ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 10, № 4(43), с. 141–161

ББК В161.2:В213.17
ГРНТИ 27.23.21, 28.15.15
УДК 517.929.4+517.444

А. М. Цирлин, М. А. Заева

Преобразования операции свертки в сумму и асимптотическое поведение коэффициентов устойчивых полиномов

Аннотация. Известны интегральные преобразования, для которых свертка в области оригиналов (функций скалярного действительного переменного) преобразуется в сумму изображений (функций скалярного действительного переменного). Эти преобразования задаются с точностью до линейного оператора.

Рассмотрены свойства одного из подобных преобразований, для которого экспонента преобразуется в экспоненту: его связь с преобразованием Лапласа, преобразования некоторых конкретных функций и операций дифференцирования, интегрирования, сдвига, изменения масштаба времени, умножения на экспоненту и другие.

Переход от плотности распределения случайной величины к ее кумулянтам называют кумулянтным преобразованием, по аналогии все преобразования, переводящие свертку оригиналов в сумму отображений названы кумулянтными. Показано, что формулы Ньютона, реализующие связь сумм одинаковых степеней корней полинома с его коэффициентами, являются кумулянтным преобразованием, так же как переход от функции действительного переменного к фазе или логарифму модуля ее преобразования по Фурье.

Обсуждаются возможности использования таких преобразований. Получены условия, при выполнении которых последовательность коэффициентов устойчивого полинома, являющаяся сверткой устойчивых полиномов первой и второй степени, с ростом числа этих полиномов асимптотически нормальна.

Ключевые слова и фразы: свертка оригиналов, интегральное преобразование, сумма отображений, кумулянты, устойчивые полиномы.

doi 10.25209/2079-3316-2019-10-4-141-161

Введение

Операция свертки и ее преобразования

Операция свертки двух функций действительного переменного — одна из самых распространенных в прикладной математике ([1–6]). Она имеет форму:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau \tag{1}$$

в непрерывном и

$$z(j) = x(j) * y(j) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i y_{j-i} \tag{2}$$

в дискретном случае.

Приведем несколько примеров:

Плотность распределения суммы z независимых случайных величин x и y представляет собой свертку плотностей распределения каждой их них. Так что

$$p_z(z) = p_x(x) * p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)\, p_y(z-x)\, dx. \tag{3}$$

Коэффициенты c_j *произведения* $P_{n+m}(x)$ двух полиномов вида:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n, \tag{4}$$

и

$$P_m(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + ... + b_m$$

равны свертке их коэффициентов

$$c_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{j-i}, \quad j = 0, ..., n+m, \quad a_0 = b_0 = 1. \tag{5}$$

Импульсная характеристика $k(t)$ двух последовательно включенных динамических систем представляет собой свертку импульсных характеристик каждой из них:

$$k(t) = \int_0^t k_1(t)\, k_2(t-\tau) d\tau, \quad k_1(t) = k_2(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{6}$$

Плотность распределения времени пребывания (ПРВП) частицы в системе последовательно включенных аппаратов равна свертке ПРВП в каждом из них.

Взаимно-корреляционная функция случайных сигналов на входе и выходе линейной динамической системы связана формулами свертки с автокорреляционной функцией входного сигнала и импульсной характеристикой системы.

Операция взятия неопределенного интеграла от функции $x(t)$ является частным случаем свертки (1), когда в качестве функции $y(t)$ взята функция единичного скачка (функция Хевисайда $1(t)$), равная нулю при $t < 0$ и единице для остальных значений t.

Свойства операции свертки хорошо известны [**2**]:

(1) Свертка коммутативна, так что

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

(2) Свертка ассоциативна:

$$x(t) * (y_1(t) * y_2(t)) = (x(t) * y_1(t)) * y_2(t).$$

(3) Свертка дистрибутивна относительно сложения:

$$x(t) * (y_1(t) + y_2(t)) = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t).$$

(4) Площадь под кривой $z(t)$, если она ограничена, равна произведению площадей под кривыми $x(t)$ и $y(t)$.

(5) Пусть $x(t)$ и $y(t)$ неотрицательны и нормированы (их площадь равна единице). Тогда их свертка $z(t)$ также нормирована, ее первый момент

$$m_z = \int\limits_0^\infty t\, z(t)\, dt = m_x + m_y,$$

как и второй центральный момент

$$d_z = \int\limits_0^\infty (t - m_z)^2 z(t)\, dt = d_x + d_y.$$

Для решения задач, содержащих операцию свертки, широко используют интегральное преобразование Лапласа, которое для функций, отличных от нуля лишь при $t \geq 0$, имеет вид:

$$L[f(t)] = f(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{7}$$

Здесь p — комплексная переменная, равная $p = r + i\omega$ (несмотря на одинаковое обозначение $f(t)$ и $f(p)$ совершенно разные функции). При $p = i\omega$ выражение (7) соответствует преобразованию Фурье.

