ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 11, №2(45), с. 3–22

ББК B171.51:B161.83
ГРНТИ 27.37.17, 28.15.23
УДК 519.216.7:517.977.5

К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев

Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в задаче оптимального управления стохастической системой с запаздывающим аргументом

Аннотация. Рассмотрена задача оптимального управления, математические модели которых задаются нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито с запаздывающим аргументом и диффузными компонентами, позволяющими учитывать действующие на систему случайные возмущения непрерывной природы.

В предположении выпуклости области допустимого управления получено линеаризованное необходимое условие оптимальности. Исследован квазиособый случай. Описаны общие необходимые условия оптимальности квазиособых управлений. Рассмотрены частные случаи.

Ключевые слова и фразы: стохастическая теория управления, уравнения Ито, особые управления.

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом являются адекватным математическим аппаратом при описании многочисленных явлений в теории автоматического регулирования, механике, биологии, экономике и радиофизике [1–6].

В статье рассматриваются системы управления, математические модели которых задаются нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом и диффузными компонентами. Это позволяет учитывать действующие на систему случайные возмущения непрерывной природы.

Принцип максимума Понтрягина для различных задач оптимального управления стохастическими системами с запаздывающим аргументом получен в [7–11]. В [9] рассмотрен особый случай вырождения условия максимума и получено необходимое условие оптимальности для особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений. Это рассмотрение также приводится в [12].

Известно (см. [12]), что особые, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления являются также квазиособыми. Обратное неверно, т.е. квазиособые управления могут и не быть особыми, в этом смысле.

Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений позволяют получить дополнительную информацию об управлениях, не являющихся особыми в смысле принципа максимума. Оптимальность в этом классе имеет сравнительно простую структуру, что важно с точки зрения проверки.

Предлагаемая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности квазиособых управлений в задачах оптимального управления, описываемых стохастическими системами с запаздывающим аргументом. В ней установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков (линеаризованный принцип максимума и необходимое условие оптимальности квазиособых управлений).

Рассмотрение использует стохастический аналог метода, предложенный и развитый в работах К.Б.Мансимова (см., например, [13–15]) для детерминированных задач оптимального управления.

1. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство. Рассмотрим n-мерный стандартный винеровский процесс $w(t)$, определенный на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P). Обозначим $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ пространство измеримых по (t, ω) случайных процессов

$$x(t, \omega) : [t_0, t_1] : \Omega \to R^n,$$

для которых $E \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^2 dt < +\infty$, где E — знак математического ожидания.

Допустим, что поведение динамического объекта на отрезке времени $t \in T = [t_0, t_1]$ описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$dx(t) = f\big(t, x(t), x(t-h), u(t)\big)dt + \sigma\big(t, x(t), x(t-h)\big)dw(t),$$
$$t \in (t_0, t_1], \; h \ge 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \Phi(t) \text{ при } t \in E_{t_0} = [t_0 - h, t_0), \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Здесь

$x(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ — вектор состояния;

$f(t, x, y, u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, y, u) до второго порядка включительно, причем $y(t) = x(t - h)$;

$\sigma(t, x, y) : T \times R^n \times R^n \to R^{n \times n}$ — $(n \times n)$-мерная матричная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, y) до второго порядка включительно;

$\Phi(t) \in L_F^2(t_0 - h, t_0; R^n)$ — почти наверно (п.н) непрерывная на E_{t_0} начальная вектор - функция;

t_0 и t_1 — заданные моменты.

Определим множество допустимых управлений U_d формулой

$$u(t) \in U_d \equiv \left\{ u(\cdot) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r) / u(t) \in U \subset R^r, \text{ п.н.} \right\}, \tag{4}$$

где U — заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество, и назовём процесс $(u(t), x(t))$ допустимым процессом.

В дальнейшем предполагается, что функция $f(t, x, y, u)$ и матрица $\sigma(t, x, y)$ удовлетворяют условиям гладкости типа [16,17], обеспечивающим существование единственного решения системы (1)-(3) при каждом допустимом управлении $u(t),\ t \in T$.

Наша цель — минимизировать на множестве допустимых управлений критерий качества

$$S(u) = E\left\{ \varphi\big(x(t_1)\big) \right\}, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (1)-(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t), x(t)\big)$ — оптимальным процессом.

