



А. Д. Панферов, А. В. Маханьков, А. А. Трунов

## Использование адаптивной сетки на основе квадродерева для моделирования конечного состояния квантово-полевой системы при импульсном внешнем воздействии

Аннотация. Успешность использования математических моделей, определяющих поведение квантово-полевых систем в параметрических пространствах, критически зависит от уровня оптимизации процедуры получения решения. В работе рассматривается задача вычисления плотности носителей, возникающих в графене в результате действия импульсного электрического поля. Основой модели является система кинетических уравнений, обеспечивающих вычисление остаточной функции распределения. Её интегрирование по импульсному пространству даёт искомую плотность носителей. Проблема заключается в высокой вычислительной сложности покрытия импульсного пространства равномерной сеткой, обеспечивающей точное вычисление плотности для различных параметров импульса поля. При этом модель не содержит критериев определения удовлетворительных параметров сетки. В работе предложена и реализована процедура построения адаптивной сетки в форме квадродерева, имеющего переменный размер покрывающих квадратов. Построение реализовано в форме итерационной процедуры, совмещенной с процессом вычисления значений функции распределения.

*Ключевые слова и фразы:* численное моделирование, адаптивная сетка, квадродерево, графен.

### Введение

Моделирование процессов отклика графена на действие внешнего электрического поля позволяет оценивать характеристики перспективных решений на базе этого материала для большого диапазона частот, интенсивностей и длительностей импульса [1–4]. Включение внешнего поля запускает процесс рождения свободных носителей и их последующей эволюции. Свойства носителей определяются их импульсом. В силу двумерности рассматриваемой системы, импульсное

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-07-00778.

© А. Д. Панферов, А. В. Маханьков, А. А. Трунов, 2020

© Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 2020

© Программные системы: теория и приложения (дизайн), 2020



пространство (пространство волновых векторов) также двумерно. В простейшем случае можно считать, что до включения внешнего поля это пространство пусто и состояния в нем начинают заселяться в результате действия электрического поля. В силу того, что в рассматриваемом случае носители подчиняются статистике Ферми, любое из состояний может быть занято только одной квазичастицей.

Процесс заселения состояний имеет вероятностный характер и его удобно описывать функцией распределения  $0 \leq f(p_1, p_2, t) \leq 1$ , представляющей вероятность обнаружить состояние  $\{p_1, p_2\}$  заселенным в момент времени  $t$ . Используемая модель процесса определяет процедуру вычисления  $f(p_1, p_2, t)$  для выбранной точки импульсного пространства  $-\pi \leq p_1 \leq \pi, -\pi \leq p_2 \leq \pi$  (первая зона Бриллюэна) [5–7]. Процедура реализует численное решение квантового кинетического уравнения, сформулированного в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Она универсальна для любой точки импульсного пространства и параметров внешнего поля.

Наблюдаемые характеристики моделируемого процесса определяются в результате усреднения по найденной  $f(p_1, p_2, t)$ . Например, для определения поверхностной плотности носителей необходимо вычислить интеграл вида:  $n(t) = g \int dp_1 dp_2 f(p_1, p_2, t)$ , где  $g$  постоянный нормировочный коэффициент. Для вычисления интегралов такого вида необходимо иметь достаточно детальное представление о поведении функции распределения во всей области определения. Использование регулярных сеток с постоянным шагом в данном случае не является оптимальным решением [8]. В работе продемонстрированы возможности процедуры построения регулярной сетки с переменным шагом, выбираемым с учетом характера поведения функции распределения. Далее рассмотрение ограничено условием  $t \rightarrow t_{end}$ , т.е. рассматривается конечное состояние функции распределения когда после выключения внешнего поля эволюция в системе замораживается и функция распределения перестаёт зависеть от времени.

## 1. Особенности поведения функции распределения носителей в импульсном пространстве

Рассматриваемое в данном формализме пространство состояний хотя и ограничено первой зоной Бриллюэна, очень велико с физической точки зрения. Его полное заселение обеспечило бы плотность носителей на уровне  $n_{max} = 1.32 \times 10^{16} \text{ 1/cm}^2$  что недостижимо в силу многих причин (прежде всего, присутствия диссипативных процессов). Получаемые при моделировании реалистических ситуаций значения

на несколько порядков меньше  $n \ll n_{max}$ . Из этого в общем случае не следует, что  $(\forall \{p_1, p_2\})(f(p_1, p_2) \ll 1)$  т.е. функция распределения может принимать в некоторых областях пространства состояний достаточно большие значения  $f(p_1, p_2) \approx 1$ . Если это так, то в большей части пространства состояний  $f(p_1, p_2) \approx 0$  и они не дают вклада в интегральные характеристики.

