

УДК 517.958

 10.25209/2079-3316-2022-13-3-113-137



Моделирование однонаправленного излучения микродисковых резонаторов с отверстиями методом Галеркина с точно вычисляемыми матричными элементами

Илья Владимирович **Кетов**^{1✉}, Александр Олегович **Спиридонов**²,
Анна Игоревна **Репина**³, Евгений Михайлович **Карчевский**⁴

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

^{1✉}ivlketov@gmail.com

(подробнее об авторах на с. 136)

Аннотация. Мы исследуем влияние круглого отверстия в двумерном микроволновом лазере, имеющем форму микродиска, на частоту, направленность и порог генерации излучения мод шепчущей галереи, с помощью программного комплекса, основанного на системе интегральных уравнений и численного метода её решения, который гарантированно сходится. Мы демонстрируем, что небольшое круглое отверстие может значительно усилить направленность излучения, сохранив низкими пороги генерации, если показатель преломления достаточно велик и расположение отверстия выбрано правильно. Местоположение отверстия должно быть близко к области, где тот же однородный микродисковый лазер, возбужденный плоской волной, демонстрирует широкополосную фокусировку в виде горячей точки, называемой фотонной струей.

Ключевые слова и фразы: программный комплекс, метод Галеркина, микродисковый лазер

Благодарности: Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»)

Для цитирования: Кетов И.В., Спиридонов А.О., Репина А.И., Карчевский Е.М. *Моделирование однонаправленного излучения микродисковых резонаторов с отверстиями методом Галеркина с точно вычисляемыми матричными элементами* // Программные системы: теория и приложения. 2022. Т. 13. № 3(54). С. 113–137. http://psta.psiras.ru/read/psta2022_3_113-137.pdf

Введение

В видимом и инфракрасном диапазонах света диэлектрические микроразмерные рассеиватели являются примерами конфигураций, демонстрирующих как геометрическо-оптические (лучеподобные), так и модовые эффекты. Наиболее известными из них являются линзы различной формы. В частности, круглый цилиндрический стержень и сферическая диэлектрическая частица концентрируют поле падающей плоской волны в узкое вытянутое фокусное пятно на теневой стороне, обычно называемое фотонной струей (PJ) [1, 2]. Как и любой фокусирующий эффект, PJ является широкополосным (т.е. не резонансным) и имеет геометрически-оптическое происхождение [3]. Более того, если частота или радиус сферы или стержня увеличивается, то область PJ становится меньше, в то время как максимальная амплитуда поля в этой области линейно увеличивается. Однако помимо эффекта PJ, в ограниченных диэлектрических структурах обычно хорошо заметны резонансы на собственных модах. В частности, известно, что круглые диэлектрические стержни и сферы поддерживают моды шепчущей галереи (WG), которые имеют сверхвысокие Q-факторы, растущие экспоненциально с азимутальным индексом моды и радиусом. Когда мода WG возбуждается плоской волной, на диаграмме поля в ближней зоне наблюдаются азимутально периодические горячие точки вдоль обода полости, помимо фокальной области PJ. Поэтому моды WG портят фокусировку на дискретных частотах.

Согласно теореме взаимности электромагнитной теории, если поместить точечный источник в точке максимальной амплитуды поля PJ, то можно наблюдать «обратный эффект PJ». Это означает, что в направлении, противоположном направлению распространения плоской волны в рассеивающей конфигурации, возникает интенсивный лепесток излучения [4, 5]. Этот «обратный» эффект также является широкополосным, и упомянутый интенсивный лепесток излучения заостряется, если оптический размер рассеивателя становится больше. Однако на дискретных частотах этот эффект коллимации пучка портится из-за возбуждения WG мод. Это происходит потому, что на диаграмме поля в дальней зоне вспыхивает множество одинаково интенсивных лепестков.

Как известно, PJ появляется вне круглого рассеивателя, если показатель преломления n меньше 2. В противоположном случае, когда n достаточно велик, фокальная область смещается внутрь рассеивателя

[1–3]. Это наблюдение наводит на мысль, что размещение небольших рассеивателей в максимуме поля фокальной области микродискового лазера с высоким показателем преломления может быть использовано для усиления направленности излучения WG мод.

Тонкие круглые микродисковые лазеры, установленные на пьедестале или лежащие на низкоиндексной подложке, известны как микроразмерные источники благодаря сверхнизким порогам их мод WG [6]. Обычно они изготавливаются из высокоиндексных материалов, таких как GaAs ($\nu = 3.4$). Однако направленность их излучения низка из-за большого количества (в два раза больше азимутального индекса моды) одинаковых лепестков на диаграмме поля в дальней зоне. Этот недостаток круглых микродисковых лазеров послужил толчком к поиску лучшей формы. Среди наиболее перспективных форм были рассмотрены лимакон, змейка и спиралевидная форма [7–9]. К настоящему времени сложился консенсус, что отклонения от круглой формы не должны быть существенными, чтобы не испортить высокие Q-факторы WG мод. В этом смысле резкая ступенька на ободу спиральной полости убивает Q-фактор, что перевешивает улучшение направленности. Тем не менее, следует подчеркнуть, что почти все публикации (за исключением случая формы змейки [8]), посвященные поиску оптимальной формы, были основаны на анализе мод в пассивном резонаторе, где наличие активной области игнорировалось.

В данной работе нас интересует управление характеристиками WG мод с помощью небольшого круглого отверстия. Мы ожидаем, что отверстие может улучшить направленность WG мод и сохранить низкими пороги генерации, как это было впервые предложено в [10]. Нашим надежным вычислительным инструментом является набор граничных интегральных уравнений Мюллера (BIE) в двумерной модели микрополостного лазера, геометрия которого представлена на рисунке 1. Он рассматривается в рамках Lasing Eigenvalue Problem (LEP), предложенной для диэлектрических полостей с активным материалом без [11] и с элементами потерь [12]. В рамках LEP собственные значения модифицируются: каждое из них представляет собой пару вещественных чисел, частоту и порог генерации излучения. Используя метод дискретизации Галеркина с тригонометрическим базисом для BIE Мюллера [13] и учитывая наличие линии симметрии [14], мы получаем алгебраическую задачу на собственные значения. Сходимость этого численного метода относительно числа усечения

матрицы полностью обоснована математически, см. работу [15], детали алгоритма представлены в [16, 17].

