



И. В. Расина, О. В. Фесько, О. В. Усенко

Задача аналитического конструирования регуляторов для дискретно-непрерывных систем, линейных по управлению

Аннотация. Рассматривается одна из разновидностей дискретно-непрерывных систем — линейные по управлению ДНС с коэффициентами, зависящими от состояния, относящиеся к гибридным системам. Формулируется аналог задачи аналитического конструирования регуляторов (АКОР). Для исследования используется обобщение достаточных условий оптимальности Кротова. Приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова и фразы: дискретно-непрерывные системы, достаточные условия оптимальности, задача АКОР.

Введение

Процессы управления, для которых характерна с течением времени смена описаний управляемых дифференциальных или дискретных систем, получили самые разнообразные названия и широко распространены на практике [1–7]. Одним из таких классов являются дискретно-непрерывные системы [2]. Для их исследования предложено обобщение достаточных условий оптимальности Кротова [8, 9]. Сама математическая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС) приведена в [2, 10–12]. Модель двухуровневая, нижний уровень представляет собой описания однородных непрерывных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень (дискретный) связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом с целью обеспечения минимума функционала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №21-11-00202).

- © И. В. РАСИНА⁽¹⁾ О. В. ФЕСЬКО⁽²⁾ О. В. УСЕНКО⁽³⁾ 2021
- © ИНСТИТУТ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ ИМЕНИ А. К. АЙЛАМАЗЯНА РАН^(1, 2) 2021
- © ИРКУТСКИЙ РЕАБИЛИТАЦИОННЫЙ ТЕХНИКУМ⁽³⁾ 2021
- © ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ (ДИЗАЙН), 2021

В данной работе рассматривается одна и разновидностей ДНС: линейные по переменным состояния и управления с матрицами коэффициентов при них, зависящими от состояний процессов нижнего и верхнего уровней. По своей структуре такие системы наиболее близки к так называемым слабо нелинейным системам. Некоторое представление о последних можно получить в работах [15–17].

Ниже приводится модель линейной дискретно-непрерывной системы с коэффициентами, зависящими от состояния, и формулируется аналог известной задачи аналитического конструирования регуляторов (АКОР) [14]. Для ее решения используется обобщение достаточных условий оптимальности Кротова [8, 9]. В классической схеме исследования такой задачи для обычных управляемых систем [8] требуется решение уравнения Риккати, содержащего матрицу вторых производных функции Кротова. В данной же ситуации при аналогичных рассуждениях необходим поиск решения векторно-матричных систем уже относительно и первой, и второй производных функций Кротова обоих уровней. Особенность систем заключается в том, что матрицы коэффициентов при указанных производных, как и в исходной задаче, зависят от переменных состояний тех же уровней.

Предлагается одна из возможных схем решения поставленной задачи. Полученный алгоритм проиллюстрирован примерами.

1. Модель линейной дискретно-непрерывной системы с коэффициентами, зависящими от состояния

Будем рассматривать частный случай дискретной управляемой системы [9]:

$$\begin{aligned}
 & x(k+1) = A(k, x(k))x(k) + B(k, x(k))u(k), \\
 (1) \quad & x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2} \left((x)^T S(k, x)x + (u(k))^T Q(k, x)u(k) \right), \\
 & k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, \dots, k_F\},
 \end{aligned}$$

где k — номер шага (этапа), не обязательно физическое время, x и u — соответственно переменные состояния и управления, A и S — матрицы размера $m(k) \times m(k)$, матрицы B размера $m(k) \times p(k)$ и Q размера $p(k) \times p(k)$, k_I , k_F — начальный и конечный шаги,

$$x(k) \in \mathbb{R}^{m(k)}, \quad u(k) \in \mathbb{R}^{p(k)}.$$

Из множества \mathbf{K} выделено подмножество $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, на котором в роли управления действует непрерывная система нижнего

уровня

$$(2) \quad \dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = A^c(k, t, x^c)x^c + B^c(k, t, x^c)u^c, \\ t \in \mathbf{T}(k) = [t_I(k), t_F(k)],$$

где A^c — матрица размера $n(k) \times n(k)$, B^c — матрица размера $n(k) \times r(k)$,
 $x^c(k, t) \in \mathbb{R}^{n(k)}$, $u^c(k, t) \in \mathbb{R}^{r(k)}$.