В качестве примера рассмотрим процедуру моделирования действия короткого импульса электрического поля с параметрами, соответствующими использованным в работе [2]. На рисунке 1 представ-

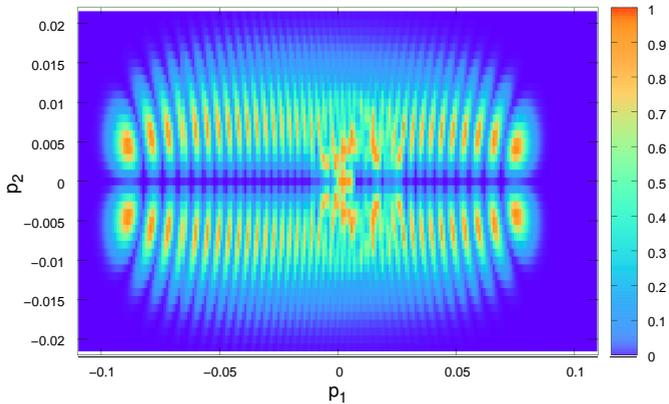


Рисунок 1. Функция распределения  $f(p_1, p_2)$  после завершения действия импульса поля с параметрами: длительность около  $2 \times 10^{-12}$  s, частота несущей  $2 \times 10^{12}$  Hz, амплитуда  $3 \times 10^4$  V/cm

лены результаты вычисления остаточной функции распределения, сформировавшейся за время действия импульса. Рисунок построен на регулярной сетке с постоянным шагом размером  $222 \times 46$  для области  $-0.1105 \leq p_1 \leq 0.1105$ ,  $-0.0225 \leq p_2 \leq 0.0225$  [9]. Все не нулевые значения функции распределения локализованы в этой области хотя она занимает только  $2.519 \times 10^{-4}$  часть первой зоны Бриллюэна. Рисунок демонстрирует очень сложное поведение функции распределения с большим количеством локальных максимумов со значениями  $f(p_1, p_2) \approx 1$ , с которыми соседствуют области малых значений  $f(p_1, p_2) \approx 0$ .

Более подробная информация об особенностях форм функции распределения собрана в работе [7]. На основании представленных там данных можно сделать вывод, что при изменении параметров действующего внешнего поля (амплитуды, длительности, характера

зависимости от времени) и область локализации, и форма зависимости  $f(p_1, p_2)$ , варьируются в очень широких пределах. В каждом конкретном случае приходится решать две отчасти самостоятельные задачи по их определению. На первом этапе необходимо с минимальными затратами ресурсов убрать из рассмотрения области с нулевыми значениями, не дающими вклада в наблюдаемые величины. На втором этапе — с заданной точностью максимально эффективно восстановить  $f(p_1, p_2)$  в области локализации.

При использовании регулярных сеток с постоянным шагом эти задачи реализуются последовательным перебором сеток различного размера и плотности с анализом результатов каждой итерации. Для автоматизации в работе предлагается механизм построения адаптивной регулярной сетки с переменным шагом.

## 2. Алгоритм построения адаптивной сетки

При решении задач оптимизации процедуры численного интегрирования часто применяется бисекция шага. Например, при использовании правила Рунге для оценки погрешности квадратурных формул и в адаптивных алгоритмах. Эта процедура обобщаема на двумерный и трехмерный случаи путем использования квадрато- и окто- деревьев. Для рассматриваемого двумерного пространства  $(p_1, p_2)$  квадрато-дерево позволяет определить его полное покрытие квадратами, отношение сторон которых принадлежит ряду значений  $2^N$ , где  $N = 1, 2, 3, \dots$  ряд натуральных чисел. Значение функции в пределах каждого такого квадрата принимается равным её значению в центральной точке.

Для обеспечения универсальности при работе с произвольными параметрами моделируемого процесса областью построения адаптивной сетки должна быть вся первая зона Бриллюэна  $-\pi \leq p_1 \leq \pi, -\pi \leq p_2 \leq \pi$ . Она выступает в качестве корня квадрато-дерева. Строго говоря, оценка значения функции распределения для корня должна выполняться в точке  $p_1 = 0, p_2 = 0$ . Однако в этой точке имеется особенность в поведении модели в силу способа определения коэффициентов используемой системы уравнений.