Предварительные результаты, существенно более полно раскрытые в данной статье, были доложены на научной конференции и опубликованы в ее материалах [18].

1. Задача о собственных модах микрорезонатора с отверстием

Следуя [8], сформулируем задачу о собственных модах двумерного диэлектрического микрорезонатора круглой формы с отверстием. Пусть показатель преломления в области Ω_1 (см. рисунок 1), ограниченной контуром Γ_1 , известен и положителен, обозначим его $\nu_o > 0$. Пусть область резонатора Ω_2 является активной областью, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 . Показатель преломления в активной области равен $\nu_i = \alpha_i - i\gamma$, где $\alpha_i > 0$, $\gamma > 0$ – порог генерации лазерного излучения. Показатель преломления во внешней неограниченной области $\Omega_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2$, равен показателю преломления окружающей среды $\nu_o > 0$.

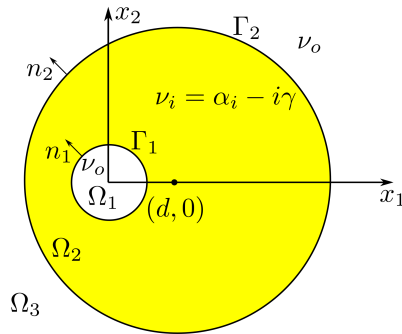


Рисунок 1. Геометрия двумерного диэлектрического микрорезонатора круглой формы с отверстием

Мы предполагаем, что границы Γ_1 и Γ_2 являются дважды непрерывно дифференцируемыми замкнутыми кривыми, не касающимися друг друга. Обозначим единичный вектор внешней нормали к границе Γ_i буквой n_i , $i = 1, 2$. Обозначим символом $\overline{U}$ пространство всех комплекснозначных функций, непрерывных в $\overline{\Omega_1}$, $\overline{\Omega_2}$ и $\overline{\Omega_3}$, и дважды непрерывно дифференцируемых в открытых областях Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 .

Пусть значение параметра $\gamma > 0$ зафиксировано. Ненулевую функцию $u \in U$ будем называть собственной функцией задачи, соответствующей собственному значению $k > 0$, если выполняются следующие соотношения: уравнения Гельмгольца,

$$(1) \quad \Delta u + k_o^2 u = 0, \quad x \in \Omega_1,$$

$$(2) \quad \Delta u + k_i^2 u = 0, \quad x \in \Omega_2,$$

$$(3) \quad \Delta u + k_o^2 u = 0, \quad x \in \Omega_3,$$

условия сопряжения,

$$(4) \quad u^- = u^+, \quad \eta_o \frac{\partial u^-}{\partial n_1} = \eta_i \frac{\partial u^+}{\partial n_1}, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$(5) \quad u^- = u^+, \quad \eta_i \frac{\partial u^-}{\partial n_2} = \eta_o \frac{\partial u^+}{\partial n_2}, \quad x \in \Gamma_2,$$

и условие излучения Зоммерфельда,

$$(6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - ik_o \right) u = o\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \right), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Здесь $k_j = k\nu_j$ – волновое число в соответствующей области, $\eta_j = \nu_j^{-2}$ в случае H -поляризации, и $\eta_j = 1$ в случае E -поляризации, $j = i, o$; $u^-(u^+)$ – предельные значения функции u изнутри (извне) контура Γ_i , $i = 1, 2$.

Следуя [19], с. 68, мы предполагаем, что предельные значения (правильной) нормальной производной

$$(7) \quad \frac{\partial u^\pm}{\partial n_i}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} (n_i(x), \text{grad } u(x \pm hn(x))), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

существуют равномерно по x на Γ_i , $i = 1, 2$.

Будем разыскивать нетривиальные решения задачи (1) – (6) в пространстве комплекснозначных функций U . При фиксированном значении параметра $\gamma > 0$, ненулевую функцию u , удовлетворяющую условию излучения Зоммерфельда, будем называть собственной функцией задачи о собственных модах двумерного диэлектрического микрорезонатора круглой формы с отверстием, отвечающей собственному значению $\kappa > 0$, если выполнены условия (1) – (5).

2. Система граничных интегральных уравнений Мюллера

Зафиксируем некоторое значение параметра $\gamma > 0$. Если u – собственная функция задачи (1) – (6), соответствующая собствен-

ному значению k то, как доказано в [16], справедливы следующие интегральные представления:

$$(8) \quad u = - \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial G_o(k; x, y)}{\partial n_1(y)} u^-(y) - G_o(k; x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_1(y)} \right) dl(y), \quad x \in \Omega_1,$$

$$(9) \quad u = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial G_i(k, \gamma; x, y)}{\partial n_1(y)} u^+(y) - G_i(k, \gamma; x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial n_1(y)} \right) dl(y) - \\ - \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial G_i(k, \gamma; x, y)}{\partial n_2(y)} u^-(y) - G_i(k, \gamma; x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial n_2(y)} \right) dl(y), \quad x \in \Omega_2,$$

$$(10) \quad u = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial G_o(k; x, y)}{\partial n_2(y)} u^+(y) - G_o(k; x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial n_2(y)} \right) dl(y), \quad x \in \Omega_3,$$