Это преобразование линейно (сумме оригиналов соответствует сумма отображений) и преобразует свертку оригиналов в произведение изображений, так что

$$z(p) = x(p)\,y(p).$$

Интегрирование оригинала $f(t)$ и его дифференцирование при $f(0) = 0$ сводится в области преобразований к делению и умножению $f(p)$ на p, что очень облегчает решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотренные ниже преобразования в значительной степени базируются на преобразованиях Лапласа и Фурье. Они преобразуют свертку оригиналов в сумму отображений. Приведем примеры таких преобразований:

Пример 1. *Суммы одинаковых степеней корней x_i алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ (суммы Ньютона) связаны с его коэффициентами a_j формулами Ньютона* [7]*:*

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k = -1\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j s_{k-j} + a_k k\right), \tag{8}$$

$$s_0 = n, \quad a_0 = 1, \quad a_k = 0 \text{ при } k > n.$$

Если полином представляет собой произведение двух полиномов, последовательность его коэффициентов равна свертке последовательностей коэффициентов каждого из сомножителей, а множество корней равно объединению множеств корней каждого из сомножителей. Суммы Ньютона такого полинома получаются посредством сложения сумм Ньютона для сомножителей. Так что формулы (8) преобразуют свертку в сумму.

Пример 2. *Кумулянты (семиинварианты) k_j плотности распределения $f(x)$ случайной величины x представляют собой коэффициенты разложения в ряд Маклорена логарифма характеристической функции $W(i\omega)$ (преобразования Фурье от $f(x)$ или, что то же самое, математическое ожидание $e^{i\omega x}$).*

Коэффициенты этого разложения имеют вид:

$$k_j = (-i)^j \frac{d^j}{d\omega^j} \ln W(i\omega)_{\omega=0}. \tag{9}$$

Коэффициент k_1 равен математическому ожиданию случайной величина, а k_2 — ее дисперсии. Для нормального закона распределения все остальные кумулянты равны нулю. Поэтому отличие от нуля других коэффициентов k_j характеризует отличие закона распределения от нормального.

Так как плотность распределения суммы случайных величин $z = x + y$ равна свертке плотностей распределения слагаемых, ее характеристическая функция равна произведению характеристических функций слагаемых, а логарифм этой функции равен сумме логарифмов характеристических функций для плотностей распределения слагаемых. Так что переход к кумулянтам соответствует переходу от свертки плотностей распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ к сумме последовательностей k_j для каждой из этих плотностей. В литературе (см.[8] и др.) переход от плотностей распределения к последовательности кумулянтов назван кумулянтным преобразованием. Следуя [9, 10], будем называть так любые преобразования, переводящие свертку исходных функций в сумму преобразованных.

В обоих рассмотренных примерах осуществляется переход от одной функции действительного переменного к другой функции (последовательности), также зависящей от действительного переменного.

Отображение свертки в сумму реализует и переход от функции $f(t)$ к логарифму модуля (методы логарифмических частотных характеристик) или к фазе ее преобразования Фурье.

Ниже мы рассмотрим подобные переходы как частный случай интегрального преобразования, покажем, как такое преобразование связано с преобразованием Лапласа, чему оно равно для ряда конкретных функций и операций, обсудим, где использование подобного преобразования может быть целесообразным.

Число кумулянтных преобразований сколь угодно велико, так как требование кумулянтности определяет каждое из них с точностью до произвольного линейного оператора. Вид этого оператора можно уточнить, наложив добавочное требование, облегчающее применение преобразования в том или ином классе прикладных задач. В преобразовании, которое рассмотрено ниже, мы потребовали, чтобы функция Хевисайда и, как следствие, любая экспоненциальная функция преобразовывалась в себя.

1. Свойства кумулянтного преобразования и выбор линейного оператора

1.1. Связь с преобразованием Лапласа

Обозначим кумулянтное преобразование функции $f(t)$ как $K[f(t)] = F(r)$. Свертка $y(t) = \int\limits_0^t x(t-\tau)k(\tau)d\tau$ после преобразования по Лапласу примет форму

$$y(p) = X(p)\,k(p), \tag{10}$$

а после кумулянтного преобразования

$$Y(r) = X(r) + K(r). \tag{11}$$

Преобразование по Лапласу равенства (11) имеет вид:

$$Y(p) = X(p) + K(p). \tag{12}$$

Из сравнения выражений (10) и (12) следует, что кумулянтное преобразование функции связано с оригиналом через их изображения по Лапласу как:

$$F(p) = A[\ln f(p)], \tag{13}$$

где A — произвольный линейный оператор (интегрирования, дифференцирования, умножения на функцию от r и пр.).

Уточним вид оператора A из условия, чтобы кумулянтное преобразование функции Хевисайда $1(t)$ было равно единичной функции $1(r)$ $(K[f(t) = 1(t)] = 1(r))$. После подстановки в (13) получим:

$$L[1(r)] = \frac{1}{p} = A[\ln L[1(t)] = A[-\ln p]. \tag{14}$$

Этому уравнению удовлетворяет оператор $A_0 = -\frac{d}{dp}$. Для такого оператора равенство (13) перепишется в форме:

$$F(p) = -\frac{df(p)/dp}{f(p)}. \tag{15}$$

Переходя во временную область и учитывая, что производной преобразования Лапласа соответствует оригинал вида $-tf(t)$, получим связь между оригиналом $f(t)$ и его кумулянтным преобразованием

$F(r)$:

$$(16) \qquad \int\limits_0^t F(r)\, f(t-r)dr = \int_0^t F(t-r)\, f(r)dr = tf(t).$$

Заменив в равенстве (16) интеграл дискретной суммой по формуле трапеций, можно разрешить получившееся выражение относительно преобразования. Получим

$$(17) \qquad F(r) = \frac{1}{0,5f(0)}\left[f(r)(r-0,5F(0)) - \sum_{n=1}^{r-1} F(r-n)\, f(n)\right].$$

Для функций F и f, равных нулю при отрицательных значениях аргумента, из (17) следует, что $F(0) = -F(0) = 0$.