Для системы (2) на отрезке $[t_I(k), t_F(k)]$ задана промежуточная цель в виде функционала:

$$(3) \quad I^k = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}(k)} (x^{cT} S^c(t, k, x^c)x^c + u^{cT} Q^c(k, t, x^c)u^c) dt + \\ + \lambda^c(k, x_F^c)x_F^c + \frac{1}{2}(x_F^c)^T \Lambda^c(k, x_F^c)x_F^c \rightarrow \inf.$$

Здесь S^c и Λ^c — матрицы размера $n(k) \times n(k)$, а Q^c — матрица размера $r(k) \times r(k)$, λ^c — вектор размера $n(k)$. При каждом $k \in \mathbf{K}'$ оператор правой части (1) имеет вид

$$x(k+1) = \theta(k)x_F^c,$$

где $\theta(k)$ — матрица размера $m(k) \times n(k)$ и $x^c(k, t_I) = \xi(k)x$. Здесь $\xi(k)$ — заданная матрица. Предполагается, что матрицы Q , Q^c отрицательно определены при каждом k и каждой паре (k, t) .

Под решением такой двухуровневой системы будем понимать элемент $m = (x(k), u(k))$, где при $k \in \mathbf{K}'$:

$$u(k) = m^c(k), \quad m^c(k) \in \mathbf{D}^c(k).$$

где $\mathbf{D}^c(k)$ — множество допустимых непрерывных на соответствующих отрезках процессов $m^c(k)(t) = (x^c(k, t), u^c(k, t))$, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (2). Совокупность элементов m , удовлетворяющих всем выше перечисленным условиям, обозначим через \mathbf{D} и назовем множеством допустимых линейных дискретно-непрерывных процессов с коэффициентами, зависящими от состояния.

Для построенной модели (1), (2) ставится задача о поиске минимума на \mathbf{D} функционала

$$I = F(x_F) = (\lambda(x_F))^T x_F + \frac{1}{2}(x_F)^T \Lambda(x_F)x_F$$

при фиксированных начальном и конечном шагах и начальном состоянии $k_I = 0$, $k_F = K$, $x(k_I)$. Здесь $x_F = x(k_F)$, а λ и Λ — матрицы размера $m(k) \times 1$, $m(k) \times m(k)$.

Заметим, что при построении дискретной модели верхнего уровня, связывающей однородные непрерывные системы, действующие на разных отрезках времени, используется эвристический прием, который отражает взгляды исследователя на рассматриваемую проблему. Модель может быть и не единственной. Непосредственно исследователь выбирает передаваемую верхнему уровню информацию об окончании очередного этапа и управляющие воздействия, передаваемые верхним уровнем нижнему. В литературе на данный момент отсутствуют публикации о выборе единственной модели верхнего уровня.

2. Достаточные условия оптимальности

Рассматриваемая задача оптимального управления представляет собой модификацию классической задачи АКОР [14] и является частным случаем ЗОУ для ДНС с промежуточными критериями [13]. Ее особенность состоит в том, что элементы матриц A , B , θ , Λ , A^c , B^c , Λ^c , S^c , Q^c и вектора λ зависят от состояний процессов верхнего и нижнего уровней, а не являются константами. Будем далее использовать для решения задачи модификацию достаточных условий оптимальности Кротова непосредственно для ДНС с промежуточными критериями. Сами условия сформулированы в виде теоремы.

Теорема 1. [13]. Пусть имеются последовательность дискретно-непрерывных процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ , φ^c такие, что:

- 1) $\mu^c(k, t)$ кусочно-непрерывна при каждом k ;
- 2) $R(k, x_s(k), u_s(k)) \rightarrow \mu(k)$, $k \in \mathbf{K}$;
- 3) $\int_{\mathbf{T}(k)} \left(R^c(k, t, x_s^c(t), u_s^c(k, t)) - \mu^c(k, t) \right) dt \rightarrow 0$, $k \in \mathbf{K}'$, $t \in \mathbf{T}(k)$;
- 4) $G^c(k, x_{F_s}^c, x_{I_s}^c) - l^c(k) \rightarrow 0$, $k \in \mathbf{K}'$;
- 5) $G(x_s(t_F)) \rightarrow l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ — минимизирующая для I на \mathbf{D} .

