ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 12, №2(49), с. 3–17

ББК В171.51:В161.83
ГРНТИ 27.37.17, 28.15.23
УДК 519.21:517.977.56

К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев

# Квазиособые управления в стохастических системах Гурса-Дарбу

Аннотация. В одной стохастической задаче управления, описываемой нелинейным гиперболическим уравнением с краевым условием типа Гурса-Дарбу, получено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного принципа максимума Понтрягина. Рассмотрен случай вырождения линеаризованного принципа максимума. Установлены различные необходимые условия оптимальности для квазиособых управлений. Квазиособыми называются управления, для которых линеаризованное условие максимума вырождается.

*Ключевые слова и фразы:* необходимые условия оптимальности, нелинейная стохастическая система Гурса-Дарбу, линеаризованное условие оптимальности, квазиособые управления.

## Введение

Многие задачи прикладного характера, например, процессы хроматографии, сорбции и десорбции газов, процессы сушки и др., формально могут быть сведены к задачам управления стохастическими системами Гурса-Дарбу [1–3].

К настоящему времени стохастические задачи оптимального управления для систем, описываемых уравнениями гиперболического типа с краевыми условиями Гурса-Дарбу, исследованы в работах [3–6]. Подобные задачи оптимального управления в детерминированном случае довольно глубоко изучены в работах [7–12] и др.

Эффективным средством исследования различных задач оптимального управления является принцип максимума Понтрягина, представляющий собой самое сильное необходимое условие оптимальности первого порядка. Однако нередки случаи, когда условие максимума


doi 10.25209/2079-3316-2021-12-2-3-17

Понтрягина или же линеаризованное условие максимума Понтрягина, вырождаются, т.е. выполняется тривиальным образом. Эти случаи называются особыми и квазиособыми случаями соответственно [13].

В настоящей статье для одной стохастической задачи оптимального управления системами Гурса-Дарбу при помощи стохастического аналога метода, предложенного в работах [11, 12], получено линеаризованное условие максимума Понтрягина и исследован квазиособый случай.

## 1. Постановка задачи

Пусть $(\Omega, F, P)$ — некоторое вероятностное пространство;

$D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1],\ y = (t, x) \in D$;

$y = (t, x) \leq y' = (t', x'),$ если $t \leq t', x \leq x'$;

$F_y = F_{tx}$ — семейство $\sigma$-алгебр $F_y \in F$, определенных на основном вероятностном пространстве $(\Omega, F, P)$ причем $F_y \subset_{y'}$, если $y \leq y'$;

$F_y = \sigma(W_{\tau s},\ \tau \leq t_0 \leq t,\ s \leq x_0 \leq x),$ где $W(y)$ — $n$-мерный стандартный двухпараметрический винеровский процесс;

$\Re(D)$ — пространство измеримых по $(y, \omega)$ и $F_y$-согласованных процессов $z : D \times \Omega \to R^n$ таких, что $\mathrm{E} \int\limits_D \|z(y)\|^2 dt dx < +\infty$;

E — знак математического ожидания.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа:

$$S(u) = \mathrm{E}\{\Phi(z(t_1, x_1))\} \to \min, \tag{1}$$

$$u(y) \in U \subset R^r, y \in D, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z(y)}{\partial t \partial x} = f(y, z(y), u(y)) + g(y, z(y)) \frac{\partial^2 W(y)}{\partial t \partial x}, y \in D, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &z(t_0, x) = a(x),\ x \in [x_0, x_1], \\ &z(t, x_0) = b(t),\quad t \in [t_0, t_1],\quad a(x_0) = b(t_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$f(y, z, u)$ — заданная $n$-мерная вектор функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z, u)$ до второго порядка включительно;

$g(y, z)$ — заданная $n$-мерная вектор функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $z$ до второго порядка включительно;

*краевые $n$-мерные вектор функции* $a(x), b(t)$, заданные соответственно на $[x_0, x_1]$ и $[t_0, t_1]$, удовлетворяют условию Липшица;

$\frac{\partial^2 W(y)}{\partial t \partial x}$ — $n$ мерный двухпараметрический независимый «белый шум» на плоскости [3, 14];

$U$ — заданное непустое ограниченное и выпуклое множество;

$u\,(y)$ — $r$-мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий (допустимое управление);

$\Phi\,(z)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u\,(y)$ соответствует с вероятностью 1 единственное решение $z\,(y)$ в смысле [3, 15] краевой задачи (3)–(4).