Если равенство (16) в дискретной форме разрешить относительно оригинала, получим обратное преобразование в виде:

$$(18) \qquad f(n) = \frac{1}{n-0,5F(0)}\left[0,5F(n)\, f(0) + \sum_{r=1}^{n-1} F(r)\, f(n-r)\right].$$

Такой переход для дискретных функций проще, чем для преобразования Лапласа, поскольку использует конечные суммы, а не бесконечный ряд.

Из сравнения (8) и (17) видно, что формулы Ньютона реализуют кумулянтное преобразование с оператором $A_N = -A_0$.

1.2. Кумулянтное преобразование некоторых функций

Преобразование функции Хевисайда единичного скачка было рассмотрено выше.

Преобразование экспоненты $e^{-at}, a > 0$, как нетрудно видеть, равно e^{-ar}. Экспонента является неподвижной точкой преобразования и при отрицательных значениях a.

Для преобразования *функции Дирака* $\delta(t-\tau)$, преобразование Лапласа которой равно $e^{-p\tau}$, формула (15) примет вид:

$$(19) \qquad L[K[\delta(t-\tau)]] = -\frac{d/dp(e^{-p\tau})}{e^{-p\tau}} = \tau.$$

Таким образом, кумулянтное преобразование функции Дирака равно $K[\delta(t-\tau)] = \tau\delta(r)$.

Преобразование $f(t) = \sin\omega t$ в соответствии с (15) равно

$$L^{-1}\left[\frac{2p}{p^2+\omega^2}\right] = 2\cos\omega r. \tag{20}$$

1.3. Кумулянтное преобразование некоторых операций

Умножение функции на константу не меняет ее преобразования. Это следует непосредственно из (15).

Сдвиг функции на τ вправо во временной области в области преобразований соответствует сложению $F(r)$ с дельта-функцией, имеющей площадь τ, $\tau\delta(r)$ (это свертка со сдвинутой на τ функцией Дирака).

Интегрирование представляет собой свертку с функцией Хевисайда, значит оно в области преобразований приводит к добавлению к преобразованию функции слагаемого $1(r)$. Двойному последовательному интегрированию соответствует добавление двух таких слагаемых, и т.д. Так что

$$K[t^n] = (n+1)1(r). \tag{21}$$

Дифференцирование обратно интегрированию и для функций $f(t)$, равных нулю при $t = 0$, кумулянтное преобразование производной $df(t)/dt$ равно $F(r) - 1(r)$.

Теорема подобия кумулянтного преобразования

$$K[f(at)] = F(ar).$$

следует из теоремы подобия преобразования Лапласа (см. [2]) $L[f(at) = \frac{1}{a}f(\frac{p}{a})]$ с использованием формулы (15)

Умножение оригинала на экспоненту соответствует той же операции в области преобразований:

$$L[K[f(t)e^{-ct}]] = \left(-\frac{df(p-c)/dp}{f(p-c)}\right) = L[F(r)](p-c) \to \\ \to K[f(t)e^{-ct}] = K[f(t)]e^{-cr}. \tag{22}$$

Деление. Пусть функция $z(t)$ такова, что ее *преобразование Лапласа* $z(p) = \frac{1}{f(p)}$, тогда ее кумулянтное преобразование $Z(r) = -F(r)$.

Теоремы о конечном и начальном значении для кумулянтного преобразования следуют с учетом (15) из теорем о начальном и конечном значении преобразования Лапласа:

$$\lim F(r)_{r\to\infty} = \lim_{p\to 0}\left(-p\frac{df(p)/dp}{f(p)}\right), \tag{23}$$

$$\lim F(r)_{r\to 0_+} = \lim_{p\to\infty}\left(-p\frac{df(p)/dp}{f(p)}\right).$$

В частности, если преобразование Лапласа для $f(t)$ имеет форму полинома $P_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n$, то $\lim F(r)_{r\to\infty} = 0$, а $F(0) = -n$.

Площадь под кривой $F(r)$, если она ограничена, равна

$$\lim_{p\to 0}\left(-\frac{df(p)/dp}{f(p)}\right),$$

а так как предельное значение знаменателя равно интегралу от функции $f(t)$, а предельное значение числителя — интегралу от $tf(t)$, то площадь под $F(r)$ равна первому моменту $\int\limits_0^\infty tf_N(t)dt$ нормированной функции оригинала

$$f_N(t) = \frac{f(t)}{\int_0^\infty f(t)dt}.$$

Суммирование с δ-функцией . Преобразование Лапласа для $z(t) = \delta(t) + f(t)$ равно $1 + f(p)$. С использованием равенства (16) получим выражение, связывающее $K[z(t)] = Z(r)$ и $f(t)$:

$$tf(t) = Z(t) + \int_0^t Z(r)f(t-r)\,dr. \tag{24}$$

Так как кумулянтное преобразование инвариантно к умножению оригинала на скаляр, то *при обратном преобразовании оригинал определен с точностью до множителя.* Этот множитель можно найти, пользуясь тем, что площадь свертки равна произведению площадей составляющих.