2. Необходимое условие оптимальности первого и второго порядков

Пусть $\big(u(t), x(t)\big)$ — оптимальный процесс. Обозначим

$$\big(\overline{u}(t), \overline{x}(t)\big) = \big(u(t) + \Delta u(t), x(t) + \Delta x(t)\big)$$

произвольный допустимый процесс и запишем формулу для приращения функционала

$$\Delta S(u) = S\big(\overline{u}\big) - S(u) = E\big\{\varphi\big(\overline{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big)\big\}. \tag{6}$$

Приращение траектории $\Delta x(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} d\Delta x(t) &= d\big[\overline{x}(t) - x(t)\big] = \\ &= \Big(f\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t)\big) - f\big(t, x(t), y(t), u(t)\big)\Big)dt + \\ &\quad + \Big(\sigma\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t)\big) - \sigma\big(t, x(t), y(t)\big)\Big)dw(t), \quad t \in (t_0, t_1], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Delta x(t) = 0, \qquad t \in E_{t_0}. \tag{8}$$

Пусть $\psi(t) \in L^2_F(t_0, t_1; R^n)$ — случайный процесс, стохастический дифференциал которого имеет вид

$$d\psi(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dw(t),$$

где $\alpha(t) - n$ — мерная измеримая и ограниченная функция. Тогда из формулы Ито [16–18] вытекает, что

$$\begin{aligned} d\big(\psi'(t)\Delta x(t)\big) &= d\psi'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)d\Delta x(t) + \beta(t)[\sigma\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t)\big) - \\ &\qquad - \sigma\big(t, x(t), y(t)\big)]dt = \\ &= d\psi'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)[\Big(f\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t)\big) - \\ &\qquad - f\big(t, x(t), y(t), u(t)\big)\Big)dt + \\ &\qquad + \sigma\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t)\big) - \sigma\big(t, x(t), y(t)\big)dw(t)] + \\ &\qquad + \beta(t)\Big[\sigma\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t)\big) - \sigma\big(t, x(t), y(t)\big)\Big]dt, \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь, и в дальнейшем, $(')$ означает операцию транспонирования, а для векторов скалярное произведение.

Введем стохастический аналог функции Гамильтона-Понтрягина и ряд обозначений, позволяющих упрощать записи формул

$$\begin{aligned}
H(t,x,y,u,\psi) &= \psi' f(t,x,y,u),\\
H_x[t] &= H_x\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_y[t] &= H_y\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_u[t] &= H_u\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_{xx}[t] &= H_{xx}\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_{xy}[t] &= H_{xy}\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_{yx}[t] &= H_{yx}\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_{ux}[t] &= H_{ux}\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_{uy}[t] &= H_{uy}\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big),\\
H_{uu}[t] &= H_{uu}\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x[t] &= f_x\big(t,x(t),y(t),u(t)\big), & f_y[t] &= f_y\big(t,x(t),y(t),u(t)\big),\\
f_u[t] &= f_u\big(t,x(t),y(t),u(t)\big), & \sigma_x[t] &= \sigma_x\big(t,x(t),y(t)\big),\\
\sigma_y[t] &= \sigma_y\big(t,x(t),y(t)\big), & \sigma_{xx}[t] &= \sigma_{xx}\big(t,x(t),y(t)\big)
\end{aligned}$$

Введенные обозначения позволяют представить формулу (9) в виде:

$$\begin{gathered}
d\big(\psi'(t)\Delta x(t)\big) = d\psi^{'}(t)\Delta x(t)+\\
+\big[H\big(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\overline{y}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big)\big]dt+\\
+\psi'(t)\Big(\sigma\big(t,\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big) - \sigma\big(t,x(t),y(t)\big)\Big)dw(t)+\\
+\beta(t)\Big(\sigma\big(t,\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big) - \sigma\big(t,x(t),y(t)\big)\Big)dt
\end{gathered} \tag{10}$$

С учетом (8) и (10), выражение (6) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}
\Delta S(u) = E\Bigg\{\varphi\big(\overline{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) + \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} d\psi'(t)\Delta x(t)-\\
-\int_{t_0}^{t_1}\Big(H\big(t,\overline{x}(t),\overline{y}(t),\overline{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)\big)\Big)dt-\\
-\int_{t_0}^{t_1}\beta(t)\Big(\sigma\big(t,\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big) - \sigma\big(t,x(t),y(t)\big)\Big)dt\Bigg\}.
\end{gathered}$$