Проблема может быть обойдена путем введения очень небольшого смещения  $\delta \ll 2\pi$  из центра зоны Бриллюэна. В случае построения квадрато-дерева с числом поколений  $N$  это требование следует ужесточить до  $\delta \ll 2\pi/2^N$ . В принятой к реализации версии алгоритма было решено отказаться от этого способа обхода особенности и просто исключить из рассмотрения корневой узел, размещая его точно в точке  $p_1 = 0, p_2 = 0$ . Дополнительным преимуществом является гарантия, что

узлы старших поколений никогда не окажутся в этой проблемной точке.

Построение адаптивной сетки выполняется путем поэтапного разбиения (квадрирования) выбранных её элементов. Элементы, не подвергавшиеся разбиению, являются листьями квадродерева. Элементы, над которыми процедура разбиения была выполнена, представляют из себя промежуточные узлы. Критерии выбора элементов, подлежащих дальнейшему разбиению, будут играть ключевую роль для успешной работы алгоритма. Каждый шаг алгоритма будет переводить часть листьев последнего поколения в статус промежуточных узлов, надстраивая над ними листья нового поколения и завершаться вычислением значений функции распределения в новых листьях.

На начальном этапе построения дерева достаточно высока вероятность, что во всех уже имеющихся узлах и листьях значение функции распределения нулевое. В этом случае нет необходимости проводить поточечный анализ значений функции и можно сразу генерировать новое поколение для всех точек предыдущего поколения. Фактически это означает переход на каждом таком шаге к новой регулярной равномерной квадратной сетке с уменьшенным в два раза шагом  $h \rightarrow h/2$ . При этом узлы старой сетки в новую не включаются. В этом есть некоторая неэкономичность, но, с другой стороны, мы более эффективно и быстро исследуем поведение функции в пространстве параметров.

На каком-то этапе  $i$  будут обнаружены не нулевые значения. Каждое такое не нулевое значение указывает на попадание в область, информацию о которой надо будет детализировать. Но если области ненулевых значений разбросаны по импульсному пространству и имеют небольшие размеры, часть из них может быть пропущена на сетках с относительно большим шагом. Необходимо быть уверенным, что достигнутый шаг сетки  $h_i$  меньше характерного масштаба доменов  $L_d$ , в которых функция распределения принимает не нулевые значения. Если имеется оценка  $L_d$ , то можно начинать сразу с квадратной сетки с некоторым шагом  $h_N = 2\pi/2^N \lesssim L_d$ . Такая процедура была реализована программно.

К сожалению, в настоящее время не существует надежных теоретических оценок взаимосвязи параметров моделируемого процесса с размерами этих доменов. Можно определить критерии, позволяющие по результатам вычисления функции распределения на некоторой равномерной сетке считать, что обнаружены все (или почти все) области, дающие существенный вклад в интегральные характеристики. Можно, например, основываться на формировании кластеров ненулевых

точек в таких областях. В качестве самого мягкого варианта можно рассматривать, появление хотя бы одного кластера не менее чем из 5 точек, расстояние между которыми не превышает  $2\sqrt{2}h_i$  (рисунок 2).

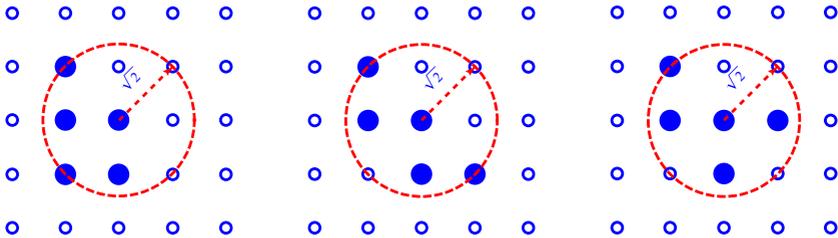


Рисунок 2. Варианты кластеров из пяти ненулевых значений на регулярной сетке с постоянным шагом

Более жестким будет требование отсутствие одиночных точек сетки с не нулевыми значениями. Выбор оптимального варианта критерия такого типа требует дополнительных исследований.

После достижения равномерной сеткой достаточной плотности выполняется переход к её адаптации путем локального изменения шага. Цель адаптации - обеспечить достаточно точную аппроксимацию функции распределения. В качестве простейшего варианта была реализована процедура адаптации, основанная на оценке точности с помощью линейной аппроксимации. Процедура реализуется локально в том смысле, что оценки выполняются в пределах одной ветви и используют точки только последних двух поколений.