2. Некоторые возможности использования в динамике линейных систем

Переходные процессы в динамических системах. При построении переходных процессов в линейных системах и решении интегральных уравнений, содержащих свертки искомых функций, определенную сложность представляют структуры, в которых несколько динамических звеньев соединены последовательно или по принципу обратной связи. В этом случае переходят к преобразованию Лапласа, разрешают уравнение относительно преобразования Лапласа неизвестной функции, а затем, реализуют обратное преобразование. Обратное преобразование

Лапласа реализуют численно, представив изображение как сумму функций, для которых оригиналы известны. Линейность преобразования Лапласа позволяет найти оригинал суммы как сумму оригиналов для каждого из слагаемых. Сложности возникают, когда разложение преобразования содержит бесконечное число слагаемых.

Использование кумулянтного преобразования может упростить такое решение. Поясним это на конкретном примере [**11**]. Пусть требуется найти внешнее воздействие $u(t)$, при подаче которого на вход динамической системы, состоящей из пяти одинаковых устойчивых колебательных звеньев, процесс на выходе совпадает с заданной функцией $f(t)$. Импульсная характеристика каждого звена равна $ke^{-at}\sin\omega t$. Для решения нужно найти кумулянтное преобразование $F(r)$ желаемого выхода и вычесть из него преобразование импульсной переходной функции системы, равное $10e^{-ar}\cos\omega r$. После чего перейти к оригиналу, который и является искомым решением. Такой переход для дискретных функций проще, чем для преобразования Лапласа.

Переход от фазы или от логарифма модуля изображения по Фурье вообще не определен.

Аппроксимация функции сверткой стандартных функций. Подобно аппроксимации суммой стандартных функций (рядом), произведением, рациональной функцией, в ряде случаев может оказаться целесообразной аппроксимация сверткой стандартных функций с выбираемыми параметрами [**14**]. Переход к кумулянтному преобразованию сводит эту задачу к хорошо изученной задаче приближения преобразованной функции.

Преобразование импульсной переходной функции системы с обратной связью. Передаточная функция системы с отрицательной обратной связью имеет вид

$$W(p) = \frac{f(p)}{1+q(p)},$$

где $q(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы. Кумулянтное преобразование импульсной характеристики системы $z(t)$ равно разности преобразования функции, изображение которой находится в числителе, и функции, изображение которой находится в знаменателе, т.е.

$$K[z(t)] = Z(r) = F(r) - K[\delta(t) + q(t)]. \tag{25}$$

Выше были приведены выражения для расчета каждого из этих слагаемых. Общие свойства преобразования облегчают такой расчет.

3. Асимптотическое поведение коэффициентов устойчивых полиномов

Рассмотрим линейную динамическую систему, характеристическое уравнение которой имеет форму

$$P_n(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i = 0, \tag{26}$$

где a_i — действительные коэффициенты, а коэффициент a_n при y^n равен единице.

Система устойчива, если все корни характеристического уравнения (26) лежат левее мнимой оси. Будем предполагать, что действительные части корней характеристического уравнения *отделены от нуля*, т.е. найдется такое не зависящее от n значение $\rho > 0$, что расстояния всех корней уравнения (26) от мнимой оси, $r_i \geq \rho$. Полином $P_n(y)$ называют устойчивым.

Любой полином степени n с действительными коэффициентами можно представить как произведение элементарных полиномов с действительными коэффициентами, степени которых равны единице и двум («основная теорема алгебры»). Для устойчивого полинома коэффициенты каждого из элементарных полиномов так же отделены от нуля [**12**].

Элементарный полином первой степени $P_{1i}(y) = y + r_i$ соответствует действительному отрицательному корню, расположенному на расстоянии r_i от мнимой оси. Элементарный полином второй степени

$$P_{2i}(y) = y^2 + 2r_i y + r_i^2 + \omega_i^2 \tag{27}$$

соответствует паре комплексно–сопряженных корней с действительной частью $-r_i$ и мнимой частью $\pm\omega_i$. Так как все коэффициенты элементарных полиномов положительны, то коэффициенты полинома $P_n(y)$(свертка коэффициентов элементарных полиномов) должны быть больше нуля. Однако это условие лишь необходимое.

Необходимые и достаточные условия дают критерии устойчивости Рауса-Гурвица и Михайлова [**12**], требующие для полинома высокой степени достаточно трудоемких вычислений. Поэтому заманчиво получить дополнительную информацию об устойчивости непосредственно по виду последовательности коэффициентов a_i. Приведенные ниже утверждения позволяют судить о некоторых свойствах этой последовательности именно для полиномов высокой степени.