Используя формулу Тейлора, получим:

$$
\begin{aligned}
\Delta S(u) = E\Bigg\{ & \varphi'_x\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} d\psi'(t)\Delta x(t) - \int_{t_0}^{t_1} H'_x[t]\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} H'_y[t]\Delta y(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t]\Delta u(t)dt - \\
& - \frac{1}{2}\Bigg[\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)H_{xy}[t]\Delta y(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t)H_{yx}[t]\Delta x(t)dt + \\
& \quad + \int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t)H_{yy}[t]\Delta y(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt + \\
& \quad + 2\int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)dt + 2\int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t)H_{uy}[t]\Delta y(t)dt\Bigg] - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \beta(t)\sigma'_x[t]\Delta x(t)dt - \int^{t_1} t_0\beta(t)\sigma'_y[t]\Delta y(t)dt - \\
& - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\beta(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t)dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t)\beta(t)\sigma_{yy}[t]\Delta y(t)dt - \\
& - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\beta(t)\sigma_{xy}[t]\Delta y(t)dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t)\beta(t)\sigma_{yx}[t]\Delta x(t)dt\Bigg\} + \eta(\Delta u), \qquad (11)
\end{aligned}
$$

где по определению

(12)

$$
\eta(\Delta u) = E\Bigg\{ o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \int_{t_0}^{t_1} o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2)dt - \int_{t_0}^{t_1} \beta(t)o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]^2)dt\Bigg\}.
$$

Здесь, по определению, величины $o_1(\cdot), o_2(\cdot)$, и $o_3(\cdot)$ определяются соответственно из разложений

$$\varphi\big(\overline{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) =$$
$$= \varphi_x'\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + o_1\big(\|\Delta x(t_1)\|^2\big),$$
$$H\big(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)\big) =$$
$$= H_x'[t]\Delta x(t) + H_y'[t]\Delta y(t) + H_u'[t]\Delta u(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xy}[t]\Delta y(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta y'(t)H_{yx}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta u'(t)H_{uy}[t]\Delta y(t) + \frac{1}{2}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t) +$$
$$+ o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\| + \|\Delta u(t)\|^2),$$
$$\sigma\big(t, \overline{x}(t), y(t)\big) - \sigma\big(t, x(t), y(t)\big) =$$
$$= \sigma_x'[t]\Delta x(t) + \sigma_y'[t]\Delta y(t) + \frac{1}{2}\Delta x'(t)\sigma_{xx}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t)\sigma_{xy}[t]\Delta y(t) + \frac{1}{2}\Delta y'(t)\sigma_{yx}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]^2).$$

Предположим, что случайные процессы $\psi(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ и $\beta(t) \in L_F^2\,(t_0, t_1; R^{n\times n})$ являются решением следующей системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} d\psi(t) = -\big[H_x[t] + H_y[t+h] + \beta(t+h)\sigma_y[t+h]\big]dt + \\ \qquad\qquad + \beta(t)\sigma_x[t] + \beta(t+h)dw(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in (t_0, t_1 - h], \\ d\psi(t) = -\,[H_x[t] + \beta(t)\sigma_x[t]]dt + \beta(t)dw(t), \\ \qquad\qquad\qquad t \in [t_1 - h, t_1], \qquad -\psi(t_1) = \varphi_x(x(t_1)). \end{cases} \tag{13}$$

Уравнение (13) назовем стохастической сопряженной системой в рассматриваемой задаче.

Отсюда принимая во внимание (13), приращение функционала качества (11), с помощью очевидных преобразований представляется в виде:

$$\Delta S(u) = E\Bigg[-\int_{t_0}^{t_1} H_u'[t]\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Big[\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\big[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]\Delta x(t)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\big[H_{xy}[t] + \beta(t)\sigma_{xy}[t]\big]\Delta y(t)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t)\big[H_{yx}[t] + \beta(t)\sigma_{yx}[t]\big]\Delta x(t)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t)\big[H_{yy}[t] + \beta(t)\sigma_{yy}[t]\big]\Delta y(t)dt -$$
$$-2\int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)dt - 2\int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t)H_{uy}[t]\Delta y(t)dt -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt\Big]\Bigg] + \eta(\Delta u). \tag{14}$$

Пусть $v(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r)$– произвольная измеримая вектор-функция, а $\varepsilon \in [0,1]$– произвольное число.

Поскольку по предположению множество U выпуклое, то специальное приращение $\Delta u_\varepsilon(t)$ допустимого управления области управления $u(t)$ можно определить по формуле (см. напр.[**12**, **13**])

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon\left[v(t) - u(t)\right], \ t \in T, \tag{15}$$

где $v(t) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r)$ — произвольная измеримая вектор-функция, а $\varepsilon \in [0,1]$ — произвольное число.

Обозначим через $\Delta x_\varepsilon(t)$ специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (15) допустимого управления $u(t)$.