Выпишем основные конструкции этих условий для рассматриваемой задачи. Зададим функции Кротова верхнего и нижнего уровня в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \psi^T(k) x + \frac{1}{2} x^T \sigma(k) x - x^0, \\ \varphi^c(z, t, x^c) &= \psi^{cT}(k, t) x^c + \frac{1}{2} x^{cT} \sigma^c(k, t) x^c, \end{aligned}$$

где $\psi(k)$ и $\psi^c(k, t)$ — вектор-функции размеров m , n , а $\sigma^c(k, t)$ и $\sigma(k)$ — матрицы размера $n \times n$, $m \times m$ соответственно. Имеем:

$$\begin{aligned} R(k, x(k), u(k)) &= \psi^T(k+1) \left(A(k, x(k))x(k) + B(k, x(k))u(k) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(A(k, x(k))x(k) + B(k, x(k))u(k) \right)^T \sigma(k+1) \times \\ &\quad \times \left(A(k, x(k))x(k) + B(k, x(k))u(k) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (x^T(k)S(k, x)x(k) + u^T(k)Q(k, x)u(k)) \\ &- \psi^T(k)x - \frac{1}{2}x^T\sigma(k)x, \quad k \in \mathbf{K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^c(k, t, x^c(k, t), u^c(k, t)) &= \\ &= (\psi^c(k, t) + \sigma^c(k, t)x^c)^T (A^c(k, t, x^c)x^c + B^c(k, t, x^c)u^c) - \\ &- \frac{1}{2} \left((x^c)^T S^c(t, k, x^c)x^c + (u^c(k, t))^T Q^c(k, t, x^c)u^c(k, t) \right) + \\ &+ \dot{\psi}^c(k, t)x^c + \frac{1}{2}x^{cT}\dot{\sigma}^c(k, t)x^c, \quad k \in \mathbf{K}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^c(k, x, x_F^c, x_I^c) &= \\ &= -\psi^T(k+1)\theta(k)x_F^c + \frac{1}{2}(\theta(k)x_F^c)^T \sigma(k+1)\theta(k)x_F^c + \\ &+ \psi^T(k)x + \frac{1}{2}x^T\sigma(k)x + \psi^{cT}(k, t_F)x_F^c + \frac{1}{2}x_F^{cT}\sigma^c(k, t_F)x_F^c - \\ &- \psi^{cT}(k, t_I)x_I^c - \frac{1}{2}x_I^{cT}\sigma^c(k, t_I)x_I^c, \quad k \in \mathbf{K}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= (\lambda)^T x_F + \frac{1}{2}(x_F)^T \Lambda x_F + \psi^T(k_F)x_F + \frac{1}{2}x_F^T\sigma(k_F)x_F - \\ &- \psi^T(k_I)x_I - \frac{1}{2}x_I^T\sigma(k_I)x_I, \end{aligned}$$

$$\mu^c(z, t) = \sup \{R^c(z, t, x^c, u^c): x^c, u^c\},$$

$$l^c(z) = \inf \{G^c(k, x, x_F^c, x_I^c): x_F^c, x_I^c\},$$

$$\mu(k) = \begin{cases} \sup\{R(k, x, u): x, u\}, & k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ -\inf\{l^c(z): x\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases}$$

$$l = \inf\{G(x): x\}.$$

3. Метод решения. Алгоритм

Далее при выводе уравнений метода указываются лишь существенные аргументы, характеризующие получаемые новые конструкции, что позволяет избежать громоздкости изложения. Аргументы входящих в них матриц и функций из постановки задачи и достаточных условий приведены в предыдущих пунктах.

Предположим, что элементы матриц A, B, Q, S при всех $k \in \mathbf{K}$ и $A^c, B^c, Q^c, S^c, \theta$ при всех $k \in \mathbf{K}', t \in [t_I(k), t_F(k)]$ постоянны и $x^c(k, t_I) = \xi(k)x$, где $\xi(k)$ — заданная матрица размера $n \times m$. Заметим, что отрезок $[t_I(k), t_F(k)]$ может быть разбит на частичные, на каждом из которых элементы указанных матриц будут заданы в виде констант. В этом случае просто увеличится число непрерывных подсистем нижнего уровня и число элементов множества \mathbf{K} . Согласно сформулированным ранее достаточным условиям оптимальности, найдем управляющие воздействия, доставляющие максимум функциям R, R^c . Имеем:

$$\begin{aligned} R_u &= (x^T A \sigma + \psi^T) B + (B^T \sigma B + Q) u = 0, \\ R_{u^c} &= B^{cT} (\psi^c + \sigma^c x^c) - Q^c u^c = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -(B^T \sigma B + Q)^{-1} B^T (\psi + A^T \sigma x), \\ \tilde{u}^c &= (Q^c)^{-1} B^{cT} (\psi^c + \sigma^c x^c). \end{aligned}$$