Далее будем нормировать коэффициенты полинома, разделив каждый коэффициент на их сумму, так что для полинома $P_{1i}(y)$ коэффициенты после нормировки равны

$$p_i = 1/(1+r_i), \quad q_i = 1 - p_i = r_i/(1+r_i), \tag{28}$$

при y в первой и в нулевой степени соответственно. Первый и второй центральный моменты для такого полинома:

$$m_{1i} = p_i, \quad d_{1i} = p_i q_i. \tag{29}$$

Для элементарного полинома второй степени (27) получим коэффициенты при y в квадрате, в первой и нулевой степени:

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i}, \quad z_i = \frac{2r_i}{\sigma_i}, \quad q_i = \frac{r_i^2 + \omega_i^2}{\sigma_i}. \tag{30}$$

Здесь через σ_i обозначена сумма коэффициентов полинома второй степени:

$$\sigma_i = (1+r_i)^2 + \omega_i^2.$$

Первый и второй центральный моменты последовательности коэффициентов устойчивого полинома второй степени равны:

$$m_{2i} = z_i + 2p_i, \quad d_{2i} = m_{2i}^2 q_i + (1-m_{2i})^2 z_i + (2-m_{2i})^2 p_i. \tag{31}$$

Нормированная последовательность коэффициентов $b_i = \dfrac{a_i}{\sum_{i=0}^n a_i}$ полинома $P_n(y)$ равна свертке нормированных последовательностей коэффициентов элементарных полиномов, а ее первый и второй центральный моменты, равные сумме соответствующих моментов элементарных полиномов (см. свойство 5 свертки), могут быть подсчитаны непосредственно через b_i как:

$$M_n = \sum_{i=0}^n i b_i, \quad D_n = \sum_{i=0}^n (i - M_n)^2 b_i. \tag{32}$$

Первоначально рассмотрим случай, когда все корни полинома $P_n(y)$ действительные и кратные, т.е. он равен с учетом нормировки:

$$P_n(y) = \left(\frac{y}{1+r} + \frac{r}{1+r}\right)^n = (py+q)^n. \tag{33}$$

Коэффициенты этого полинома образуют последовательность биномиальных коэффициентов [13]:

(34)
$$b_{ni} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^i\Big(\frac{r}{1+r}\Big)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}p^iq^{n-i}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Согласно предельной теореме Муавра-Лапласа, при стремлении n к бесконечности нормированная последовательность биномиальных коэффициентов сходится к нормальному распределению $N(i,n)$. А именно:

(35)
$$b_{ni} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n}}e^{\frac{-x^2(i,n)}{2}}(1+\delta_n) = N(i,n)(1+\delta_n).$$

В этом выражении

(36)
$$x(i,n) = \frac{i - M_n}{\sqrt{D_n}},$$

M_n и D_n — первый и второй центральный моменты последовательности биномиальных коэффициентов. В данном случае они равны np и npq соответственно. Зависимость $x(i,n)$ равномерно по i,n ограничена, т.е. существуют такие значения A и B, что $-\infty < A < x(i,n) < B < \infty$.

Величина δ_n, определяющая различие между последовательностью b_{ni} и нормальным дискретным распределением $N(i,n)$, стремится к нулю с ростом n так, что равномерно по i

(37)
$$|\delta_n| < \frac{C}{\sqrt{n}},$$

где C — положительная константа, не зависящая от n, i.

В общем случае для полинома $P_n(y)$ с нормированными коэффициентами первый момент M_n может быть подсчитан по формуле (32). Так, для полинома (34) $M_n = np$.

Подчеркнем три особенности функции $N(i,n)$:

(1) Она унимодальна.
(2) Ее максимум соответствует $i = M_n$.
(3) Величина этого максимума равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi D_n}}$.

Свойство (35) называют свойством асимптотической нормальности.

Теорему Муавра–Лапласа обычно относят к теории вероятностей. Но по существу она посвящена свойству последовательных сверток положительных нормированных дискретных функций. В случае биномиальных коэффициентов эти дискретные функции одинаковы.

3.1. Формулировка Ляпунова центральной предельной теоремы

В этой формулировке центральной предельной теоремы (ЦТП) не требуется, чтобы сворачиваемые дискретные функции были одинаковы. Она утверждает, что при некотором доказанном Ляпуновым условии результат свертки положительных нормированных функций, имеющих первый и второй центральные моменты, а также абсолютный центральный момент степени, большей двух, для достаточно большого значения n приближается к нормальному распределению $N(i, n)$, фигурирующему в (35).

Через c_i обозначим абсолютный центральный момент степени большей двух для i-го элементарного полинома $P_i(y)$, имеющего нормированные коэффициенты b_{ji}, т.е.

$$c_i(\epsilon) = \sum_j |j - m_i|^{2+\epsilon} b_{ji},$$

где $\epsilon > 0$, а через $C_n(\epsilon) = \sum_{i=1}^n c_i(\epsilon)$.

Формулировка Ляпунова ЦПТ состоит в следующем [**15**], [**16**]:

Для того, чтобы плотность распределения свертки положительных нормированных дискретных функций была асимптотически нормальной, достаточно существования такого значения $\epsilon_0 > 0$, чтобы для всех $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n(\epsilon)}{D_n^{1+0,5\epsilon}} = 0. \tag{38}$$

Дробь $L_n(\epsilon)$, в левой части этого выражения называют дробью Ляпунова.