где $G_j(x, y) = (i/4)H_0^{(1)}(k_j|x - y|)$, $j = i, o$, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Используя условия сопряжения (4) и (5), определим функции

$$(11) \quad u_j = u^+ = u^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2,$$

$$(12) \quad v_1 = \frac{\eta_i + \eta_o}{2\eta_o} \frac{\partial u^+}{\partial n_1} = \frac{\eta_i + \eta_o}{2\eta_i} \frac{\partial u^-}{\partial n_1}, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$(13) \quad v_2 = \frac{\eta_i + \eta_o}{2\eta_i} \frac{\partial u^+}{\partial n_2} = \frac{\eta_i + \eta_o}{2\eta_o} \frac{\partial u^-}{\partial n_2}, \quad x \in \Gamma_2.$$

Сложим почленно предельные значения интегральных представлений (8)–(10) и их нормальных производных с обеих сторон от контуров Γ_1 , Γ_2 , используя при этом хорошо известные свойства потенциалов простого и двойного слоя (см., напр., [19], с. 47), получим однородную систему граничных интегральных уравнений Мюллера относительно функций u и v :

$$(14) \quad u_1(x) + \int_{\Gamma_1} u_1(y) K_1^{1,1}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_1} v_1(y) K_1^{1,2}(x, y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_2(y) K_1^{1,3}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_2} v_2(y) K_1^{1,4}(x, y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma_1$$

$$(15) \quad v_1(x) + \int_{\Gamma_1} u_1(y) K_1^{2,1}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_1} v_1(y) K_1^{2,2}(x, y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_2(y) K_1^{2,3}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_2} v_2(y) K_1^{2,4}(x, y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$(16) \quad u_2(x) + \int_{\Gamma_1} u_1(y) K_2^{3,1}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_1} v_1(y) K_2^{3,2}(x, y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_2(y) K_2^{3,3}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_2} v_2(y) K_2^{3,4}(x, y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$(17) \quad v_2(x) + \int_{\Gamma_1} u_1(y) K_2^{4,1}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_1} v_1(y) K_2^{4,2}(x, y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma_2} u_2(y) K_2^{4,3}(x, y) dl(y) + \int_{\Gamma_2} v_2(y) K_2^{4,4}(x, y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

где ядра интегральных уравнений имеют вид

$$(18) \quad K_1^{1,1} = \frac{\partial G_o(x, y)}{\partial n_1(y)} - \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_1(y)}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_1,$$

$$(19) \quad K_1^{1,2} = \frac{2\eta_o}{\eta_i + \eta_o} G_i(x, y) - \frac{2\eta_i}{\eta_i + \eta_o} G_o(x, y), \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_1,$$

$$(20) \quad K_1^{1,3} = \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_2(y)}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2,$$

$$(21) \quad K_1^{1,4} = -\frac{2\eta_o G_i(x, y)}{\eta_o + \eta_i}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2,$$

$$(22) \quad K_1^{2,1} = \frac{\partial^2 G_o(x, y)}{\partial n_1(x) \partial n_1(y)} - \frac{\partial^2 G_i(x, y)}{\partial n_1(x) \partial n_1(y)}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_1,$$

$$(23) \quad K_1^{2,2} = \frac{2\eta_o}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_1(x)} - \frac{2\eta_i}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_o(x, y)}{\partial n_1(x)}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_1,$$

$$(24) \quad K_1^{2,3} = \frac{\partial^2 G_i(x, y)}{\partial n_1(x) \partial n_2(y)}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2,$$

$$(25) \quad K_1^{2,4} = -\frac{2\eta_o}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_1(x)}, \quad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2,$$

$$(26) \quad K_2^{3,1} = -\frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_1(y)}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_1,$$

$$(27) \quad K_2^{3,2} = \frac{2\eta_o G_i(x, y)}{\eta_o + \eta_i}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_1,$$

$$(28) \quad K_2^{3,3} = \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_2(y)} - \frac{\partial G_o(x, y)}{\partial n_2(y)}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_2,$$

$$(29) \quad K_2^{3,4} = \frac{2\eta_i}{\eta_i + \eta_o} G_o(x, y) - \frac{2\eta_o}{\eta_i + \eta_o} G_i(x, y), \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_2,$$

$$(30) \quad K_2^{4,1} = -\frac{\partial^2 G_i(x, y)}{\partial n_1(y) \partial n_2(x)}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_1,$$

$$(31) \quad K_2^{4,2} = \frac{2\eta_o}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_2(x)}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_1,$$

$$(32) \quad K_2^{4,3} = \frac{\partial^2 G_i(x, y)}{\partial n_2(x) \partial n_2(y)} - \frac{\partial^2 G_o(x, y)}{\partial n_2(x) \partial n_2(y)}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_2,$$

$$(33) \quad K_2^{4,4} = \frac{2\eta_i}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_o(x, y)}{\partial n_2(x)} - \frac{2\eta_o}{\eta_o + \eta_i} \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_2(x)}, \quad x \in \Gamma_2, y \in \Gamma_2.$$

3. Метод Галеркина

Пусть контуры Γ_1 и Γ_2 имеют формы окружностей радиусов a_1 и a_2 , соответственно. Получим явные выражения для матричных элементов метода Галеркина. Выполним в (14)–(17) замены

$$w_1(t) = a_1 u_1(t), \quad w_2(t) = a_1 v_1(t), \quad w_3(t) = a_2 u_2(t), \quad w_4(t) = a_2 v_2(t).$$

Будем разыскивать приближения к функциям $w_k(t)$ в виде отрезков рядов Фурье вида

$$(34) \quad w_k(t) = \sum_{m=\mu}^n w_m^{(k)} \varphi_m(t), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

где $\mu = 0$, если в качестве базисных функций используются функции $\varphi_m(t) = \cos(mt)$, $m = 0, \dots, n$, и $\mu = 1$, если в качестве базисных функций используются функции $\varphi_m(t) = \sin(mt)$, $m = 1, \dots, n$. Скалярное произведение определим, как

$$(35) \quad (u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \overline{v(\tau)} d\tau, \quad u, v \in L_2.$$