Подставим формулы для \tilde{u} и \tilde{u}^c в выражения для конструкций R, R^c и выполним необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} P(k, x) &= R(k, x(k), \tilde{u}(k)) = \left(\psi^T(k+1) A - \psi(k) - \right. \\ &\quad \left. - \psi^T(k+1) B (B^T \sigma(k+1) B + Q)^{-1} B^T A^T \sigma(k+1) \right) x + \\ &\quad + \frac{1}{2} x^T \left(A^T \sigma(k+1) + S - \sigma(k) - \right. \\ &\quad \left. - A^T \sigma(k+1) B (B^T \sigma(k+1) B + Q)^{-1} B^T A \sigma(k+1) \right) x - \\ &\quad - \frac{1}{2} \psi^T B (B^T \sigma(k+1) B + Q)^{-1} B^T \psi, \\ P^c(k, t, x^c) &= R^c(k, t, x^c \tilde{u}^c(k, t)) = \\ &= (\psi^{cT}) A^c + \sigma^c B^c (Q^c)^{-1} B^{cT} \sigma^c + \dot{\psi}^c x^c + \\ &\quad + \frac{1}{2} x^{cT} (\sigma^c A^c + A^{cT} \sigma^c + \sigma^c B^c (Q^c)^{-1} B^{cT} \sigma^c - S + \dot{\sigma}^c) x^c + \\ &\quad + \psi^{cT} B^c (Q^c)^{-1} B^{cT} \psi^c. \end{aligned}$$

Используем достаточные условия оптимальности в форме Беллмана [13] и зададим функции φ и φ^c таким образом, чтобы конструкции $P(k, x)$ и $P^c(k, t, x^c)$ не зависели от переменных x и x^c соответственно. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \left(A^T - \sigma(k+1)AB(B^T\sigma(k+1)B + Q)^{-1}B^T \right) \psi(k+1), \\ & \qquad \qquad \qquad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ \sigma(k) &= A^T\sigma(k+1)A + S - A^T\sigma(k+1)B(B^T\sigma(k+1)B + Q)^{-1}B^TA, \\ & \qquad \qquad \qquad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ \dot{\psi}^c &= -(A^{cT} + \sigma^c B^c(Q^c)^{-1}B^{cT})\psi^c, \quad k \in \mathbf{K}', \\ \dot{\sigma}^c &= S - \sigma^c A^c - A^{cT}\sigma^c - \sigma^c B^c(Q^c)^{-1}B^{cT}\sigma^c, \quad k \in \mathbf{K}'. \end{aligned}$$

Потребуем теперь независимости от состояний процессов верхнего и нижнего уровней соответственно функций G, G^c с учетом выражения для x_I^c . Эти требования определяют начальные условия для системы векторно-матричных уравнений относительно $\psi, \psi^c, \sigma, \sigma^c$ и уравнения для $\psi(k), \sigma(k)$ на множестве \mathbf{K}' . Имеем

$$\begin{aligned} \psi(k_F) &= -\lambda, \quad \psi^c(k, t_F) = \theta^T \psi(k+1), \quad \sigma(k_F) = -\Lambda, \\ \sigma^c(k, t_F) &= -\theta^T \sigma(k+1)\theta, \quad \psi(k) = \xi(k)\psi^c(k, t_I), \\ \sigma(k) &= \xi^T(k)\sigma^c(k, t_I)\xi(k), \quad k \in \mathbf{K}'. \end{aligned}$$

В итоге получили ДНС относительно $\psi, \psi^c, \sigma, \sigma^c$ с начальными условиями на правых концах дискретного и непрерывного аргументов. В этой ДНС входящие в нее матрицы также зависят от переменных состояний верхнего и нижнего уровней. Полученные в целом соотношения определяют алгоритм решения поставленной задачи, состоящий из следующих этапов:

1. Слева направо просчитывается исходная ДНС при заданных $u_s(k), u_s^c(k, t)$ и постоянных матрицах A, B, A^c, B^c . Тем самым определяются траектории $x_s(k), x_s^c(k, t)$.
2. Справа налево находится решение ДНС относительно $\psi, \psi^c, \sigma, \sigma^c$ с постоянными матрицами $A, B, A^c, B^c, S, S^c, Q, Q^c$.
3. Вычисляются управляющие воздействия $\tilde{u}_s, \tilde{u}_s^c$. Переход к пункту 1.
4. Критерием окончания итерационного процесса может служить выполнение неравенства $|I_{s+1} - I_s| < \epsilon$, где ϵ — заданная точность вычислений.