Как и классическая формулировка ЦПТ, теорема Ляпунова определяет свойство свертки детерминированных положительных функций, для каждой из которых существуют m_i, d_i, c_i. Эти функции могут быть разными. Для асимптотической нормальности их свертки достаточно выполнения условия (38). В качестве меры погрешности приближения δ_n используется дробь Ляпунова или функция от нее, стремящаяся к нулю при $L_n \to 0$.

Процитируем оценку этой теоремы из посвященной ей статье в Википедии: *«Практическое значение теоремы Ляпунова огромно. Опыт показывает, что закон распределения суммы независимых случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию, достаточно быстро приближается к нормальному. Уже при числе слагаемых порядка десяти закон распределения суммы можно заменить на нормальный.»*

3.2. Условие асимптотической нормальности последовательности коэффициентов устойчивых полиномов

Нормированная последовательность b_i коэффициентов полинома $P_n(y)$ представляет собой свертку нормированных последовательностей коэффициентов элементарных полиномов. Роль плотностей распределения играют нормированные последовательности положительных коэффициентов элементарных полиномов. Эти коэффициенты меньше единицы, и равны нулю при $i > 2$ и $i < 0$, так что для них все перечисленные выше моменты существуют. Они определены значениями корней характеристического уравнения.

Таким образом, из теоремы Ляпунова вытекает Следствие: *Для того, чтобы последовательность коэффициентов устойчивого полинома $P_n(p)$ обладала свойством асимптотической нормальности, достаточно, чтобы характеристики элементарных полиномов m_i, $d_i, c_i(\epsilon)$ удовлетворяли условию Ляпунова* (38) при $\epsilon > 0$.

Ниже получены условия, наложенные на элементарные полиномы (т.е. на расположение корней характеристического уравнения), при которых требование (38) выполнено.

1. Так как коэффициенты элементарных полиномов отделены от нуля, то второй центральный момент каждого из них $d_i \geq \delta > 0$. В силу этого с ростом n второй центральный момент D_n полинома P_n неограниченно возрастает.

2. В силу малости ϵ и гладкости зависимостей $c_i(\epsilon)$ числитель дроби Ляпунова может быть представлен в форме $C_n = D_n + \epsilon S_n + o(\epsilon)$, где

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dc_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0},$$

а остаточный член $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Покажем, что для выполнения условия Ляпунова достаточно выполнения неравенства:

$$\left(\frac{dc_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} < 0 \quad \forall i. \tag{39}$$

Здесь, как и выше, строгое неравенство соответствует тому, что найдется такое значение $\eta < 0$, что для всех значений i производная, фигурирующая в условии (39), не превосходит η.

Если неравенство (39) выполнено, то для каждого из элементарных полиномов $d_i > c_i(\epsilon)$. В этом случае $C_n(\epsilon) < C_n(0) = D_n$ и справедливо неравенство:

$$L_n(\epsilon) < \frac{D_n}{D_n^{1+0,5\epsilon}} = \frac{1}{D_n^{0,5\epsilon}}. \tag{40}$$

С ростом D_n правая, а значит и левая часть неравенства стремится к нулю.

3.3. Полином первой степени

Покажем, что условию (39) удовлетворяет полином с отрицательными действительными корнями, находящимися от мнимой оси на расстояниях $0 < r_i < \infty$. Выражение для моментов такого полинома записаны в (31).

Центральный момент $c_i(\epsilon)$ для такой последовательности коэффициентов равен:

$$c_i = p_i^{2+\epsilon} q_i + (1-p_i)^{2+\epsilon} p_i = p_i q_i (p_i^{1+\epsilon} + q_i^{1+\epsilon}) = d_i R_i(\epsilon). \tag{41}$$

Производная

$$\left(\frac{dc_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = d_i(p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) = \\ = d_i\big[p_i \ln p_i + 1 - (1-p_i)\ln(1-p_i)\big] < 0. \tag{42}$$

Здесь учтено, что сумма коэффициентов $p + q = 1$ и они строго положительные. При этих условиях функция Гиббса, стоящая в неравенстве (42) в квадратных скобках, отрицательная для $0 < p < 1$.

Таким образом условие (39) выполнено, и *для любого устойчивого полинома с действительными отрицательными и ограниченными по модулю корнями последовательность его коэффициентов асимптотически нормальна.*

3.4. Полином второй степени

Для элементарного полинома второй степени достаточное условие сходимости может быть нарушено в некоторой области значений его коэффициентов. Найдем границу, выделяющую эту область.

Абсолютный момент степени большей двух для элементарного квадратного полинома

$$c_i(\epsilon) = p_i m_i^{2+\epsilon} + z_i|(1-m_i)|^{2+\epsilon} + q_i(2-m_i)^{2+\epsilon}. \tag{43}$$

Каждая из входящих в это выражение переменных зависит от действительной и мнимой части соответствующей пары корней r_i, ω_i в соответствии с (30)-(31).