Из (7), используя условие Липшица, при помощи леммы Гроноулла-

Белмана (см., например, [19]) получается оценка

$$E\left(\left\|\Delta x_{\varepsilon}\left(t\right)\right\|\right) \leq N\varepsilon, \tag{16}$$

где $N = \text{const} > 0$ и $\eta\left(\Delta u_{\varepsilon}\left(t\right)\right) = o\left(\varepsilon^{2}\right)$.

Используя оценку (16) и формулу (15) из (7) по схеме, аналогичной [12, 13], получаем справедливость утверждения

Лемма. *Для специального приращения* $\Delta x_{\varepsilon}\left(t\right)$ *траектории* $x(t)$ *системы* (1)-(3) *имеет место следующее разложение*

$$\Delta x_{\varepsilon}\left(t\right) = \varepsilon l\left(t\right) + o\left(\varepsilon; t\right), \tag{17}$$

где $l(t)$ *является решением задачи*

$$\begin{gathered} dl(t) = \Big[f_{x}'[t]l(t) + f_{y}'[t]l(t-h) + f_{u}'[t]\big(v(t) - u(t)\big)\Big]dt + \\ +\big(\sigma_{x}'[t]l(t) + \sigma_{y}'[t]l(t-h)\big)dw(t), \\ t \in (t_0, t_1], \quad l(t) = 0,\ t \in E_{t_0}. \end{gathered} \tag{18}$$

Принимая во внимание (17) и оценку (16), из (14) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta S_{\varepsilon}(u) = S\big(u(t) + \Delta u_{\varepsilon}(t)\big) - S\big(u(t)\big) = \\ = E\Bigg\{ -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1} H_{u}'[t]\big(v(t) - u(t)\big)dt + \frac{1}{2}l'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)l(t_1) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} l'(t)\big[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]l(t)dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} l'(t)\big[H_{xy}[t] + \beta(t)\sigma_{xy}[t]\big]l(t-h)dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} l'(t-h)\big[H_{yx}[t] + \beta(t)\sigma_{yx}[t]\big]l(t)dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} l'(t-h)\big[H_{yy}[t] + \beta(t)\sigma_{yy}[t]\big]l(t-h)dt - \\ - 2\int_{t_0}^{t_1} \big(v(t) - u(t)\big)'H_{ux}[t]l(t)dt - \end{aligned} \tag{19}$$

$$-2\int_{t_0}^{t_1}\big(v(t)-u(t)\big)' H_{uy}[t] l(t-h)dt-$$
$$\left. - . \int_{t_0}^{t_1}\big(v(t)-u(t)\big)' H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)dt \right\} + o(\varepsilon^2).$$

Из разложения (19) и произвольности $\varepsilon \in [0,1]$ сразу следует справедливость утверждения

Теорема 1. *При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления* $u(t), t \in T$ *в задаче* (1)–(5) *необходимо, чтобы неравенство*

$$E\int_{t_0}^{t_1} H_u'[t]\big(v(t)-u(t)\big)dt \le 0 \tag{20}$$

выполнялось для всех $v(t) \in L_F^2(t_0,t_1;R^r)$.

Неравенство (20) является линеаризованным интегральным условием максимума для задачи (1)–(5).

Используя лемму из [**20**, с.8], можно показать, что это неравенство имеет место тогда и только тогда, когда почти для всех $\theta \in [t_0,t_1)$ и $v \in L_F^2(t_0,t_1;R^r)$ выполняется

$$EH_u'[\theta]\big(v-u(\theta)\big) \le 0. \tag{21}$$

Из произвольности $\theta \in [t_0,t_1)$ получаем, что

$$H_u'[\theta]\big(v-u(\theta)\big) \le 0 \qquad \text{п.н.} \tag{22}$$

где $\theta \in [t_0,t_1)$ – . точка Лебега управления (правильная точка)$u(t)$, (см. например, [**21**, с.86-87]).

Неравенство (22) есть поточечный линеаризованный принцип максимума в задаче (1)–(5).

3. Случай вырождения поточечного линеаризованного условия максимума

Следуя [12], введем понятие квазиособого управления.