Применяя метод Галеркина, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(36) \quad \frac{1}{a_1} w_l^{(1)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(1,1)} w_m^{(1)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(1,2)} w_m^{(2)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(1,3)} w_m^{(3)} + \\ + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(1,4)} w_m^{(4)} = 0, \quad l = \mu, \dots, n,$$

$$(37) \quad \frac{1}{a_1} w_l^{(2)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(2,1)} w_m^{(1)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(2,2)} w_m^{(2)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(2,3)} w_m^{(3)} + \\ + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(2,4)} w_m^{(4)} = 0, \quad l = \mu, \dots, n,$$

$$(38) \quad \frac{1}{a_2} w_l^{(3)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(3,1)} w_m^{(1)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(3,2)} w_m^{(2)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(3,3)} w_m^{(3)} + \\ + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(3,4)} w_m^{(4)} = 0, \quad l = \mu, \dots, n,$$

$$(39) \quad \frac{1}{a_2} w_l^{(4)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(4,1)} w_m^{(1)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(4,2)} w_m^{(2)} + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(4,3)} w_m^{(3)} + \\ + \sum_{m=\mu}^n h_{lm}^{(4,4)} w_m^{(4)} = 0, \quad l = \mu, \dots, n.$$

Матрица метода Галеркина является блочной матрицей второго порядка. Элементы левого верхнего блока имеют вид

$$h_{lm}^{(i,j)} = \frac{\sigma_l}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_1^{i,j}(t_1^1, \tau_1^1) \varphi_m(\tau_1^1) \overline{\varphi_l(t_1^1)} d\tau_1^1 dt_1^1, \quad m, l = \mu, \dots, n,$$

где $i, j = 1, 2$.

Элементы правого верхнего блока имеют вид

$$h_{lm}^{(i,j)} = \frac{\sigma_l}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_1^{i,j}(t_2^1, \tau_2^1) \varphi_m(\tau_2^1) \overline{\varphi_l(t_1^1)} d\tau_2^1 dt_1^1, \quad m, l = \mu, \dots, n,$$

где $i = 1, 2, j = 3, 4$.

Элементы левого нижнего блока имеют вид

$$h_{lm}^{(i,j)} = \frac{\sigma_l}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_2^{i,j}(t_2^1, \tau_1^1) \varphi_m(\tau_1^1) \overline{\varphi_l(t_2^1)} d\tau_1^1 dt_2^1, \quad m, l = \mu, \dots, n,$$

где $i = 3, 4, j = 1, 2$.

Элементы правого нижнего блока имеют вид

$$h_{lm}^{(i,j)} = \frac{\sigma_l}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_2^{i,j}(t_2^2, \tau_2^2) \varphi_m(\tau_2^2) \overline{\varphi_l(t_2^2)} d\tau_2^2 dt_2^2, \quad m, l = \mu, \dots, n,$$

где $i, j = 3, 4$. Здесь $\sigma_l = 1/2$, если $l = 0$ и $\sigma_l = 1$, если $l \neq 0$.

Пусть расстояние между центрами окружностей Γ_1 и Γ_2 равно d , радиусы окружностей равны a_1 и a_2 , соответственно. Тогда матричные элементы метода Галеркина, согласно [20], имеют вид:

$$\begin{aligned} h_{ll}^{(1,1)} &= \frac{i\pi}{2} k_o J_l(k_o a_1) H_l^{(1)'}(k_o a_1) - \frac{i\pi}{2} k_i J_l(k_i a_1) H_l^{(1)'}(k_i a_1), \\ h_{ll}^{(1,2)} &= \frac{i\pi\eta_o}{\eta_i + \eta_o} J_l(k_i a_1) H_l^{(1)}(k_i a_1) - \frac{i\pi\eta_i}{\eta_i + \eta_o} J_l(k_o a_1) H_l^{(1)}(k_o a_1), \\ h_{lm}^{(1,3)} &= \frac{i\pi\sigma_l}{2} k_i H_m^{(1)'}(k_i a_2) (J_{m-l}(k_i r) J_l(k_i a_1) (-1)^{(m-l)} + \\ &\quad + J_{m+l}(k_i r) J_{-l}(k_i a_1) (-1)^{(m+l+\mu)}), \\ h_{lm}^{(1,4)} &= -\frac{i\pi\eta_o\sigma_l}{\eta_o + \eta_i} H_m^{(1)}(k_i a_2) (J_{m-l}(k_i r) J_l(k_i a_1) (-1)^{(m-l)} + \\ &\quad + J_{m+l}(k_i r) J_{-l}(k_i a_1) (-1)^{(m+l+\mu)}), \\ h_{ll}^{(2,1)} &= \frac{i\pi k_o^2}{2} J_l'(k_o a_1) H_l^{(1)'}(k_o a_1) - \frac{i\pi k_i^2}{2} J_l'(k_i a_1) H_l^{(1)'}(k_i a_1), \\ h_{ll}^{(2,2)} &= \frac{1}{a_1} + \frac{i\pi\eta_o}{\eta_i + \eta_o} k_i J_l(k_i a_1) H_l^{(1)'}(k_i a_1) \\ &\quad - \frac{i\pi\eta_i}{\eta_i + \eta_o} k_o J_l'(k_o a_1) H_l^{(1)}(k_o a_1), \\ h_{lm}^{(2,3)} &= \frac{i\pi\sigma_l}{2} k_i^2 H_m^{(1)'}(k_i a_2) (J_{m-l}(k_i r) J_l'(k_i a_1) (-1)^{(m-l)} + \\ &\quad + J_{m+l}(k_i r) J_{-l}'(k_i a_1) (-1)^{(m+l+\mu)}), \\ h_{lm}^{(2,4)} &= -\frac{i\pi\eta_o\sigma_l}{\eta_i + \eta_o} k_i H_m^{(1)}(k_i a_2) (J_{m-l}(k_i r) J_l'(k_i a_1) (-1)^{(m-l)} + \\ &\quad + J_{m+l}(k_i r) J_{-l}'(k_i a_1) (-1)^{(m+l+\mu)}), \\ h_{lm}^{(3,1)} &= -\frac{i\pi\sigma_l}{2} k_i J_m'(k_i a_1) (H_l(k_i a_2) J_{m-l}(k_i r) \\ &\quad + (-1)^\mu H_{-l}(k_i a_2) J_{m+l}(k_i r)), \\ h_{lm}^{(3,2)} &= \frac{i\pi\eta_o\sigma_l}{\eta_i + \eta_o} J_m(k_i a_1) (H_l(k_i a_2) J_{m-l}(k_i r) \\ &\quad + (-1)^\mu H_{-l}(k_i a_2) J_{m+l}(k_i r)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{ll}^{(3,3)} &= \frac{i\pi}{2} k_i J_l(k_i a_2) H_l^{(1)'}(k_i a_2) - \frac{i\pi}{2} k_o J_l(k_o a_2) H_l^{(1)'}(k_o a_2), \\
h_{ll}^{(3,4)} &= \frac{i\pi\eta_i}{\eta_i + \eta_o} J_l(k_o a_2) H_l^{(1)}(k_o a_2) - \frac{i\pi\eta_o}{\eta_i + \eta_o} J_l(k_i a_2) H_l^{(1)}(k_i a_2), \\
h_{lm}^{(4,1)} &= -\frac{i\pi\sigma_l}{2} k_i^2 J_m'(k_i a_1) (H_l^{(1)'}(k_i a_2) J_{m-l}(k_i r) + \\
&\quad + (-1)^\mu H_{-l}^{(1)'}(k_i a_2) J_{m+l}(k_i r)), \\
h_{lm}^{(4,2)} &= \frac{i\pi\eta_o\sigma_l}{\eta_i + \eta_o} k_i J_m(k_i a_1) (H_l^{(1)'}(k_i a_2) J_{m-l}(k_i r) + \\
&\quad + (-1)^\mu H_{-l}^{(1)'}(k_i a_2) J_{m+l}(k_i r)), \\
h_{ll}^{(4,3)} &= \frac{i\pi}{2} k_i^2 J_l'(k_i a_2) H_l^{(1)'}(k_i a_2) - \frac{i\pi}{2} k_o^2 J_l'(k_o a_2) H_l^{(1)'}(k_o a_2), \\
h_{ll}^{(4,4)} &= \frac{1}{a_2} + \frac{i\pi\eta_i}{\eta_i + \eta_o} k_o J_l(k_o a_2) H_l^{(1)'}(k_o a_2) - \\
&\quad - \frac{i\pi\eta_o}{\eta_i + \eta_o} k_i J_l'(k_i a_2) H_l^{(1)}(k_i a_2),
\end{aligned}$$