Нашей целью является вывод разного типа необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче (1)–(4).

## 2. Формула приращения второго порядка критерия качества

Пусть $u(y)$ и $\overline{u}\,(y) = u\,(y) + \Delta u\,(y)$ — два допустимых управления, а $z(y)$ и $\overline{z}\,(y) = z\,(y) + \Delta z\,(y)$ — соответствующие им решения краевой задачи (3)–(4).

Для удобства в дальнейшем введем следующие обозначения:

$$H\,(y, z, u, \psi) = \psi^{'} f\,(y, z, u)\,,$$
$$H_z\,[y] = H_z\,(y, z, u, \psi)\,, \quad H_u\,[y] = H_u\,(y, z, u, \psi)\,,$$
$$f_z\,[y] = f_z\,(y, z, u)\,, \qquad f_u\,[y] = f_u\,(y, z, u)\,, \quad g_z\,[y] = g_z\,(y, z)\,.$$

Здесь $\psi\,(y)$ — пока произвольная вектор-функция размерности $n$, а $H\,(y, z, u, \psi)$ — стохастический аналог функции Гамильтона–Понтрягина.

Из (3)–(4) следует, что приращение $\Delta z(y)$ состояния $z(y)$ является решением следующей задачи

$$(5)\quad \frac{\partial^2 \Delta z(y)}{\partial t \partial x} = [f\,(y, \overline{z}, \overline{u}) - f\,(y, z, u)] + (g\,(y, \overline{z}) - g\,(y, z))\,\frac{\partial^2 W\,(y)}{\partial t \partial x}, \quad y \in D,$$

$$(6)\quad \Delta z\,(t_0, x) = 0, \quad x \in X, \quad \Delta z\,(t, x_0) = 0, \quad t \in T.$$

Учитывая, что математическое ожидание стохастических интегралов равно нулю, из равенства (5) после интегрирования по области $D$

получаем:

$$E\int\limits_D \psi'(y)\frac{\partial^2\Delta z(y)}{\partial t\partial x}dx\,dt =$$
$$= E\int\limits_D \left[H\left(y,\overline{z}\left(y\right),\overline{u}\left(y\right),\psi(y)\right) - H\left(y,z\left(y\right),u\left(y\right),\psi(y)\right)\right]dx\,dt.$$

Последнее соотношение, при помощи формулы Тейлора дает возможность записать формулу приращения функционала (1) в виде:

$$(7)\quad \Delta S(u) = S\left(\overline{u}\right) - S\left(u\right) = E\Bigg\{\Phi_z^{'}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\Delta z'\left(t_1,x_1\right)\Phi_{zz}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right) +$$
$$+\int\limits_D \psi^{'}(y)\frac{\partial^2\Delta z(y)}{\partial t\partial x}dx\,dt - \int\limits_D H_z^{'}\left[y\right]\Delta z\left(y\right)dx\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_D \Delta z^{'}\left(y\right)H_{zz}[y]\Delta z(y)dx\,dt - \int\limits_D H_u'\left[y\right]\Delta u\left(y\right)dx\,dt -$$
$$-\int\limits_D \Delta u'\left(y\right)H_{uz}[y]\Delta z(y)dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_D \Delta u'\left(y\right)H_{uu}[y]\Delta u(y)dx\,dt +$$
$$+ o_1\left(\left\|\Delta z\left(y\right)\right\|^2\right) - \int\limits_D o_2\left(\left\|\Delta p\left(y\right)\right\|^2\right)dx\,dt\Bigg\}.$$