Определение 1. *Если для всех* $\theta \in [t_0, t_1)$ *и* $v \in R^r$

$$H_u'[\theta]\big(v - u(\theta)\big) = 0 \ , \quad \textit{п.н.} \tag{23}$$

то допустимое управление $u(t)$ *называется квазиособым управлением.*

Очевидно, что квазиособый случай поточечного линеаризованного условия оптимальности (22) (и, следовательно, условие (20)) теряет свое содержательное значение, в связи, с чем надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Пусть $u(t), t \in T$ квазиособое оптимальное управление. Тогда из разложения (19) в силу (22) и произвольности $\varepsilon \in [0,1]$ следует, что

$$\begin{aligned} E\Bigg[& l'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)l(t_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} l'(t)\big[H_{xx}[t] + \beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]l(t)dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} l'(t)\big[H_{xy}[t] + \beta(t)\sigma_{xy}[t]\big]l(t-h)dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} l'(t-h)\big[H_{yx}[t] + \beta(t)\sigma_{yx}[t]\big]l(t)dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} l'(t-h)\big[H_{yy}[t] + \beta(t)\sigma_{yy}[t]\big]l(t-h)dt - \\ & - 2\int_{t_0}^{t_1} \big(v(t)-u(t)\big)'H_{ux}[t]l(t)dt - \\ & - 2\int_{t_0}^{t_1} \big(v(t)-u(t)\big)'H_{uy}[t]l(t-h)dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \big(v(t)-u(t)\big)'H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)dt\Bigg] \geq 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенство (24) выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.*

Как видно неравенство (24) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, поэтому конструктивное использование этого условия оптимальности затруднительно. Однако, с его помощью удается получить ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений, выраженных непосредственно через параметры задачи (1)-(5). Займемся этим вопросом.

Уравнение (18) является линейным неоднородным стохастическим дифференциальным уравнением. Применяя результаты работы [9], получаем, что решение $l(t)$ задачи (18) допускает представление

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,\tau)\big(v(\tau) - u(\tau)\big)d\tau, \tag{25}$$

где по определению

$$R(t,\tau) = Q(t,\tau) f_u[\tau].$$

Здесь фундаментальная матрица $Q(t,\tau)$ является решением однородного уравнения:

$$\begin{aligned} dQ(t,\tau) = (f'_x[t]Q(t,\tau) + f'_y[t]Q\big(t-h,\tau\big)\big)dt + \\ + (\sigma'_x[t]Q(t,\tau) + \sigma'_y[t]Q\big(t-h,\tau\big)\big)dw(t), \end{aligned}$$

$$Q(t,t) = I,$$

$$Q(t,\tau) = 0, \quad \tau > t, \tag{26}$$

где I — единичная матрица. С помощью представления (25) доказываются следующие тождества, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$l'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)l(t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)' R(t_1,\tau)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)R(t_1,s)\big(v(s)-u(s)\big)d\tau ds, \tag{27}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} l'(t)\big[H_{xx}[t]+\beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]l(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} R(t,\tau)\big[H_{xx}[t]+\beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]R(t,s)dt\right]\big(v(s)-u(s)\big)dsd\tau, \tag{28}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} l'(t)\big[H_{xy}[t]+\beta(t)\sigma_{xy}[t]\big]l(t-h)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} R(t,\tau)\big[H_{xy}[t]+\beta(t)\sigma_{xy}[t]\big]R(t-h,s)dt\right]\big(v(s)-u(s)\big)dsd\tau, \tag{29}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} l'(t-h)\big[H_{yx}[t]+\beta(t)\sigma_{yx}[t]\big]l(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} R(t-h,\tau)\big[H_{yx}[t]+\beta(t)\sigma_{yx}[t]\big]R(t,s)dt\right]\big(v(s)-u(s)\big)dsd\tau, \tag{30}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} l'(t-h)\big[H_{yy}[t]+\beta(t)\sigma_{yy}[t]\big]l(t-h) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} R(t-h,\tau)\big[H_{yy}[t]+\beta(t)\sigma_{yy}[t]\big]R(t-h,s)dt\right]\big(v(s)-u(s)\big)d\tau ds, \tag{31}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(v(t)-u(t)\big)'H_{ux}[t]l(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)'H_{ux}[\tau]R(\tau,t)d\tau\right]\big(v(t)-u(t)\big)dt, \tag{32}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(v(t)-u(t)\big)'H_{uy}[t]l(t-h)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} \big(v(\tau)-u(\tau)\big)'H_{uy}[\tau]R(\tau-h,t)d\tau\right]\big(v(t)-u(t)\big)dt. \tag{33}$$

Полагая

$$K(\tau,s) = -R(t_1,\tau)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)R(t_1,s) + \\ + \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} \Big[R(t,\tau)\big[H_{xx}[t]+\beta(t)\sigma_{xx}[t]\big]R(t,s) + \\ + R(t,\tau)\big[H_{xy}[t]+\beta(t)\sigma_{xy}[t]\big]R(t-h,s) + \\ + R(t-h,\tau)\big[H_{yx}[t]+\beta(t)\sigma_{yx}[t]\big]R(t,s) + \\ + R(t-h,\tau)\big[H_{yy}[t]+\beta(t)\sigma_{yy}[t]\big]R.(t-h,s)\Big]dt$$