где $m, l = \mu, \dots, n$, $\sigma_l = 1/2$, если $l = 0$, и $\sigma_l = 1$, если $l \neq 0$.

4. Численные результаты

Наша классификация мод, $(m, n, e/o)$, связана с симметрией (четной, e) и антисимметрией (нечетной, o) поля мод в однородном круглом диэлектрическом резонаторе относительно оси x . В этой классификации мы подсчитываем количество пятен поля $2m$ и n вдоль азимутального и радиального направлений, соответственно. Каждое собственное значение непрерывно зависит от параметров. То есть, на плоскости (κ, γ) , где κ – нормированное (по радиусу микродиска) волновое число, а γ – порог генерации излучения, зависимости пар собственных значений от параметра d (расстояние между центрами резонатора и отверстия, нормированное по радиусу резонатора) имеют вид непрерывных кривых или ветвей. Поэтому в случае произвольного d мы продолжаем обозначать каждую моду теми же индексами, что и в предельном случае $d = 0$. Заметим, что при больших значениях d эти обозначения могут стать менее очевидными.

В наших расчетах мы исследуем поведение Н- и Е-поляризованных квази-WG мод, для которых нормированные частоты при $d = 0$ отличаются в 3-м разряде для случая Н-поляризации, и во 2-м разряде для случая Е-поляризации. А именно, в случае Н-поляризации мы имеем следующие начальные точки при $d = 0$: $\kappa = 9.9924, \gamma = 6.07232 \times 10^{-7}$ и $\kappa = 9.9948, \gamma = 2.01306 \times 10^{-11}$ для дважды вырожденных мод $(17, 2)$ и $(21, 1)$, соответственно. В случае Е-поляризации при $d = 0$: $\kappa = 9.6112, \gamma = 5.01117 \times 10^{-7}$ и $\kappa = 9.6239, \gamma = 2.13596 \times 10^{-11}$ для тех же мод $(17, 2)$ и $(21, 1)$, соответственно. Радиус отверстия, нормированный по радиусу микродиска, зафиксирован $r = 0.03$. Мы заинтересованы в получении максимальной направленности излучения D , сопровождаемой относительно небольшим значением порога генерации γ (рисунок 2).