Для выполнения условия Ляпунова достаточно, чтобы для любого i, выполнялось условие (39). Опуская технические выкладки, запишем требование отрицательности производной:

$$q_i m_i^2 \ln m_i + z_i(1-m_i)^2 \ln|1-m_i| + p_i(2-m_i)^2 \ln(2-m_i) < 0. \tag{44}$$

Число независимых параметров в левой части этого неравенства равно двум, так как

$$p = m + q - 1, \quad z = m - 2p. \tag{45}$$

Так как каждый из этих коэффициентов больше нуля и меньше единицы, то в плоскости с координатами q, m можно выделить область реализуемости:

$$1 - m < q < 1 - 0,5m.$$

Граница, определяемая неравенством (44), выделяет в этой области множество, прилегающее к ее верхней границе. Сама эта граница соответствует полиному второй степени с чисто мнимыми корнями. Поэтому, если устойчивый полином имеет большую часть корней, близких к мнимой оси, то условие Ляпунова может быть нарушено. В остальных случаях последовательность его коэффициентов асимптотически нормальна. Расчеты показывают, что если $1 - 0,5m - q > 0,06$, то условие Ляпунова выполнено.

Для того, чтобы проверить, является ли последовательность коэффициентов полинома высокой степени n асимптотически нормальной (а значит полином — устойчивым), нужно эти коэффициенты нормировать, найти M_n и D_n. Коэффициенты b_i должны быть максимальны для $i \approx M_n$, а их максимальное значение должны быть приближенно равно $1/\sqrt{2\pi D_n}$.

Заключение

Рассмотрено одно из интегральных преобразований, переводящих свертку оригиналов в сумму изображений. От других преобразования такого рода оно отличается тем, что экспоненциальные функции при преобразовании не изменяются, и простотой формул для прямого и обратного преобразования.

Найдено преобразование для некоторых функций и операций дифференцирования, интегрирования, изменения масштаба аргумента и др. Показано, что для устойчивых полиномов высокой степени, у которых все коэффициенты отделены от нуля, а корни действительны, нормированная последовательность коэффициентов близка по форме к биномиальной. Получено неравенство, выделяющее область, в которой тем же свойством обладают устойчивые полиномы с комплексными корнями.

Авторы выражают признательность за обсуждение работы и полезные замечания С. В. Знаменскому, С. С. Пухову и особенно Ю. Л. Сачкову.

Список литературы

[1] И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер. *Преобразования типа свертки*, Пер. с англ., ИЛ, М., 1958, 316 с. ↑142

[2] В. А. Диткин, А. П. Прудников. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Физматлит, М., 1961. ↑142,143,148

[3] М. Ф. Гарднер, Дж. Л. Бернс. *Переходные процессы в линейных системах*, Пер. с англ., Изд-е 3-е, Физматгиз, М., 1961, 460 с. ↑142

[4] Х. Карслоу, Ф. Егер. *Операционные методы в прикладной математике*, Пер. с англ., ИЛ, М., 1948, 292 с. ↑142

[5] Я. Микусинский. *Операторное исчисление*, Пер. с польск., ИЛ, М., 1956, 366 с. ↑142

[6] Г. Дёч, *Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*, Пер. с нем., Серия «Физико-математическая библиотека инженера», Наука, М., 1971, 288 с. ↑142

[7] Д. К. Фаддеев, *Лекции по алгебре*, Учебники для вузов. Специальная литература, Лань, М., 2004, ISBN 9785811404476. ↑144

[8] P. D. Feigin. “Conditional exponential families and a representation theorem for asymptotic inference”, *The Annals of Statistics*, **9**:3 (1981), pp. 597–603. doi ↑145

[9] А. М. Цирлин. «Кумулянтное преобразование функций», *Комплексная автоматизация химических производств*, Труды Московского института химического машиностроения, т. **XXV**, ред. Е. Г. Дудников, 1963, с. 18–25. ↑145

[10] А. М. Цирлин. «Кумулянтное преобразование и возможности его использования для исследования динамических систем», *Известия АН СССР, Техническая кибернетика*, 1963, №3. ↑145

[11] K. Tharmalingam. “The impulse response of number of identical circuits in cascade”, *Proceedings of the IEE – Part C: Monographs*, **108**:14 (1961), pp. 335–338. doi ↑150

[12] Я. З. Цыпкин. *Основы теории автоматических систем*, Наука, М., 1977, 560 с. ↑151

[13] В. Е. Гмурман, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Основы наук, 12-е изд., перераб., Высшее образование, М., 2008, ISBN 978-5-9692-0192-7, 480 с. ↑153

[14] F. B. Hildenbrand. *Introduction of numerical analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1956. ↑150

[15] В. В. Петров. *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972, 416 с. ↑154

[16] В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т. 2, Книга по Требованию, М., 2012, ISBN 978-5-458-26120-3, 766 с. ↑154

Поступила в редакцию 12.01.2019
Переработана 06.11.2019
Опубликована 05.12.2019

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. И. В. Расина*

Пример ссылки на эту публикацию:

А. М. Цирлин, М. А. Заева. «Преобразования операции свертки в сумму и асимптотическое поведение коэффициентов устойчивых полиномов». *Программные системы: теория и приложения*, 2019, **10**:4(43), с. 141–161.