и учитывая тождества (27)-(33), неравенство (24) можно записать в следующем компактном виде:

$$E\Bigg\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'K(\tau,s)\big(v(s)-u(s)\big)d\tau ds + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\big(v(t)-u(t)\big)'H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)dt + \\ + 2\int_{t_0}^{t_1}\Big[\int_{t}^{t_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\big(H_{ux}[\tau]R(\tau,t) + \\ + H_{uy}[\tau]R(\tau-h,t)\big)d\tau\Big]\big(v(t)-u(t)\big)dt\Bigg\} \le 0. \tag{34}$$

Заметим, что детерминированный аналог матричной функции $K(\tau,s)$ впервые введено в работах К.Б. Мансимова [13-15].

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. *Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$, $t \in T$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенство (34) выполнялось для всех $v(t) \in L_F^2(t_0,t_1;R^r)$.*

Как видно условие (34) является общим интегральным необходимым условием оптимальности квазиособого управления. Но используя различные специальные вариации управления, из этого условия можно получить целый ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности. Приведем одно из них.

Теорема 4. *Для оптимальности квазиособого управления* $u(t)$ *в задаче* (1)–(5) *необходимо, чтобы неравенство*

$$E\big(v-u(\theta)\big)'\ H_{uu}[\theta]\big(v-u(\theta)\big)\le 0, \qquad \text{п.н.} \tag{35}$$

выполнялось для всех $v\in R^r$, $\theta\in[t_0,t_1)$ *- точка Лебега управления* $u(t)$.

Для доказательства неравенства (35), достаточно в (34) $v(t)$ определить по формуле

$$v(t)=\begin{cases}u(t), & t\in[t_0,\theta),\\ v, & t\in[\theta,\theta+\mu),\\ u(t), & t\in[\theta+\mu,t_1],\end{cases} \tag{36}$$

где $v\in U$, $\theta\in[t_0,t_1)$, а $\mu>0$ — произвольное достаточно малое число.

Тогда из формулы (34) получим

$$\mu E\Big\{\big(v-u(\theta)\big)'H_{uu}[\theta]\big(v-u(\theta)\big)\Big\}+o(\mu)\le 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\mu>0$ и $\theta\in[t_0,t_1)$ следует справедливость неравенства (35).

Также не исключена возможность вырождения необходимого условия оптимальности (35), т.е. его выполнения тривиальным образом.

Определение 2. *Квазиособое управление* $u(t)$ *назовем второго порядка квазиособым управлением, если для всех* $v\in U,\theta\in[t_0,t_1)$

$$\big(v-u(\theta)\big)'H_{uu}[\theta]\big(v-u(\theta)\big)=0,\ \text{п.н.}$$

Общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений (33) позволяет получить необходимые условия оптимальности для второго порядка квазиособых управлений.

Допустим, что $u(t)$ второго порядка квазиособое оптимальное управление. Тогда принимая во внимание формулу (36) в неравенстве (34), получаем неравенство:

$$E\Big\{\big(v-u(\theta)\big)'[K(\theta,\theta)+H_{ux}[\theta]R(\theta,\theta)]\big(v-u(\theta)\big)\Big\}\le 0.$$

Здесь из произвольности $\theta\in[t_0,t_1)$ получаем, что неравенство

$$\big(v-u(\theta)\big)'[K(\theta,\theta)+H_{ux}[\theta]R(\theta,\theta)]\big(v-u(\theta)\big)\le 0, \tag{37}$$

выполняется почти для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ точек Лебега управления $u(t)$, и $v \in U$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для оптимальности квазиособого второго порядка управления $u(t)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенство (37) выполнялось для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.*

Заметим, что необходимое условие оптимальности (37) является аналогом условия оптимальности Габасова-Кирилловой из [**22**], полученный методом матричных импульсов для случая системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания по содержанию статьи.

Список литературы

[1] Е. Ф. Царьков. *Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений*, Зинатне, Рига, 1989, ISBN 5-7966-0171-9, 421 с. ↑3

[2] Д. Э. Эльсгольц. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1964, 127 с. ↑3

[3] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, *Stability of functional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering Series, vol. **180**, Academic Press, N.-Y., 1986, ISBN 012417941X, 217 pp. ↑3

[4] V. B. Kolmanovskii, A. D. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. **85**, Springer, Dordrecht, 1992, ISBN 0792320131, 234 pp. doi ↑3

[5] V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet, *Control of systems with aftereffect*, Translations of mathematical monographs, vol. **157**, AMS, Providence, RI, 1996, ISBN 9780821803745, 336 pp. ↑3