Замечание 1. Элементы матриц A^c, B^c могут быть вычислены при

$x^c = x^c(k, t_I)$, а матриц S^c , Q^c при $x^c = x^c(k, t_F)$ и не изменяться внутри отрезка $[t_I(k), t_F(k)]$.

Замечание 2. Увеличения точности расчетов можно добиться путем разбиения отрезков $[t_I(k), t_F(k)]$ на частичные, что приведет к увеличению числа этапов ДНС.

Замечание 3. Полученная ДНС для векторов ψ , ψ^c и матриц σ , σ^c содержит матричные уравнения Риккати, которые могут и не иметь решения. В этом случае требуется доработка предлагаемого алгоритма.

Замечание 4. Вопрос о сходимости алгоритма остается открытым. Однако приведенные ниже примеры подтверждают его работоспособность.

Продемонстрируем работу предложенного алгоритма на примерах.

4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу оптимального управления для нелинейной управляющей системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{x_2} x_1 + x_1 x_2 u, & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 x_2 - \sqrt{x_1} u, & x_2(0) &= 1, \\ I &= \int_0^2 (x_1^2 x_2 + \exp(-x_1) u^2) dt + x_2^2(2). \end{aligned}$$

Путем разбиения отрезка, на котором она определена, на части (число разбиений K будем изменять), превратим ее в линейную ДНС с коэффициентами, зависящими от состояния. Имеем $n = 2, r = 1$ и разбиваемый на части отрезок $[0, 2]$. Здесь фигурирующие в постановке задачи матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned} A^c &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & x_1^3 \end{pmatrix}, & B^c &= \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -\sqrt{x_1} \end{pmatrix}, \\ S^c &= \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & Q^c(x_1, x_2) &= \exp(-x_1). \end{aligned}$$

Поскольку изменениям на каждом частичном отрезке будут подвергаться лишь коэффициенты матриц, то $\mathbf{K} = \{0, 1, 2, \dots, k_F\}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$, и процесс верхнего уровня не управляемый. На верхнем уровне происходит передача информации о состоянии системы нижнего уровня при окончании очередного этапа и определяются начальные условия

следующего. Таким образом, $x = (x_1, x_2)$, $x(k+1) = x^c(k, t_F(k))$, $x_I^c(k+1, t_I(k+1)) = x(k+1)$, $\lambda = 0$, $\theta = E$, $\xi = 1$, $A = E$, $B = 0$, $S = 0$, $Q = 0$, $\psi^c = (\psi_1^c, \psi_2^c)$ и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^c = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^c & \sigma_{12}^c \\ \sigma_{21}^c & \sigma_{22}^c \end{pmatrix}.$$

Расчеты были проведены для $k_F = 2, 4, 8, 10, 15, 25$. Результаты расчетов представлены на рисунках 1 и 2. Зависимость значений функционала от числа разбиений отрезка дана в таблице 1.

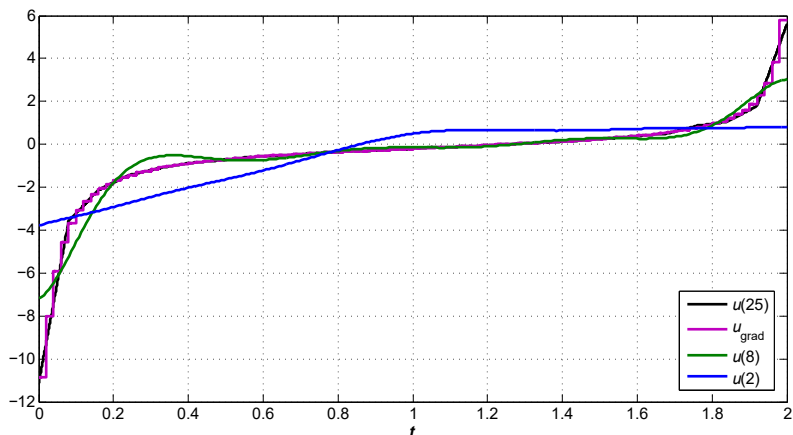


РИСУНОК 1. Управление, полученное градиентным методом и при различном числе разбиений отрезка