10.25209/2079-3316-2019-10-4-141-161

http://psta.psiras.ru/read/psta2019_4_141-161.pdf

Об авторах:

Анатолий Михайлович Цирлин

Доктор технических наук (1978), главный научный сотрудник Исследовательского центра системного анализа Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, профессор (1985). Специалист в области оптимизационной термодинамики, методов оптимального управления, усредненной оптимизации и их приложения, автор более 20 монографий.

0000-0002-3637-6160
e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Маргарита Анатольевна Заева

Кандидат технических наук (2005), доцент Института интеллектуальных кибернетических систем Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Специалист в области цифровой обработки сигналов, разработки автоматизированных систем обработки информации и управления.

0000-0002-6634-4629
e-mail: MAZayeva@mephi.ru

CSCSTI 27.23.21, 28.15.15
UDC 517.929.4+517.444

Anatoly M. Tsirlin, Margarita A. Zaeva. *Conversions of the convolution operation to the sum and the asymptotic behavior of the stable polynomials coefficients.*

ABSTRACT. Consider the integral transformations which convert convolution in the domain of originals (functions of scalar real variable) into the sum of images (functions of scalar real variable). All these transformations are given up to a linear operator.

We discuss the properties of one of these transformations, which converts any exponent the exponent: its relationship with the Laplace transform, transform of some particular functions and operations differentiation, integration, shift, time scaling, multiplication by the exponent, etc.

Transformations of this type we call cumulative by analogy with the transition from the density distribution of a random variable to its cumulants. We show that Newton's formulas that realize the relation of sums of the same powers of the roots of a polynomial with its coefficients are cumulative transformation. Also, any transition of real variable function to its phase (same as the logarithm of the module of its Fourier transform) is.

We discuss the possible applications and obtain the conditions under which the sequence of coefficients of a stable polynomial with increasing its degree is asymptotically normal.

Key words and phrases: convolution of originals, integral transformation, sum of mappings, cumulants, stable polynomials.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 44A35; 44A10, 93D05

References

[1] I. I. Hirschman, D. V. Widder, *The convolution transform*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2005, ISBN 978-0486441757, 286 pp.↑142

[2] V. A. Ditkin, A. P. Prudnikov. *Integral transformations and operational calculus*, Fizmatlit, M., 1961 (in Russian).↑142,143,148

[3] M. F. Gardner, J. L. Barnes. *Transients in linear systems studied by the Laplace transformation*, J. Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, 1942.↑142

[4] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Operational methods in applied mathematics*, Dover books on advanced mathematics, Dover Publications, 359 pp.↑142

10.25209/2079-3316-2019-10-4-141-161

[5] J. Mikusinski, *Operational calculus*, Internat. Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. **8**, 5th English ed., Pergamon Press, New York, 1959, 495 pp.↑142

[6] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 1967, ISBN 978-3486213102 (in German).↑142

[7] D. K. Faddeyev, *Lectures on algebra textbook*, Textbooks for high schools. Special literature, 4 th ed., Lan', M., 2004, ISBN 9785811404476 (in Russian).↑144

[8] P. D. Feigin. "Conditional exponential families and a representation theorem for asymptotic inference", *The Annals of Statistics*, **9**:3 (1981), pp. 597–603. ↑145

[9] A. M. Tsirlin. "Cumulant transform of functions", *Kompleksnaya avtomatizatsiya khimicheskikh proizvodstv*, Trudy Moskovskogo instituta khimicheskogo mashinostroyeniya, vol. **XXV**, ed. Ye. G. Dudnikov, 1963, pp. 18–25 (in Russian). ↑145

[10] A. M. Tsirlin. "Cumulant transform and the possibilities of its use for the study of dynamic systems", *Izvestiya AN SSSR, Tekhnicheskaya kibernetika*, 1963, no.3 (in Russian).↑145

[11] K. Tharmalingam. "The impulse response of number of identical circuits in cascade", *Proceedings of the IEE – Part C: Monographs*, **108**:14 (1961), pp. 335–338. ↑150

[12] Ya.Z. Tsypkin. *Fundamentals of the theory of automatic systems*, Nauka, M., 1977 (in Russian), 560 pp.↑151

[13] V. Ye. Gmurman. *Theory of probability and mathematical statistics*, Osnovy nauk, 12-ye izd., pererab., Vyssheye obrazovaniye, M., 2008, ISBN 978-5-9692-0192-7 (in Russian), 480 pp.↑153

[14] F. B. Hildenbrand. *Introduction of numerical analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.↑150

[15] V. V. Petrov. *Sums of independent random variables*, Nauka, M., 1972 (in Russian), 416 pp.↑154

[16] V. Feller. *Introduction to probability theory and its applications*. V. 2, Book on Demand Ltd., M., 2012, ISBN 978-5-458-26120-3 (in Russian), 766 pp.↑154

Sample citation of this publication:

Anatoly M. Tsirlin, Margarita A. Zaeva. "Conversions of the convolution operation to the sum and the asymptotic behavior of the stable polynomials coefficients". *Program Systems: Theory and Applications*, 2019, **10**:4(43), pp. 141–161. (*In Russian*). 10.25209/2079-3316-2019-10-4-141-161

URL `http://psta.psiras.ru/read/psta2019_4_141-161.pdf`