[6] Ю. А. Митропольский, Нгуен Донг Ань. «Случайные колебания в квазилинейных системах стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием», *Укр. мат. журн.*, **38**:2 (1986), с. 181–187. ↑3

[7] Ч. А. Агаева. «Принцип максимума для выпуклой стохастической задачи оптимального управления с запаздыванием», *Известия АН Азербайджана, серия ФМН*, 1994, №1–3. ↑3

[8] Ч. А. Агаева. *Задача управления и фильтрации для линейной стохастической системы с запаздыванием по состоянию*, Деп. в ВИНИТИ, № 4834-В90, Баку, 1990, 17 с. ↑3

[9] Ч. А. Агаева. *Необходимые условия оптимальности особых управлений в стохастических системах с запаздывающим аргументом*, Деп. в ВИНИТИ, № 3495-890, Баку, 1990, 20 с. ↑3,14

[10] Н. И. Махмудов, Ч. А. Агаева. *Необходимые условия оптимальности для стохастических систем управления с запаздывающим аргументом*, Деп. в ВИНИТИ 28 марта 1990 г., № 2291-2390, Баку, 1990, 19 с. ↑3

[11] Р. А. Аюкасов. *Оптимизация управления стохастических систем с запаздыванием*, Автореф. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Казань, 2011, 18 с. ↑3

[12] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. *Особые оптимальные управления*, Наука, М., 1973, ISBN 978-5-397-05730-1, 256 с. ↑4,10,11,13

[13] К. Б. Мансимов. *Особые управления в системах с запаздыванием*, Елм, Баку, 1999, 176 с. ↑4,10,11

[14] М. Дж. Марданов, К. Б. Мансимов, Т. К. Меликов. *Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием*, Елм, Баку, 2013, 356 с. ↑4

[15] К. Б. Мансимов, М. Дж. Марданов. *Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу*, Элм, Баку, 2010, 336 с. ↑4

[16] И. И. Гихман, А. В. Скороход. *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, М., 1965, 632 с. ↑6

[17] С. Ватанабэ, Н. Икэда. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Пер.с. англ., ред. А. Н. Ширяев, Наука, М., 1986, 448 с. ↑6

[18] А. А. Леваков. *Стохастические дифференциальные уравнения*, БГУ, Минск, 2009, ISBN 978-985-518-250-5, 231 с. ↑6

[19] Васильев Ф. П.. *Методы оптимизации*, Факториал, М., 2001, ISBN 978-5-94057-707-2, 824 с. ↑11

[20] В. А. Срочко. *Вычислительные методы оптимального управления*, Изд. НГУ, Иркутск, 1982, 110 с. ↑12

[21] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.. *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1969, 384 с. ↑12

[22] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. «К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка», *Дифференц. уравнения*, **6**:4 (1970), с. 665–676. ↑18

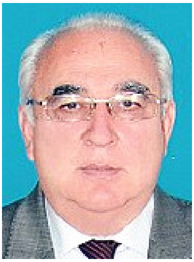
Поступила в редакцию 30.10.2019
Переработана 03.02.2020
Опубликована 27.04.2020

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. И. В. Расина*

Пример ссылки на эту публикацию:

К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев. «Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в задаче оптимального управления стохастической системой с запаздывающим аргументом». *Программные системы: теория и приложения*, 2020, **11**:2(45), с. 3–22.
10.25209/2079-3316-2020-11-2-3-22
http://psta.psiras.ru/read/psta2020_2_3-22.pdf

Об авторах:



Камиль Байрамали оглы Мансимов
Доктор физ. мат. наук, проф., зав. кафедрой "Математическая кибернетика" Бакинского государственного университета,руководитель лаб. "Управление в сложных динамических системах" Института систем управления НАН Азербайджана
0000-0002-1518-2279
e-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Рашад Октай оглы Масталиев
Доктор философии по математике, ведущий научный сотрудник, Института систем управления НАН Азербайджана
0000-0001-6387-2146
e-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

CSCSTI 27.37.17, 28.15.23
UDC 519.216.7:517.977.5

Kamil B. Mansimov, Rashad O. Mastaliev. *Necessary conditions for quasi-singular controls in the stochastic optimal control problem with delayed argument.*

Abstract. The optimal control problem is considered, the mathematical models of which are defined by non-linear stochastic Ito differential equations with a delay argument and diffuse components that allow one to take into account random disturbances of a continuous nature acting on the system.

A linearized necessary optimality condition is obtained under the assumption that the domain admissible control is convex. The quasi-singular case is investigated. The general necessary optimality conditions for quasi-singular controls are described. Partial cases are considered.