Глобальность обеспечивается на начальной итерации, когда анализируются данные для двух полных решеток последних поколений. Далее на каждой итерации с номером  $i$  рассматриваются все узловые точки поколения  $i - 1$  (условно отождествляем номер итерации с последним номером поколения листьев в квадродереве). То, что эти точки узловые (не листья), означает что на предыдущей итерации качество аппроксимации функции распределения для этой точки было признано неудовлетворительным и в сетку были добавлены её листья.

Для каждой из таких точек рассматриваются значения функции распределения каждого из 4 листьев. Поводом для дальнейшего разбиения каждого из листьев является:

- (1) Нулевое значение для листа при не нулевом значении родительского узла;
- (2) Не нулевое значение для листа при нулевом значении родительского узла;
- (3) Плохая аппроксимация значения противоположного листа по не

нулевым значениям рассматриваемого листа и родительского узла.

Адаптация сетки продолжается до исчерпания узлов, в которых выполняются перечисленные условия или до достижения некоторого задаваемого минимального шага сетки  $h_{min}$ .

### 3. Демонстрация на примере моделирования действия одиночного импульса

В качестве примера демонстрации предложенного подхода рассматривается моделирование результатов действия импульсного электрического поля вида

$$(1) \quad E_1(t) = E_{01} \cos(2\pi\nu t) \exp\left(-\frac{t^2}{2\left(\frac{\sigma}{2\pi\nu}\right)^2}\right), \quad E_2(t) = 0.$$

В этом случае поле имеет постоянное направление действия, с которым ассоциировано направление первой координатной оси. Амплитудное значение поля  $E_{01}$  принято равным 300 В/мм, частота  $\nu = 2$  ТГц, а параметр  $\sigma$ , определяющий характерную длительность импульса  $\sigma/2\pi\nu$ , равен 6.

Результат моделирования результирующей функции распределения для таких параметров в области  $-0.00402 \leq p_1 \leq 0.00402$ ,  $-0.00402 \leq p_2 \leq 0.00402$  на регулярной квадратной сетке с постоянным шагом размером  $202 \times 202$  представлен на рисунке 3. Основным отличием приведенных параметров от случая, иллюстрировавшегося на рисунке 1, является меньшая на два порядка амплитуда поля. Тем не менее это приводит к очень радикальному изменению формы функции распределения и области её локализации. С одной стороны это является дополнительной демонстрацией тезиса о изменчивости формы функции распределения, с другой её упрощение в данном случае позволяет более наглядно проиллюстрировать построение сетки с переменным шагом.

Процедура начинается с рассмотрения всей области определения  $f(p_1, p_2)$ . Для неё было построено квадродревцо, содержащее семь поколений узлов. Для каждого поколения строилась полная равномерная сетка, поскольку на всех итерациях (включая последнее седьмое поколение) в узлах были только нулевые значения.

Всего значения функции распределения были вычислены для 21844 точек. Шаг сетки седьмого поколения составлял 0.049024 и при этом ни одного не нулевого значения функции распределения (здесь и далее в качестве ненулевых значений рассматриваются  $f(p_1, p_2) > 1.0 \times 10^{-5}$ ) обнаружено не было. Из предварительных данных о поведении функции распределения (рисунок 3) понятно, что это ожидаемый результат, поскольку область локализации более

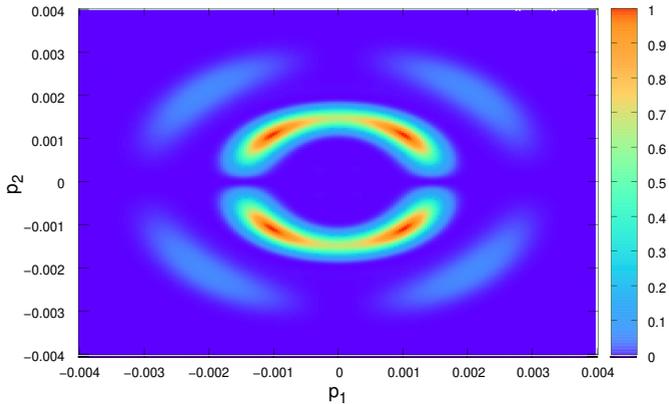


Рисунок 3. Функция распределения  $f(p_1, p_2)$  после завершения действия импульса поля с параметрами: длительность около  $2 \times 10^{-12}$  s, частота несущей  $2 \times 10^{12}$  Hz, амплитуда  $3 \times 10^2$  V/cm

чем на порядок меньше достигнутого минимального шага сетки. Следовательно, необходимо продолжить квадрирование сетки до обнаружения ненулевых значений. Однако при достигнутом размере квадродерева процедура анализа результатов каждой итерации и форматирование данных в последовательной реализации становится все более затратной по времени.