ТАБЛИЦА 1. Значение функционала в зависимости от числа разбиений

Разбиение	Функционал
2	11.14453381
4	9.62277632
8	8.95104176
10	8.84198513
15	8.72682692
25	8.67417221

Расчеты потребовали в среднем 3 итерации и мало зависели от числа разбиений отрезка, особенно при его увеличении. Предварительно ЗОУ для обычной управляемой системы была решена градиентным методом за 5 итераций. Для сравнения найденные траектории и

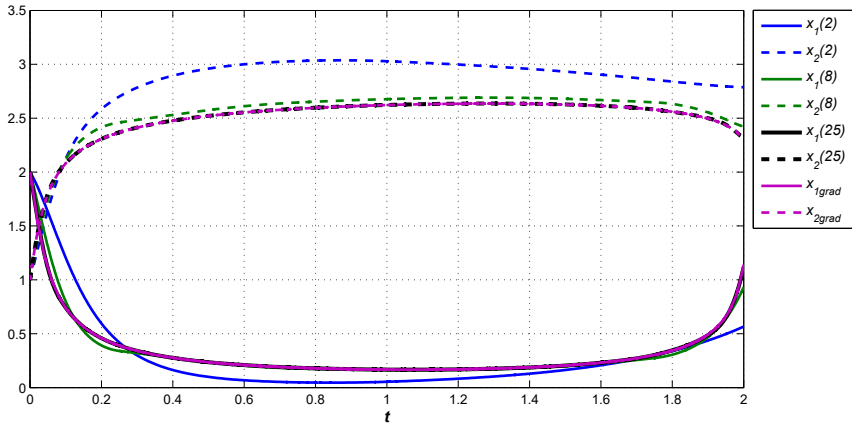


Рисунок 2. Состояния, полученные градиентным методом и при различном числе разбиений отрезка

управляющее воздействие также представлены на указанных рисунках. Наименьшее значение функционала в градиентном методе $I = 8.67458$, а при использовании схемы ДНС $I = 8.67417$.

Пример 2. Задана состоящая из двух этапов: линейная ДНС с коэффициентами, которые зависят от состояния.

1-й этап:

$$\dot{x}_1^c = (x_1^c)^2(x_2^c - u_1^c), \quad \dot{x}_2^c = \sqrt{x_1^c}x_2^c + x_1^c u_2^c,$$

$$x_1^c(0) = 1, \quad x_2^c(0) = -1,$$

$$I^0 = \int_0^2 ((x_1^c u_2^c)^2 - x_2^c (u_1^c)^2) dt.$$

2-й этап:

$$\dot{x}_1^c = x_1^c \exp(-x_1^c) - 2x_1^c u_1^c, \quad I^1 = \int_2^3 \frac{(u_1^c)^2}{x_1^c} dt,$$

$$I = (x_1^c(3))^3 - 3x_1^c(3).$$

Приведем задачу к стандартному виду. Ясно, что $\mathbf{K} = \{0, 1, 2\}$.

При $k = 0$ $n = r = 2$, а матрицы нижнего уровня имеют вид:

$$A^c(0) = \begin{pmatrix} 0 & (x_1^c)^2 \\ 0 & \sqrt{x_1^c} \end{pmatrix}, \quad B^c(0) = \begin{pmatrix} -(x_1^c)^2 & 0 \\ 0 & x_1^c \end{pmatrix},$$

$$Q^c(0) = \begin{pmatrix} -x_2^c & 0 \\ 0 & (x_1^c)^2 \end{pmatrix}, \quad S^c(0) = 0.$$

На следующем этапе при $k = 1$ $n = r = 1$, а матрицы нижнего уровня выглядят следующим образом:

$$A^c(1) = \exp(-x_1^c), \quad B^c(1) = -2x_1^c, \quad Q^c(1) = \frac{1}{x_1^c}, \quad S^c(1) = 0.$$

Нетрудно видеть, что на верхнем уровне за x имеет смысл взять x_1^c , поскольку эта переменная проходит через оба этапа и через нее же определен общий функционал. Имеем $I = (x(2))^3 - 3x(2)$, $\lambda = -3$, $\Lambda = (x(2))^2$, $x(1) = x_1^c(0, 2)$, $x_1^c(1, 2) = x(1)$, $\theta = 1$, $\theta^0 = 0$, $\xi = 1$.