Здесь по определению $\Delta p\left(y\right) = \left(\Delta u\left(y\right),\Delta z\left(y\right)\right)'$, а величины $o_i\left(\cdot\right), i = 1,2$, определяются соответственно из разложений

$$\Phi\left(\overline{z}\left(t_1,x_1\right)\right) - \Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right) = \Phi_z'\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\Delta z'\left(t_1,x_1\right)\Phi_{zz}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right) + o_1\left(\left\|\Delta z\left(t,x\right)\right\|^2\right),$$

$$H\left(y,\overline{z}\left(y\right),\overline{u}\left(y\right),\psi\left(y\right)\right) - H\left(y,z(y),u\left(y\right),\psi\left(y\right)\right) =$$
$$= H_z^{'}\left[y\right]\Delta z\left(y\right) + \frac{1}{2}\Delta z'\left(y\right)H_{zz}[y]\Delta z(y) + H_u^{'}[y]\Delta u(y) +$$
$$+\Delta u'(y)H_{uz}[y]\Delta z(y) + \frac{1}{2}\Delta u'\left(y\right)H_{uu}\left[y\right]\Delta u\left(y\right) + o_2\left(\left\|\Delta p\left(y\right)\right\|^2\right).$$

Принимая во внимание краевые условия (6) имеем

$$\Delta z\,(y)=\int\limits_{D_y}\frac{\partial^2\Delta z(\tau,s)}{\partial\tau\partial s}ds\,d\tau,$$

где $D_y=[t_0,t]\times[x_0,x]$.

Учитывая эти тождества и теорему Фубини [17, с.136], нетрудно убедиться в справедливости тождеств

$$\Phi_z^{'}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right)=\int\limits_D\Phi_z^{'}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\frac{\partial^2\Delta z\,(y)}{\partial t\partial x}dx\,dt,$$

$$\int\limits_D H_z^{'}\,[y]\,\Delta z\,(y)\,dx\,dt=\int\limits_D\left[\int\limits_t^{t_1}\int\limits_x^{x_1}H_z[\tau,s]ds\,d\tau\right]\frac{\partial^2\Delta z\,(y)}{\partial t\partial x}dx\,dt.$$

С учетом последнее тождество в (7), и предполагая, что $\psi\,(t,x)$ является решением следующего двумерного интегрального уравнения Вольтерра (сопряженная система)

$$\psi\,(y)=-\Phi_z\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z\;\;[\tau,s]\,ds\,d\tau,$$

получаем,что приращение (7) функционала (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}(8)\quad \Delta S\,(u)=\mathrm{E}\Bigg\{-\int\limits_D H_u'\,[y]\,\Delta u\,(y)\,dx\,dt+\\ +\frac{1}{2}\Delta z'\left(t_1,x_1\right)\Phi_{zz}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right)-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_D\Delta z'\,(t,x)\,H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt-\int\limits_D\Delta u'\,(y)\,H_{uz}[y]\Delta z(y)dx\,dt-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_D\Delta u'\,(y)\,H_{uu}[y]\Delta u(y)dx\,dt+\eta(\Delta u)\Bigg\},\end{aligned}$$

где

$$(9)\qquad \eta\,(\Delta u)=E\left\{o_1\left(\|\Delta z\,(y)\|^2\right)-\int\limits_D o_2\left(\|\Delta p\,(t,x)\|^2\right)dx\,dt\right\}.$$

## 3. Оценка математического ожидания нормы приращения состояния и линеаризованный принцип максимума

Из (5) переходя к эквивалентному стохастическому интегральному уравнению типа Дарбу, будем иметь

$$E\Delta z\left(y\right)=E\int\limits_{D_y}\left[f\left(\tau,s,\overline{z}\left(\tau,s\right),\overline{u}\left(\tau,s\right)\right)-f\left(\tau,s,z\left(\tau,s\right),u\left(\tau,s\right)\right)\right]ds\,d\tau.$$

Отсюда переходя к норме и используя условию Липшица, получим

$$E\|\Delta z\left(y\right)\|\leq k_1\,\mathrm{E}\left\{\int\limits_{D_y}\|\Delta z\left(\tau,s\right)\|\,ds\,d\tau+\int\limits_{D_y}\|\Delta u\left(\tau,s\right)\|\,ds\,d\tau\right\}.$$

Применяя последнему неравенству двумерный аналог леммы Гронуолла-Белмана [**16**], имеем:

$$E\|\Delta z\left(y\right)\|\leq \mathrm{E}k_2\int\limits_{D}\|\Delta u\left(\tau,s\right)\|\,ds\,d\tau, \tag{10}$$

где $k_1,k_2=const>0$.