Естественным является переход к параллельной реализации такого поиска. В силу независимости процедуры поиска для любой ветви квадродерева, такое распараллеливание может быть реализовано на любом этапе при наличии соответствующих вычислительных ресурсов. Далее принимается, что распараллеливание выполняется при достижении последним текущим поколением квадродерева размера  $32 \times 32 = 1024$ . В результате появляется возможность вести поиск в каждой из 1024 областей размером  $2\pi/32 \times 2\pi/32$  самостоятельно.

При этом необходимо учитывать, что такой поиск не является абсолютно независимым. Результаты каждой итерации для всех областей должны сопоставляться. Если хотя бы в одной области найдены не нулевые значения, удовлетворяющие обсуждавшимся выше критериям, глобальный поиск прекращается.

На следующем этапе рассматривалась только одна область  $2\pi/32 \times 2\pi/32$  в центре зоны Бриллюэна. Для неё строится новое квадродерево, являющееся продолжением части исходного. Первые четыре не нулевые

значения появляются в нём в пятом поколении.

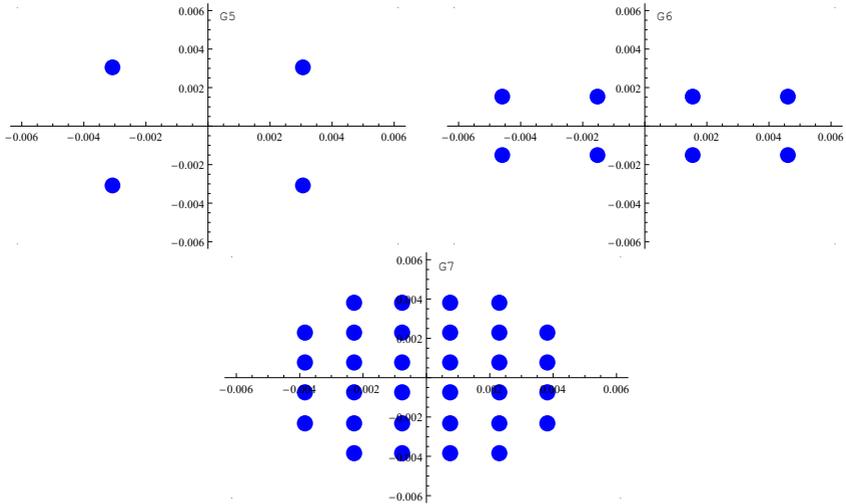


Рисунок 4. Ненулевые значения функции распределения в поколениях 5, 6 и 7

На рисунке 4 для центральной области  $-0.006128 \leq p_1 \leq 0.006128$ ,  $-0.006128 \leq p_2 \leq 0.006128$  представлены эти точки и точки с ненулевыми значениями шестого и седьмого поколений (их 8 и 20 соответственно). Работа со сплошной сеткой завершается на следующем поколении при размере покрывающих квадратов  $0.000766 \times 0.000766$ . Результат вычисления значений функции распределения на этой сетке показан на рисунке 5. Количество ненулевых точек 132, а максимальное значение функции распределения достигает 0.7425. В отличие от предыдущего, на этом рисунке точки имеют пять вариантов размера в соответствии с попаданием функции в интервалы значений  $1.0 > f(p_1, p_2) > 1.0 \times 10^{-5}$ .

На этом этапе было принято, что функция распределения локализована в представленной на рисунках 4 и 5 области. Всего в ней к этому моменту были определены значения для 341 точки (из них 176 не нулевые).