Расчеты были проведены для $k_F = 2, 4, 10$. Результаты расчетов представлены на рисунках 3 и 4. Зависимость значений функционала от числа разбиений отрезка дана в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Изменение функционала в зависимости от числа разбиений

Разбиение	Функционал
2	-1.0673
4	-1.0825
10	-1.1068

Предварительно, как и первом примере, было найдено решение градиентным методом для ДНС. Для этого потребовалось 3 итерации. Найденные траектории и управляющие воздействия также представлены на указанных рисунках. При использовании предлагаемого в работе метода в среднем за две итерации с увеличением числа разбиений отрезка найденное значение функционала составило $I = -1.1068$ и совпало с наименьшим значением функционала в градиентном методе.

Полученные результаты подтверждают работоспособность предложенного алгоритма.

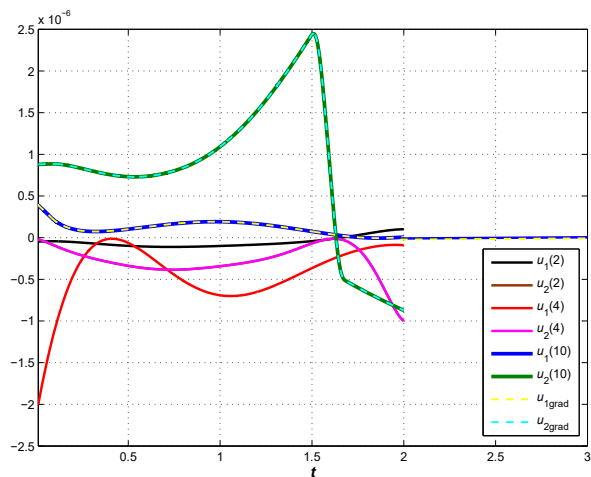


Рисунок 3. Управления, полученные градиентным методом и при различном числе разбиений отрезка

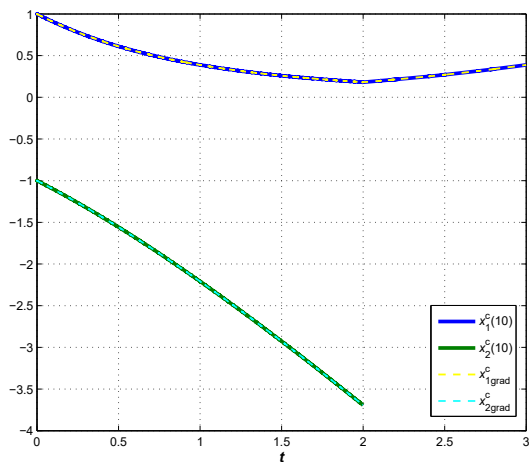


Рисунок 4. Состояния системы, полученные градиентным методом и при различном числе разбиений отрезка





Заключение









Таким образом, в работе приведена математическая модель линейной ДНС с коэффициентами, зависящими от состояния, для которой

поставлен аналог задачи АКОР. На основе обобщения достаточных условий оптимальности Кротова предложена схема ее решения, приводящая к необходимости поиска первых и вторых производных функций Кротова верхнего и нижнего уровня. Для их определения получена ДНС, содержащая уравнения Риккати на обоих уровнях относительно вторых производных с начальными условиями на правых концах дискретного и непрерывного аргументов. В этой ДНС входящие в нее матрицы также зависят от переменных состояний верхнего и нижнего уровней.

Проведены расчеты по сформулированному алгоритму на иллюстративных примерах, которые говорят о его работоспособности. Предварительно каждый пример для сравнительного анализа был решен градиентным методом, при этом градиентный метод потребовал большего числа итераций (во втором примере на одну). Следовательно, по трудоемкости предложенный алгоритм не превосходит градиентный метод, но может обеспечить меньшее значение функционала (пример 1). Это объясняется наличием в сопряженных системах верхнего и нижнего уровней уравнений как для первых, так и вторых производных функций Кротова, тогда как градиентный метод использует лишь первые производные от указанных функций.