Поскольку область управления $U$ — выпуклое множество, то специальное приращение допустимого управления $u(y)$ можно определить по формуле

$$\Delta u\left(y;\varepsilon\right)=\varepsilon\left(w\left(y\right)-u\left(y\right)\right), \tag{11}$$

где $\varepsilon\in[0,1]$, а $w\left(y\right)\in U, y\in D$ — произвольная допустимая вектор-функция.

Через $\Delta z(y;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение траектории $z(y)$ соответствующее приращению (11) управления $u(y)$. Тогда из оценки (10) сразу следует, что

$$E\|\Delta z\left(y;\varepsilon\right)\|\leq k_3\varepsilon,\ \ y\in D,\left(k_3=const>0\right).$$

Учитывая эту оценку и (11), из формулы (9) имеем

$$\eta\left(\Delta u(y;\varepsilon)\right)=o\left(\varepsilon^2\right). \tag{12}$$

С другой стороны, по схеме аналогичной, например, из [13,с.50] получаем справедливость разложения

$$\Delta z\left(y;\varepsilon\right)=\varepsilon l\left(y\right)+o\left(y;\varepsilon\right), \tag{13}$$

где $l(y)$ $n$- мерная вектор-функция, являющаяся решением системы неоднородных стохастических гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 l(y)}{\partial t \partial x} = f_z'[y]\, l(y) + f_u'[y]\,(w(y) - u(y)) + g_z[y]\, l(y)\, \frac{\partial^2 W(y)}{\partial t \partial x}, \tag{14}$$

с краевыми условиями

$$l(t_0, x) = 0, \quad l(t, x_0) = 0.$$

Далее, учитывая соотношения (11)–(13) в (8) получим, что

$$\begin{gathered} S(u(y;\varepsilon)) - S(u(y)) = \Delta_\epsilon S(u(y)) = \\ = \mathrm{E}\Bigg\{ -\varepsilon \int\limits_D H_u'[y]\,(w(y) - u(y))\, dx\, dt + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} l'[y]\,(t_1, x_1)\, \Phi_{zz}(z(t_1, x_1))\, l(t_1, x_1) - \\ - \int\limits_D l'(y)\, H_{zz}[y] l(t,x) dx\, dt - 2 \int\limits_D (w(y) - u(y))' H_{uz}[y] l(y) dx\, dt - \\ - \int\limits_D (w(y) - u(y))'\, H_{uu}[y](w(y) - u(y)) dx\, dt] \Bigg\} + o\left(\varepsilon^2\right). \end{gathered} \tag{15}$$

Из разложения (15) в силу произвольности $\varepsilon \in [0,1]$ следует справедливость следующего утверждения **Теорема 1.** *Для оптимальности допустимого управления $u(y)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство*

$$E \int\limits_D H_u'[y]\,(w(y) - u(y))\, dx\, dt \le 0, \tag{16}$$

*выполнялось для всех $w(y) \in U, y \in D$.*

Из неравенства (16) аналогично доказательству леммы из [**18**] нетрудно вывести, что справедливо

**Следствие 1.** (поточечный линеаризованный принцип максимума [**19**]). *Для оптимальности допустимого управления $u(y)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы*

$$E H_u'[\theta, \xi]\,(v - u(y)) \le 0 \tag{17}$$

*выполнялось для всех $v \in U, (\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$.*

Здесь и в дальнейшем $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ – произвольная правильная точка (точка Лебега) [20, с.86] управления $u\,(y)$.

Перейдем к изучению случая вырождения условия линеаризованного принципа максимума.

## 4. Об оптимальности квазиособых управлений

По аналогии с [12, 13] введем

**Определение 1.** *Если для всех* $v\in U,(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$,

$$EH_u^{'}\left[\theta,\xi\right](v-u\,(t,x))=0,$$

*то управление $u(y)$ назовем квазиособым управлением, а соответствующий случай — квазиособым случаем.*

Пусть $u\,(y)$ — квазиособое управление. Тогда из равенства (15) следует справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Для оптимальности квазиособого управления $u(y)$ в задаче* (1)–(4) *необходимо, чтобы неравенство*

$$\mathrm{E}\left\{l'\left(t_1,x_1\right)\Phi_{zz}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)l\left(t_1,x_1\right)-\right.$$
$$-\int\limits_D l'\left(y\right)H_{zz}[y]l(t,x)dx\,dt-2\int\limits_D(w\left(y\right)-u\left(y\right))'H_{uz}[y]l(y)dx\,dt-$$
$$\left.-\int\limits_D(w\left(y\right)-u\left(y\right))'H_{uu}[y](w\left(y\right)-u(y))dx\,dt\right\}\geq 0, \tag{18}$$

*выполнялось для всех $w\,(y)\in U,\ y\in D$.*

Как видно неравенство (18) является неявным необходимым условием оптимальности для квазиособых управлений. Займемся выводом необходимых условий оптимальности квазиособых управлений явно выраженных непосредственно через параметры задачи (1)–(4).