Key words and phrases: stochastic control theory, Ito equations, singular controls.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 93E20; 39A50, 60H10

References

[1] Ye. F. Tsar'kov. *Random perturbations of differential functional equations*, Zinatne, Riga, 1989, ISBN 5-7966-0171-9 (in Russian), 421 pp.↑3

[2] D. E. El'sgol'ts. *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*, Nauka, M., 1964 (in Russian), 127 pp.↑3

[3] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, *Stability of functional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering Series, vol. **180**, Academic Press, N.-Y., 1986, ISBN 012417941X, 217 pp.↑3

[4] V. B. Kolmanovskii, A. D. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. **85**, Springer, Dordrecht, 1992, ISBN 0792320131, 234 pp. doi↑3

[5] V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet, *Control of systems with aftereffect*, Translations of mathematical monographs, vol. **157**, AMS, Providence, RI, 1996, ISBN 9780821803745, 336 pp.↑3

[6] Yu. A. Mitropol'skii, Nguyen Dong An'. "Random oscillations in quasilinear systems of stochastic differential equations with delay", *Ukrainian Mathematical Journal*, **38** (1986), pp. 159–164. doi↑3

[7] Ch. A. Agayeva. "The maximum principle for a convex stochastic optimal control problem with delay", *Izvestiya AN Azerbaydzhana, seriya FMN*, 1994, no. 1–3 (in Russian).↑3

[8] Ch. A. Agayeva. *The control and filtration problem for a linear stochastic system with delay state*, Dep. v VINITI, No 4834-V90, Baku, 1990 (in Russian), 17 pp.↑3

[9] Ch. A. Agayeva. *Necessary optimality conditions for singular controls in stochastic systems with delayed argument*, Dep. v VINITI, No 3495-890, Baku, 1990 (in Russian), 20 pp.↑3,14

[10] N. I. Makhmudov, Ch. A. Agayeva. *Necessary optimality conditions for stochastic control systems with delayed argument*, Dep. v VINITI 28 marta 1990 g., No 2291-2390, Baku, 1990 (in Russian), 19 pp.↑3

[11] R. A. Ayukasov. *Optimization of control of stochastic systems with delay*, Avtoref. na soiskaniye uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk, Kazan', 2011 (in Russian), 18 pp.↑3

[12] R. Gabasov, F. M. Kirillova. *Singular optimal controls*, Nauka, M., 1973, ISBN 978-5-397-05730-1 (in Russian), 256 pp.↑4,10,11,13

[13] K. B. Mansimov. *Singular controls in delay systems*, Yelm, Baku, 1999 (in Russian), 176 pp.↑4,10,11

[14] M. Dzh. Mardanov, K. B. Mansimov, T. K. Melikov. *The study of special controls and the necessary conditions of optimality of the second order in systems with delay*, Yelm, Baku, 2013 (in Russian), 356 pp.↑4

[15] K. B. Mansimov, M. Dzh. Mardanov. *Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems*, Elm, Baku, 2010 (in Russian), 336 pp.↑4

[16] I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. *Introduction to the theory of random processes*, Nauka, M., 1965 (in Russian), 632 pp.↑6

[17] N. Ikeda S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Mathematical Library, vol. **24**, 2nd Edition, 1992, ISBN 9781483296159, 464 pp.↑6

[18] A. A. Levakov. *Stochastic differential equations*, BGU, Minsk, 2009, ISBN 978-985-518-250-5 (in Russian), 231 pp.↑6

[19] Vasil'yev F. P.. *Optimization methods*, Faktorial, M., 2001, ISBN 978-5-94057-707-2 (in Russian), 824 pp.↑11

[20] V. A. Srochko. *Computational methods of optimal control*, Izd. NGU, Irkut·sk, 1982 (in Russian), 110 pp.↑12

[21] Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko Ye. F.. *The mathematical theory of optimal processes*, Nauka, M., 1969 (in Russian), 384 pp.↑12

[22] R. Gabasov, F. M. Kirillova. "On the theory of necessary high-order optimality conditions", *Differents. uravneniya*, **6**:4 (1970), pp. 665–676 (in Russian). ↑18

Sample citation of this publication:

Kamil B. Mansimov, Rashad O. Mastaliev. "Necessary conditions for quasi-singular controls in the stochastic optimal control problem with delayed argument". *Program Systems: Theory and Applications*, 2020, **11**:2(45), pp. 3–22. (*In Russian*).

doi 10.25209/2079-3316-2020-11-2-3-22

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2020_2_3-22.pdf