Список литературы

- [1] С. В. Емельянов (ред.). *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970, 592 с.  [↑₁₀₅](#)
- [2] В. И. Гурман. «К теории оптимальных дискретных процессов», *Автоматика и телемеханика*, 1973, №6, с. 53–58.  [↑₁₀₅](#)
- [3] С. Н. Васильев. «Теория и применение логико-управляемых систем», *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (Москва, 29–31 января 2003), Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, М., 2003, с. 23–52. [↑₁₀₅](#)
- [4] А. С. Бортаковский. «Достаточные условия оптимальности детерминированными логико-динамическими системами», *Информатика. Сер. Автоматизация проектирования*, ВИМИ, М., 1992, с. 72–79. [↑₁₀₅](#)
- [5] Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*, Наука, М., 2005, ISBN 978-5-9710-5725-3, 429 с. [↑₁₀₅](#)
- [6] J. Lygeros. *Lecture Notes on Hybrid Systems*, ENSIETA 2-6/2/2004, 2004, 82 pp.  [↑₁₀₅](#)
- [7] A. J. Van der Shaft, H. Schumacher, *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 251, Springer-Verlag, London, 2000, ISBN 978-1-84628-542-4, xiv+174 pp.  [↑₁₀₅](#)
- [8] В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с. [↑_{105.106}](#)


- [9] В.Ф. Кротов. «Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем», *ДАН СССР*, **172**:1 (1967), с. 18–21.  [↑_{105,106}](#)
- [10] В. И. Гурман, И. В. Расина. «Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах», *Автомат. и телемех.*, 2012, №8, с. 16–29.  [↑₁₀₅](#)
- [11] И.В. Расина. «Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов», *Программные системы: теория и приложения*, **5**:9 (2011), с. 49–72.  [↑₁₀₅](#)
- [12] И. В. Расина. «Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов», *Автомат. и телемех.*, 2012, №10, с. 3–17.  [↑₁₀₅](#)
- [13] И.В. Расина. «Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями», *Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, ВМСППС'2017* (24–31 мая 2017 г., Алушта, Крым), Изд-во МАИ, М., 2017, с. 699–701. [↑_{108,111}](#)
- [14] А.М. Летов. «Аналитическое конструирование регуляторов, II», *Автоматика и телемеханика*, **21**:5 (1960), с. 436–441.  [↑_{106,108}](#)
- [15] Р. Габасов, А.И.Калинин, Ф.М. Кириллова, Л.И. Лавринович. «К асимптотическим методам оптимизации квазилинейных систем управления», *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **25**:3 (2019), с. 62–72.  [↑₁₀₆](#)
- [16] Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев, Д.А. Макаров. «Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром», *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2015, №10, с. 35–44.  [↑₁₀₆](#)
- [17] Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev. “A comparison of numerical algorithms for discrete-time state dependent coefficients control systems”, 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC) (19–21 Oct. 2017, Sinaia, Romania), pp. 401–406.  [↑₁₀₆](#)


Поступила в редакцию 02.05.2021
 Переработана 03.06.2021
 Опубликовано 30.06.2021

Рекомендовал к публикации

д.т.н. А. М. Цирлин

Пример ссылки на эту публикацию:

И. В. Расина, О. В. Фесько, О. В. Усенко. «Задача аналитического конструирования регуляторов для дискретно-непрерывных систем, линейных по управлению». *Программные системы: теория и приложения*, 2021, **12**:2(49), с. 105–119.  [10.25209/2079-3316-2021-12-2-105-119](#)


 http://psta.psirras.ru/read/psta2021_2_105-119.pdf

Об авторах:



Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 100 статей и 5 монографий


 0000-0001-8939-2968

e-mail: irinarasina@gmail.com



Олесь Владимирович Фесько

Научный сотрудник исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, к.т.н. Область интересов: программирование, численные методы


 0000-0002-9329-5754

e-mail: oles.fesko@hotmail.com



Олег Валерьевич Усенко


преподаватель физического факультета Иркутского государственного университета и Областного государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения социального обслуживания Иркутский реабилитационный техникум, автор и соавтор 21 публикаций, область интересов — численные методы оптимизации, программирование


 0000-0001-6291-8165

e-mail: o.v.usenko@gmail.com


Sample citation of this publication:

Irina V. Rasina, Oles V. Fesko, Oleg V. Usenko. “Analytical design of controllers for discrete-continuous systems with linear control”. *Program Systems: Theory and Applications*, 2021, **12**:2(49), pp. 105–119. (In Russian).

 10.25209/2079-3316-2021-12-2-105-119

 http://psta.psiras.ru/read/psta2021_2_105-119.pdf

The same article in English:

 10.25209/2079-3316-2021-12-2-121-135