Нам потребуется

**Лемма.** *Решение уравнения* (14) *с вероятностью, равной 1, всюду в области $D$ допускает представление*

$$l\left(y\right)=\int\limits_{D_y}Q(y;\tau,s)(w\left(\tau,s\right)-u(\tau,s))ds\,d\tau, \tag{19}$$

*где*

$$Q\,(y;\tau,s) = R\,(y;\tau,s)\,f_u\,[\tau,s]\,,$$

*а* $n\times n$*-матричная функция* $R\,(y;\tau,s)$ , *является решением следующего стохастического интегрального уравнения Вольтерра:*

$$R\,(y;\tau,s) = I + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s}^{x} R(y;\alpha,\beta) f_z\,[\alpha,\beta]\,d\beta d\alpha +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s}^{x} R(y;\alpha,\beta) g_z\,[\alpha,\beta]\,\frac{\partial^2 W\,(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta} d\beta d\alpha,$$

*где* $I-(n\times n)$ *единичная матрица.*

Отметим, что матрица $R(y;\tau,s)$ является стохастическим аналогом матрицы Римана для линеаризованной стохастической задачи Гурса-Дарбу (14) [**21**].

Преставление (19), дает возможность с рассуждениями подобными из [**11**; **12**, с.70] доказать следующие тождества:

$$(20)\quad l'\,(t_1,x_1)\,\Phi_{zz}\,(z\,(t_1,x_1))\,l\,(t_1,x_1) =$$

$$= \iint\limits_{D} (w\,(\tau,s) - u\,(\tau,s))' Q\,(t_1,x_1;\tau,s)\,\Phi_{zz}\,(z\,(t_1,x_1))\,Q\,(t_1,x_1;\xi,\eta)\times$$

$$\times\,(w\,(\xi,\eta) - u(\xi,\eta)) d\tau ds\, d\xi d\eta,$$

$$(21)\quad \int\limits_{D} l'\,(y)\,H_{zz}[y] l(y) dx\,dt = \iint\limits_{D} (w\,(\tau,s) - u\,(\tau,s))\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\max}^{t_1}(\tau,\xi)\int\limits_{\max}^{x_1}(s,\eta) Q\,(t,x;\tau,s)\,H_{zz}[t,x] Q\,(t,x;\xi,\eta)\,dx\,dt\right]\times$$

$$\times\,(w\,(\xi,\eta) - u\,(\xi,\eta))\,d\tau ds\,d\xi d\eta,$$

$$(22)\quad \int\limits_{D} (w\,(t,x) - u\,(t,x))' H_{uz}[t,x] l(t,x) dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1} (w\,(\tau,s) - u\,(\tau,s))'\,H_{uz}\,[\tau,s]\,Q\,(\tau,s;t,x)\,ds\,d\tau\right]\times$$

$$\times \left(w\left(t,x\right)-u\left(t,x\right)\right)dx\,dt.$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$K\left(\tau,s;\xi,\eta\right)=-\,Q\left(t_1,x_1;\tau,s\right)'\,\Phi_{zz}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)Q\left(t_1,x_1;\xi,\eta\right)+$$

$$+\int_{\max(\tau,\xi)}^{t_1}\int_{\max(s,\eta)}^{x_1}Q\left(t,x;\tau,s\right)'\,H_{zz}\left[y\right]Q\left(y;\xi,\eta\right)dx\,dt. \tag{23}$$