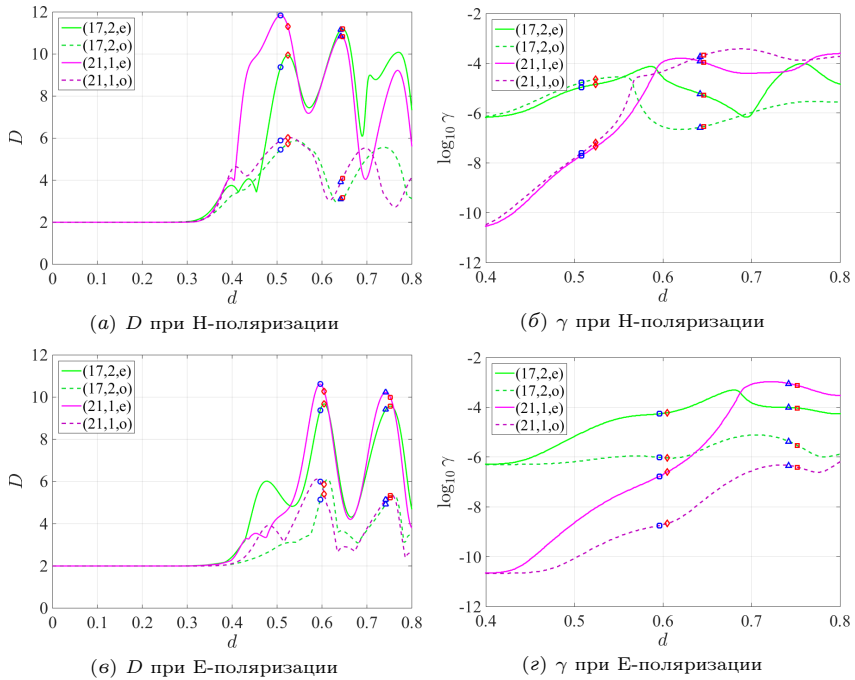
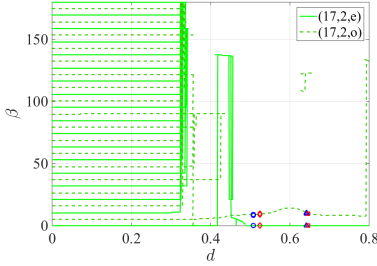
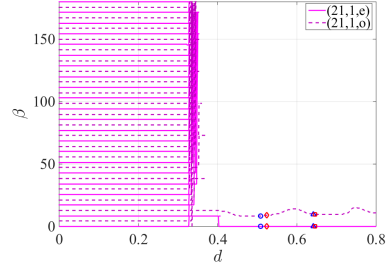


Рисунок 2. Зависимости направленности D и порога генерации излучения γ от параметра d

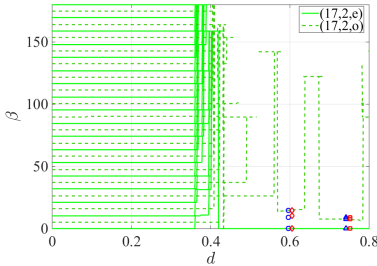
Определение D дано в [13, уравнение (46)]. Рисунок 3 помогает контролировать направление главного лепестка на диаграммах поля в дальней зоне (см. правые панели на рисунках 4 и 5).



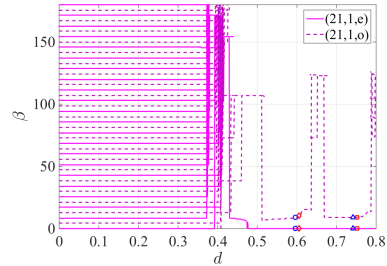
(а) для моды (17, 2) при Н-поляризации



(б) для моды (21, 1) при Н-поляризации



(в) для моды (17, 2) при Е-поляризации



(г) для моды (21, 1) при Е-поляризации

РИСУНОК 3. Зависимости угла β максимальной направленности от d

Синие маркеры на рисунках 2 и 3 соответствуют первому и второму максимумам направленности моды (21, 1, e), красные маркеры соответствуют аналогичным максимумам моды (17, 2, e). Для детального анализа мы выбираем первые максимумы D моды (21, 1, e) и рассматриваем рисунок 4 в случае Н-поляризации и рисунок 5 в случае Е-поляризации. В случае Н-поляризации при $d = 0.51$ мы имеем наибольшую направленность для моды (21, 1, e), сопровождаемой относительно небольшим порогом γ . Порог этой моды самый низкий среди всех четырех исследуемых мод, а их нормированные частоты отличаются в третьем знаке. В случае Е-поляризации при $d = 0.599$ нормированные частоты исследуемых мод отличаются во втором знаке,

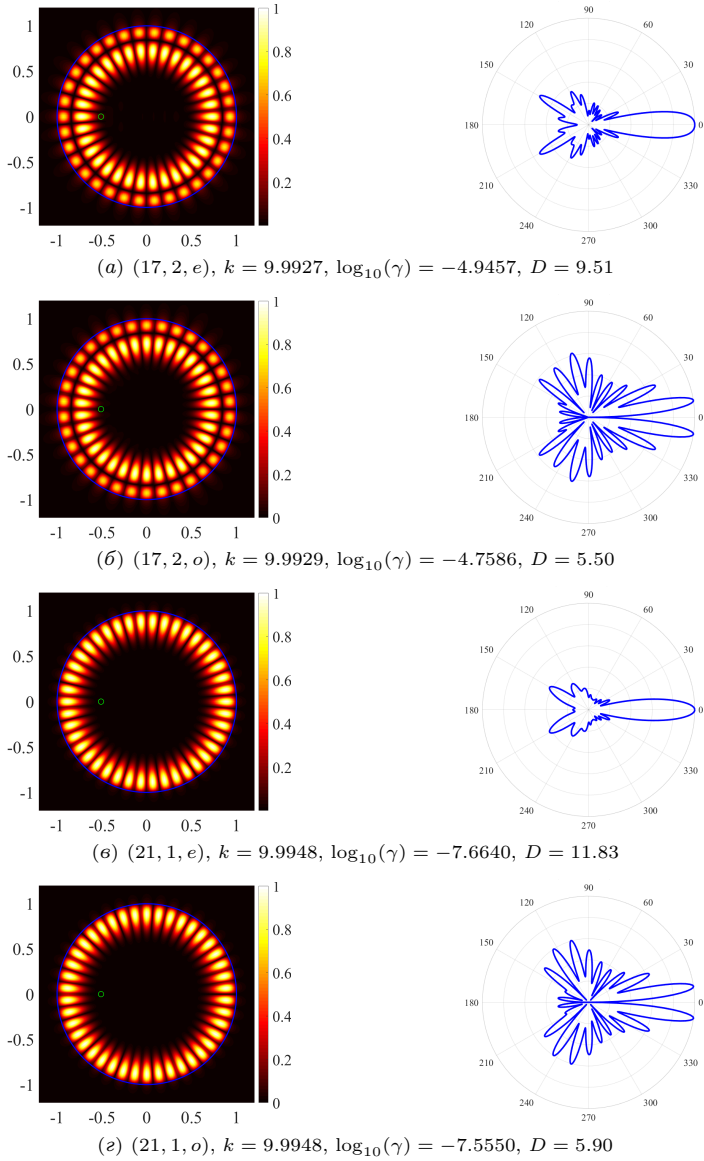


РИСУНОК 4. Диаграммы поля в ближней и дальней зонах при $d = 0.51$ в случае Н-поляризации