Дальнейшая адаптации сетки выполнялась в пять этапов, т.е. по описанной выше процедуре было построено ещё пять поколений узлов, но теперь они достраивались только в областях перехода к нулевым значениям и высоким градиентам функции распределения. На рисунках 6 и 7 показаны результаты первого (+288 точек) и второго (+384 точки) этапов (только точки с ненулевыми значениями). Размеры

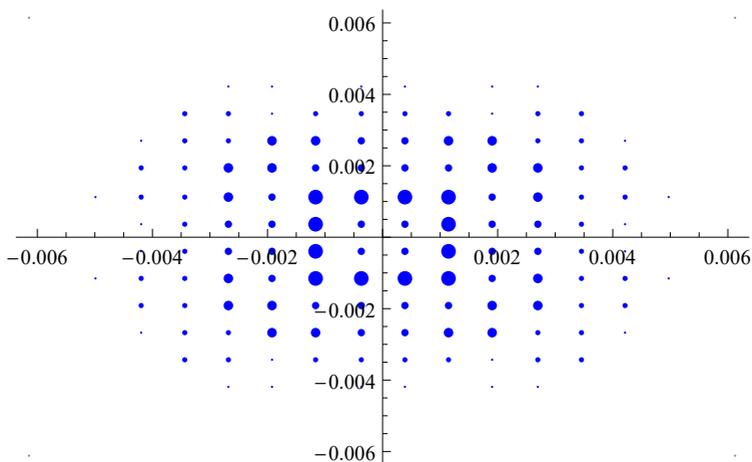


Рисунок 5. Ненулевые значения функции распределения  $f(p_1, p_2) > 1.0 \times 10^{-5}$  на сетке с размером ячеек  $0.000766 \times 0.000766$ . Размер точек ранжирован для интервалов значений  $1.0 > 10^{-1} > 10^{-2} > 10^{-3} > 10^{-4} > 10^{-5}$

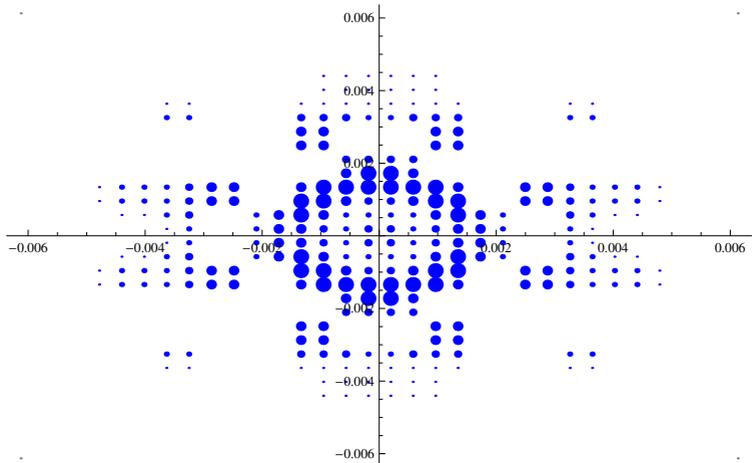


Рисунок 6. Первый этап адаптации сетки

точек также ранжированы в соответствии со значениями функции распределения в них, но с меньшим масштабом. На последующих трех этапах были построены и посчитаны 272, 176 и 176 точек соответственно. На последнем этапе шаг достраиваемой сетки стал меньше шага

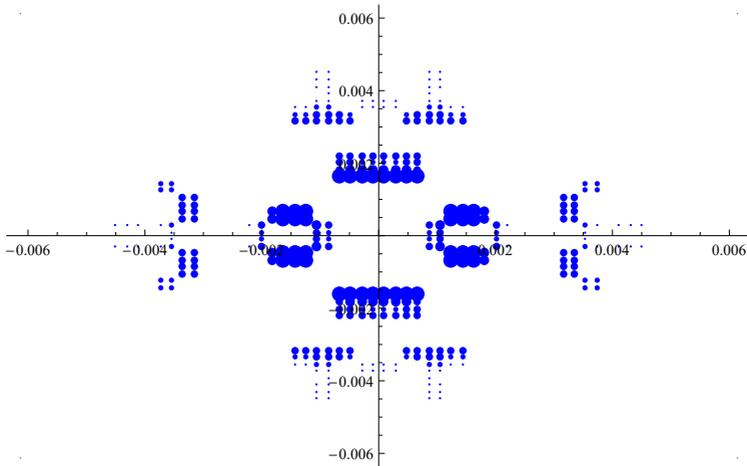


РИСУНОК 7. Второй этап адаптации сетки

однородной сетки, результаты использования которой показаны на рисунке 3.

В качестве целевого параметра для оценки качества сетки использовалось вычисляемое на каждом этапе значение плотности носителей. Ориентиром служило значение  $1.01278 \times 10^9 / \text{cm}^2$ , полученное на однородной сетке. Результаты представлены в таблице.