Учитывая (20)–(22) в (18) получаем, что

$$\begin{gathered}\mathrm{E}\left\{\iint\limits_D\left(w\left(\tau,s\right)-u(\tau,s)\right)'K(\tau,s;\xi,\eta)(w\left(\xi,\eta\right)-u(\xi,\eta))d\tau ds\,d\xi d\eta+\right.\\ +2\int\limits_D\left[\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\left(w\left(\tau,s\right)-u\left(\tau,s\right)\right)'H_{uz}\left[\tau,s\right]Q\left(\tau,s;y\right)ds\,d\tau\right]\times\\ \times\left(w\left(y\right)-u\left(y\right)\right)dx\,dt+\\ \left.+\int\limits_D\left(w\left(y\right)-u\left(y\right)\right)'H_{uu}[y](w\left(y\right)-u(y))dx\,dt\right\}\le 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** *Для оптимальности квазиособого управления* $u\left(t,x\right)$ *в задаче* (1)–(4) *необходимо, чтобы выполнялось неравенство* (24) *для всех* $w\left(y\right)\in U,\ y\in D$.

Неравенство (24) является общим интегральным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Кроме этого, из него, определяя $w(y)$ специальным образом(например, в виде)

$$w\left(y\right)=\begin{cases}v,\quad y\in D_\varepsilon=\left[\theta,\theta+\varepsilon\right)\times\left[\xi,\xi+\varepsilon\right),\\ u(y),y\in D\backslash D_\varepsilon,\end{cases} \tag{25}$$

можно получить ряд легко проверяемых поточечных условий оптимальности. Приведем одно из них

**Следствие 2.** *Если* $u\left(t,x\right)$ *квазиособое оптимальное управление в задаче* (1)–(4), *то для всех* $\left(\theta,\xi\right)\in\left[t_0,t_1\right)\times\left[x_0,x_1\right)$ *и* $v\in U$ *выполняется неравенство*

$$E\left(v-u\left(\theta,\xi\right)\right)'H_{uu}\left[\theta,\xi\right]\left(v-u\left(\theta,\xi\right)\right)\le 0. \tag{26}$$

**Определение 2** [13,11]. *Квазиособое управление* $u(y), y \in D$ *назовем квазиособым управлением второго порядка если*

$$E\,(v-u\,(\theta,\xi))'\,H_{uu}\,[\theta,\xi]\,(v-u\,(\theta,\xi))=0. \tag{27}$$

*для всех* $v \in U,\ u\ (\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$.

Допустим, что $u(y)$ квазиособое оптимальное управление второго порядка. Тогда из неравенства (24), принимая во внимание (25), получим:

$$E\Big\{(v-u(\theta,\xi))'(K\,(\theta,\xi;\theta,\xi)+ \\ +\frac{1}{2}H_{uz}\,[\theta,\xi]\,Q(\theta,\xi;\theta,\xi))(v-u\,(\theta,\xi))\Big\}\le 0. \tag{28}$$

Итак, доказана

**Теорема 4.** *Для оптимальности квазиособого управления второго порядка* $u(t,x)$ *в задаче* (1)–(4) *необходимо, чтобы неравенство* (28) *выполнялось для всех* $v \in\ u\ (\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$.

## Заключение

Применяя один вариант метода приращений доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума. В следующем этапе исследован квазиособый случай и установлен ряд необходимых условий оптимальности второго порядка для квазиособых управлений.

## Список литературы


[1] В. В. Рачинский. *Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии*, Наука, М., 1964, 136 с. ↑3

[2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1977, 736 с. ↑3

[3] Ю. М. Ермольев, В. П. Гуленко, Т. И. Царенко. *Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления*, Наукова Думка, Киев, 1978, 164 с. ↑3,5

[4] Л. Е. Шайхет. «Об оптимальном управлении одним классом стохастических дифференциальных уравнений в частных производных», *Матем. заметки*, **31**:6 (1982), с. 933–936. ↑3

[5] Л. Е. Шайхет. «Оптимальное управление некоторыми гиперболическими и интегральными уравнениями», Теория случайных процессов, т. **15**, Киев, 1987, с. 96–101. ↑3

[6] R. O. Mastaliyev. “Optimality conditions in one stochastic control problem”, *Conference Proceedings of Science and Technology*, **3**:1, Conference Proceeding of 3rd International E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2020) (2020), pp. 180–183. ↑3

[7] А. И. Егоров. «Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах распределенными параметрами», *Автоматика и телемеханика*, **25**:5 (1964), с. 613–623. ↑3