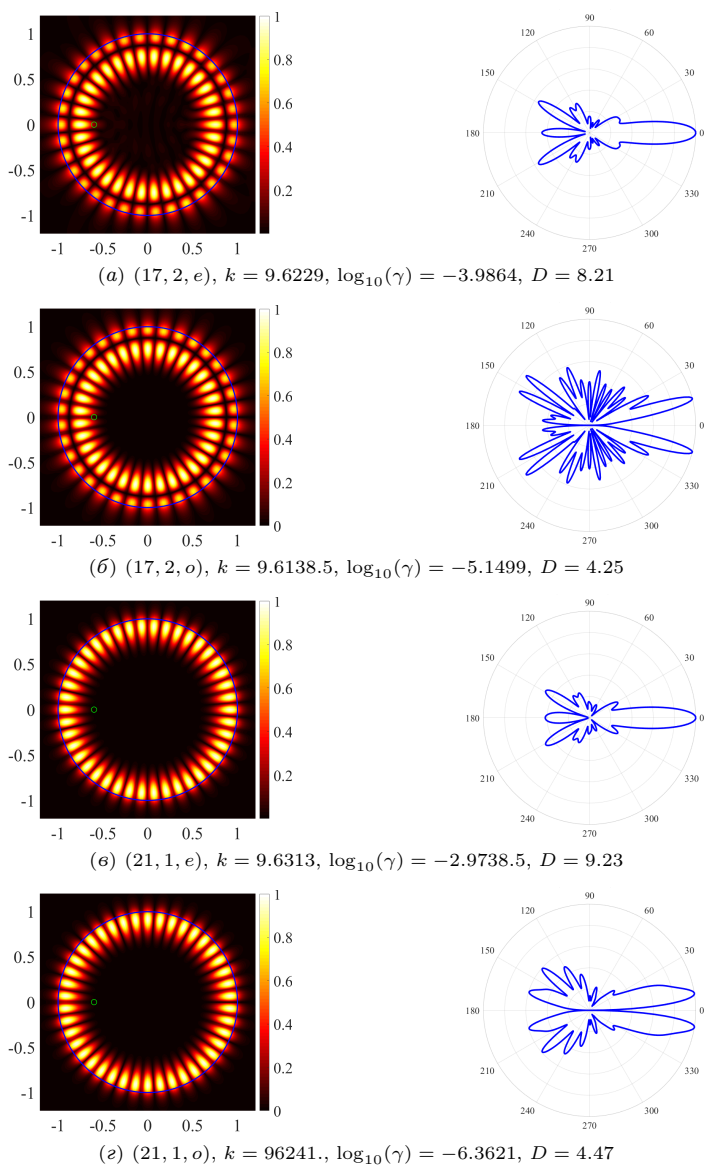


Рисунок 5. Диаграммы поля в ближней и дальней зонах при $d = 0.599$ в случае Е-поляризации

а наибольшую направленность имеет мода $(21, 1, e)$, однако порог моды $(21, 1, o)$ ниже порога моды $(21, 1, e)$.

Как в случае Н-поляризации при $d = 0.51$, так и в случае Е-поляризации при $d = 0.599$ мы получаем квазиоднонаправленное излучение для каждой из мод четного типа. Моды нечетного типа имеют два одинаково интенсивных лепестка при меньшем значении коэффициента направленности D . Увеличивая d , мы получаем графики $\kappa(d)$ и $\gamma(d)$, показанные на рисунке 6. Правые панели для $\gamma(d)$

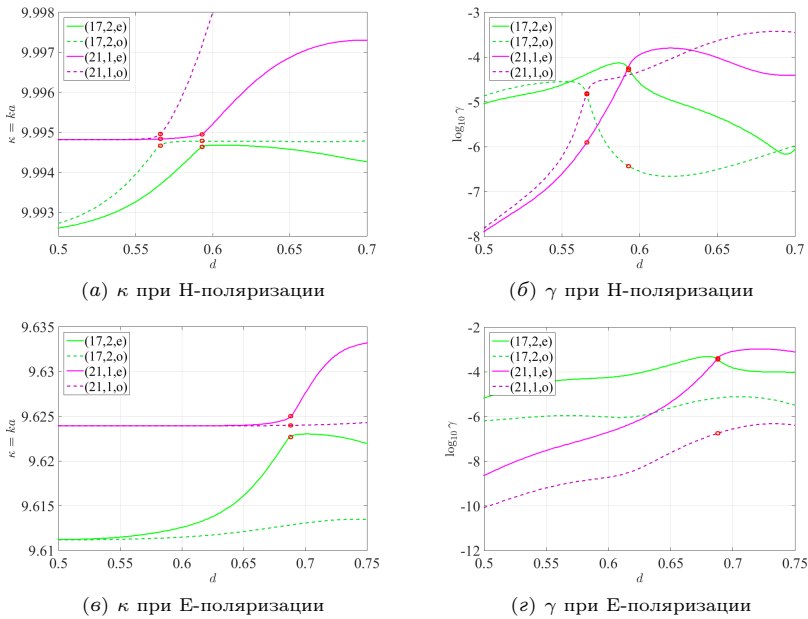


Рисунок 6. Зависимости нормированной частоты κ и порога генерации излучения γ от смещения отверстия d

представляет собой увеличение участков $[0.5, 0.7]$ и $[0.5, 0.75]$ правых панелей рисунка 2, для Н- и Е-поляризаций, соответственно. Обратите внимание, что значения $d = 0.51$ и $d = 0.599$ лежат перед эффектами «avoided resonance crossing» для соответствующих поляризаций.