Результаты вычисления плотности носителей на разных сетках

Используемая сетка	Плотность носителей $1/\text{cm}^2$
Равномерная сетка $202 \times 202 = 40804$ узла	$1.012780 \times 10^9$
Квадродерево в области локализации 341 узел	$0.967066 \times 10^9$
Первый шаг адаптации $341 + 288 = 629$ узлов	$1.002584 \times 10^9$
Второй шаг адаптации $629 + 384 = 1013$ узлов	$1.013377 \times 10^9$
Третий шаг адаптации $1013 + 272 = 1285$ узлов	$1.014233 \times 10^9$
Четвертый шаг адаптации $1285 + 176 = 1461$ узлов	$1.014268 \times 10^9$
Пятый шаг адаптации $1461 + 176 = 1637$ узлов	$1.014269 \times 10^9$

Можно сделать вывод, что интегральное целевое значение быстро и устойчиво сходится. Уже на сетках из прядка тысячи узлов тестовое значение, полученное на равномерной сетке из 40804 узлов, хорошо воспроизводится. Представляется интересным детальное исследование поведения интегральных характеристик, вычисляемых на адаптивных сетках представленного типа.

## Заключение

Необходимо отметить, что с аналогичной проблемой приходится сталкиваться при моделировании процессов рождения электрон-позитронных пар в квантовой электродинамике (КЭД), [10–12]. В общей постановке в случае КЭД задача трехмерна. Построение адаптивной сетки в этом случае возможно по аналогичному алгоритму в формате октодеревя. Но существует большой класс задач, в которых в силу различного типа симметрий внешнего поля удается ограничиться двумя измерениями, например [13, 14]. В этих случаях предложенное в настоящей работе решение применимо с минимальными доработками.

Представленные результаты позволяют ускорить и автоматизировать процедуру построения расчетных сеток для численного моделирования процессов генерации носителей в двумерных средах (или для двумерных задач в трехмерных средах). Предложенный подход имеет большой потенциал развития используемых процедур и совершенствования методов оценки получаемых результатов. Отработка и оценка выполнялась на примере задачи моделирования реакции графена на действие внешнего электрического поля с реалистическими параметрами.

## Список литературы

- [1] M.M. Glazov, S.D. Ganichev. “High frequency electric field induced nonlinear effects in graphene”, *Physics Reports*, **535**:3 (2014), pp. 101–138. [doi](#) ↑<sub>79</sub>
- [2] P. Bowlan, E. Martinez-Moreno, K. Reimann, T. Elsaesser, M. Woerner. “Ultrafast terahertz response of multilayer graphene in the nonperturbative regime”, *Phys. Rev. B*, **89**:4 (2014), 041408. [doi](#) ↑<sub>79, 81</sub>
- [3] M. Baudisch, A. Marini, J.D. Cox, T. Zhu, F. Silva, S. Teichmann, M. Massicotte, F. Koppens, L.S. Levitov, F.J. Garcia de Abajo, J. Biegert. “Ultrafast nonlinear optical response of Dirac fermions in graphene”, *Nature Communications*, **9** (2018), 1018. [doi](#) ↑<sub>79</sub>
- [4] Zi-Yu Chen, Rui Gin. “Circularly polarized extreme ultraviolet high harmonic generation in graphene”, *Optics Express*, **27**:3 (2019), pp. 3761–3770. [doi](#) ↑<sub>79</sub>
- [5] S.A. Smolyansky, D.V. Churochkin, V.V. Dmitriev, A.D. Panferov, B. Kämpfer. “Residual currents generated from vacuum by an electric field pulse in 2+1 dimensional QED models”, *EPJ Web of Conferences*, **138** (2017), 06004. [doi](#) ↑<sub>80</sub>
- [6] A.D. Panferov, S.A. Smolyansky, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. “Comparing two different descriptions of the I-V characteristic of graphene: theory and experiment”, *EPJ Web of Conferences*, **204** (2019), 06008. [doi](#) ↑<sub>80</sub>
- [7] S.A. Smolyansky, A.D. Panferov, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. “Nonperturbative kinetic description of electron-hole excitations in graphene in a time dependent electric field of arbitrary polarization”, *Particles*, **2**:2 (2019), pp. 208–230. [doi](#) ↑<sub>80, 81</sub>