[8] Л. Т. Ащепков, О. В. Васильев, И. Л. Коваленок. «Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса-Дарбу», *Дифференц. уравнения*, **16**:6 (1980), с. 1054–1059. ↑3

[9] В. А. Срочко. «Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами», *Сиб. мат. журнал*, **17**:5 (1976), с. 1108–1115. ↑3

[10] Т. К. Меликов. *Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах оптимального управления*, Автореф. дис. … д.ф.-м.н., Баку, 2005, 42 с. ↑3

[11] К. Б. Мансимов, М. Дж. Марданов. *Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу*, «Элм», Баку, 2010, 360 с. ↑3,4,11

[12] К. Б. Мансимов. *Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления*, Автореф. дис. … д.ф.-м.н., Баку, 1994, 43 с. ↑3,4,10,11

[13] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. *Особые оптимальные управления*, URSS, М., 2013, ISBN 978-5-397-03699-3, 256 с. ↑4,10

[14] И. И. Гихман, А. В. Скороход. «Общая задача Гурса, содержащая интегралы по двухпараметрическому винеровскому полю», *Поведение систем в случайных средах*, Донецк, 1975, с. 15–21. ↑5

[15] Л. Л. Пономаренко. «Стохастическая бесконечномерная задача Гурса», *Математический анализ и теория вероятностей*, Киев, 1978, с. 140–143. ↑5

[16] В. И. Плотников, В. И. Сумин. «Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу», *Дифференц. уравнения*, **8**:5 (1972), с. 845–856. ↑8

[17] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979, 429 с. ↑7

[18] В. А. Срочко. *Вычислительные методы оптимального управления*, Изд. ИГУ, Иркутск, 1982, 110 с. ↑9

[19] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. *Принцип максимума в теории оптимального управления*, URSS, М., 2011, ISBN 978-5-397-06172-8, 272 с. ↑9

[20] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1983, 392 с. ↑10

[21] К. Т. Ахмедов, С. С. Ахиев. «Об интегральном представлении решений некоторых систем дифференциальных уравнений», *Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем.-наук.*, 1973, №2, с. 116–120. ↑11

*Поступила в редакцию* 18.02.2021
*Переработана* 01.03.2021
*Опубликована* 14.04.2021

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. И. В. Расина*

*Пример ссылки на эту публикацию:*

К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев. «Квазиособые управления в стохастических системах Гурса-Дарбу». *Программные системы: теория и приложения*, 2021, **12**:2(49), с. 3–17.
doi 10.25209/2079-3316-2021-12-2-3-17
URL http://psta.psiras.ru/read/psta2021_2_3-17.pdf

*Об авторах:*

**Камиль Байрамали Мансимов**

Доктор физ. мат. наук, проф., зав. кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаб. «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана

iD 0000-0002-1518-2279
e-mail: kamilbmansimov@gmail.com

**Рашад Октай Масталиев**

Доктор философии по математике, доцент, ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана

iD 0000-0001-6387-2146
e-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

CSCSTI 27.37.17, 28.15.23
UDC 519.21:517.977.56

Kamil B. Mansimov, Rashad O. Mastaliev. *Quasi-singular control in Goursat-Darboux stochastic systems.*

ABSTRACT. In a stochastic control problem described by a nonlinear hyperbolic equation with a Goursat-Darboux type boundary condition, first-order necessary optimality condition in the form of linearized Pontryagin maximum principle is obtained. The case of degeneration of the linearized maximum principle is considered, and various necessary optimality conditions are established for quasi-singular (i.e., controls for which the linearized maximum condition degenerates) controls. (*In Russian*).

*Key words and phrases:* necessary optimality conditions, nonlinear Goursat-Darboux stochastic system, linearized optimality condition, quasi-singular controls.

