2019-10-2-79-91

`http://psta.psiras.ru/read/psta2019_2_79-91.pdf`

The same article in English: 10.25209/2079-3316-2019-10-2-67-77