- [8] А.Д. Панферов, А.В. Маханьков. «Моделирование действия коротких оптических импульсов на графен», *Программные системы: теория и приложения*, **10:1(40)** (2019), с. 33–46.  [↑<sub>90</sub>](#)
- [9] А.А. Трунов, Р.Д. Аль-Карави, Т.Т. Веревин, Н.А. Новиков, А.Д. Панферов. «Визуализация и анализ массивов данных при моделировании поведения графена во внешнем электрическом поле», *Информационные технологии и математическое моделирование*, Материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Т. 1, ИТММ-2019 (26–30 июня 2019 г., Саратов, Россия), Издательство НТЛ, Томск, 2019, ISBN 978-5-89503-628-0, с. 158–162.   [↑<sub>s1</sub>](#)
- [10] J.S. Schwinger. “On gauge invariance and vacuum polarization”, *Phys. Rev.*, **82:5** (1951), pp. 664–679.  [↑<sub>90</sub>](#)
- [11] V.N. Pervushin, V.V. Skokov. “Kinetic description of fermion production in the oscillator representation”, *Acta Phys. Polon. B*, **37** (2006), pp. 2587–2600.  [↑<sub>90</sub>](#)
- [12] F. Hebenstreit, R. Alkofer, H. Gies. “Pair production beyond the Schwinger formula in time-dependent electric fields”, *Phys. Rev. D*, **78:6** (2008), 061701.  [↑<sub>90</sub>](#)
- [13] D.B. Blaschke, B. Kämpfer, S.M. Schmidt, A.D. Panferov, A.V. Prozorkevich, S.A. Smolyansky. “Properties of the electron-positron plasma created from a vacuum in a strong laser field: Quasiparticle excitations”, *Phys. Rev. D*, **88:4** (2013), 045017.  [↑<sub>90</sub>](#)
- [14] A.D. Panferov, S.A. Smolyansky, A. Otto, B. Kämpfer, D.B. Blaschke, L. Juchnowski. “Assisted dynamical Schwinger effect: pair production in a pulsed bifrequent field”, *Eur. Phys. J. D*, **70** (2016), 56.  [↑<sub>90</sub>](#)

Поступила в редакцию 18.12.2019  
 Переработана 16.01.2020  
 Опубликована 26.03.2020

Рекомендовал к публикации

*д.ф.-м.н. С. М. Абрамов*

*Пример ссылки на эту публикацию:*

А. Д. Панферов, А. В. Маханьков, А. А. Трунов. «Использование адаптивной сетки на основе квадродерева для моделирования конечного состояния квантово-полевой системы при импульсном внешнем воздействии». *Программные системы: теория и приложения*, 2020, **11:1(44)**, с. 79–92.

 [10.25209/2079-3316-2020-11-1-79-92](https://doi.org/10.25209/2079-3316-2020-11-1-79-92)

 [http://psta.psir.ru/read/psta2020\\_1\\_79-92.pdf](http://psta.psir.ru/read/psta2020_1_79-92.pdf)

Эта же статья по-английски:  [10.25209/2079-3316-2020-11-1-93-105](https://doi.org/10.25209/2079-3316-2020-11-1-93-105)

*Об авторах:*

### **Анатолий Дмитриевич Панферов**



К.ф.-м.н., зам. начальника ПРЦНИТ Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по научно-производственной деятельности. Научные интересы: высокопроизводительные вычисления, параллельное программирование, численное решение квантовых кинетических уравнений, моделирование процессов вакуумного рождения частиц в КЭД, генерации носителей в полупроводниках в том числе бесщелевых, процессов на ранних стадиях столкновения релятивистских ядер.

 0000-0003-2332-0982  
e-mail: panferovad@info.sgu.ru

### **Алексей Владимирович Маханьков**



Аспирант Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Научные интересы: моделирование физических процессов на высокопроизводительных вычислительных системах, параллельное программирование.

 0000-0002-9848-9734  
e-mail: next642009@yandex.ru

### **Александр Алексеевич Трунов**



Научные интересы: моделирование физических процессов на высокопроизводительных вычислительных системах, применение параллельного программирования для решения прикладных задач, моделирование виртуальных приборов в среде графического программирования LabVIEW.

 0000-0003-2831-6763  
e-mail: snek271@yandex.ru

*Sample citation of this publication:*

Anatolii D. Panferov, Alexey V. Makhankov, Alexandr A. Trunov. "The use of an adaptive mesh based on a quad tree for modeling the final state of a quantum field system under pulsed external action". *Program Systems: Theory and Applications*, 2020, **11**:1(44), pp. 79–92. (In Russian).  10.25209/2079-3316-2020-11-1-79-92

 [http://psta.psiras.ru/read/psta2020\\_1\\_79-92.pdf](http://psta.psiras.ru/read/psta2020_1_79-92.pdf)

The same article in English:

 10.25209/2079-3316-2020-11-1-93-105