2020 *Mathematics Subject Classification:* 93E20; 49K20

*References*

[1] V.V. Rachinsky. *Introduction to general theory of dynamics of sopbtion and chromatography*, Nauka, M., 1964 (in Russian), 136 pp.↑3

[2] A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. *Mathematical physcis equations*, Nauka, M., 1977 (in Russian), 736 pp.↑3

[3] Yu. M. Ermolev, V.P.Gulenko, T.I. Tsarenko. *Finite difference method in optimal control problems*, Naukova Dumka, Kiev, 1978 (in Russian), 164 pp.↑3,5

[4] L. E. Shaikhet. "Optimal control of a class of stochastic partial differential equations", *Math. Notes*, **31**:6 (1982), pp. 471–472. ↑3

[5] L.E. Shaikhet. "Optimal control some hyperbolic and integral equations", Theory of random processes, vol. **15**, Kiev, 1987, pp. 96–101 (in Russian).↑3

[6] R. O. Mastaliyev. "Optimality conditions in one stochastic control problem", *Conference Proceedings of Science and Technology*, **3**:1, Conference Proceeding of 3rd International E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2020) (2020), pp. 180–183. ↑3

[7] A. I. Egorov. "Concerning optimum control of processes in some systems with distributed parameters", *Avtomat. i Telemekh.*, **25**:5 (1964), pp. 613–623 (in Russian). ↑3

[8] L. T. Ashchepkov, O. V. Vasiliev, I. L. Kovalenok. "A strong optimality condition for singular controls in a Goursat–Darboux system", *Differ. Uravn.*, **16**:6 (1980), pp. 1054–1059 (in Russian). ↑3

[9] V. A. Srochko. "Optimality conditions for a certain class of systems with distributed parameters", *Siberian Math. J.*, **17**:5 (1976), pp. 819–825. ↑3



10.25209/2079-3316-2021-12-2-3-17

[10] T. K. Melikov. *Singular in the classical sense control in Goursat-Darboux systems*, Avtoref. diss. ... d.f.-m.n., Publishing House, Baku, 2003 (in Russian), 96 pp.↑3

[11] K. B. Mansimov, M. J. Mardanov. *Quality theory of optimal control of Goursat-Darboux systems*, ELM, Baku, 2010 (in Russian), 360 pp.↑3,4,11

[12] K. B. Mansimov. *Necessary optimality conditions of singular processes in optimal control problems*, Avtoref. diss. ... d.f.-m.n., Baku, 1994 (in Russian), 43 pp. ↑3,4,10,11

[13] R. Gabasov, F. M. Kirillova. *Singular optimal controls*, URSS, M., 2013, ISBN 978-5-397-03699-3 (in Russian), 256 pp.↑4,10

[14] I. I. Gikhman, A. I. Skorokhod. "General Goursat problem containing integrals over a two-parameter Wiener field", *The behavior of systems in random environments*, Donetsk, 1975, pp. 15–21 (in Russian).↑5

[15] L. L. Ponomarenko. "The stochastic infinite-dimensional Goursat problem", *Mathematical analysis and probability theory*, Kiev, 1978, pp. 140–143 (in Russian). ↑5

[16] V. I. Plotnikov, V. I. Sumin. "Problems of the stability of nonlinear Goursat–Darboux systems", *Differ. Uravn.*, **8**:5 (1972), pp. 845–856 (in Russian). ↑8

[17] V. M. Alekseev, V. M. Tixomirov, S. V. Fomin. *Optimal control*, Nauka, M., 1979 (in Russian), 429 pp.↑7

[18] V. A. Srochko. *Computational optimal control methods*, Izd-vo IGU, Irkutsk, 1982 (in Russian), 110 pp.↑9

[19] R. Gabasov, F. M. Kirillova. *The maximum principle in optimal control theory*, URSS, M., 2011, ISBN 978-5-397-06172-8 (in Russian), 272 pp.↑9

[20] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishenko. *Mathematical theory of optimal processes*, Nauka, M., 1983 (in Russian), 392 pp.↑10

[21] K. T. Akhmedov, S. S. Akhiev. "On integral representation of solutions of some systems of differential equations", *Izv. AN Azerb SSR ser. phys. math. sci.*, 1973, no. 2, pp. 116–120 (in Russian).↑11

*Sample citation of this publication:*

Kamil B. Mansimov, Rashad O. Mastaliev. "Quasi-singular control in Goursat-Darboux stochastic systems". *Program Systems: Theory and Applications*, 2021, **12**:2(49), pp. 3–17. (*In Russian*). doi 10.25209/2079-3316-2021-12-2-3-17

URL http://psta.psiras.ru/read/psta2021_2_3-17.pdf