Когда частоты мод $(17, 2, e)$ и $(17, 2, o)$ начинают расти и приближаются к частотам мод $(21, 1, e)$ и $(21, 1, o)$, соответственно, на

рисунке 6 мы наблюдаем эффект «avoided resonance crossing». Точнее, частоты мод избегают пересечения, однако значения порогов генерации γ все же пересекаются на рисунке 6).

Рассмотрим подробнее точки, в которых частоты избегают пересечения. Для Н-поляризации $d = 0.566$ и $d = 0.592$, а для Е-поляризации $d = 0.688$ (см. рисунки 6).

Для каждого двухкомпонентного собственного значения (κ, γ) мы имеем две ортогональные собственные моды (нечетную и четную). В [21] было высказано предположение, что «псевдорешетчатые моды» появляются, если собственные значения двух или более мод, принадлежащих к разным азимутальным семействам, приближаются друг к другу (по частоте) на плоскости $(\text{Re } \kappa, \text{Im } \kappa)$. Того же можно ожидать и в LEP-анализе, на плоскости (κ, γ) .

Известно также, что когда два собственных значения близки друг к другу и наблюдается эффект «avoided resonance crossing», происходит гибридизация полей мод [22]. Действительно, для Н-поляризации в точке $d = 0.566$ (см. рисунок 7а) происходит гибридизация полей мод $(17, 2, o)$ и $(21, 1, o)$, в точке $d = 0.592$ (см. рисунок 7б – гибридизация полей мод $(17, 2, e)$ и $(21, 1, e)$).

Аналогично, для Е-поляризации в точке $d = 0.688$ (см. рисунок 7в) происходит гибридизация полей мод $(17, 2, e)$ и $(21, 1, e)$. При дальнейшем исследовании мы наблюдаем, что диаграммы поля в ближней зоне пар квазивыврожденных мод в области сильной связи (контролируемой параметром смещения дырки d) приобретают формы, приблизительно равные сумме и разности полей двух рассматриваемых мод.

Наша цель – добиться квазиоднаправленного излучения, однако мы видим, что в результате гибридизации исследуемые моды приобретают новые свойства. Мы называем их PJ усиленными WG модами, из-за специфических паттернов диаграмм поля в ближней зоне.

А именно, яркие пятна поля не обходят возмущенную область (дырку), а концентрируются вокруг нее. Природа этого явления, которое мы наблюдаем для четных мод, имеющих максимумы поля у дырки, может быть объяснена с помощью PJ эффекта. На рисунках 6а и 6б мы видим, что пороги мод $(17, 2, o)$ и $(21, 1, o)$ пересекаются при $d = 0.566$. Отметим, что мода $(21, 1, e)$ не участвует в гибридизации, хотя ее частота близка к частотам гибридизируемых мод, поскольку она

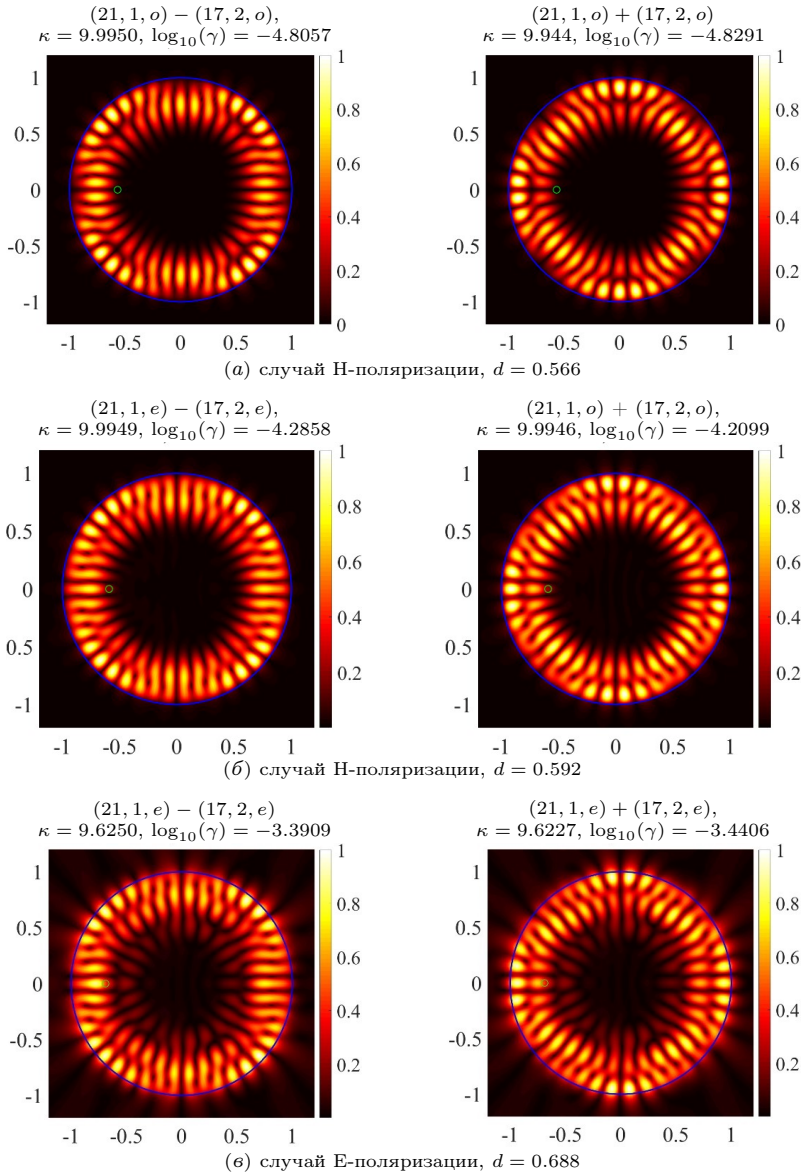


РИСУНОК 7. Поле в ближней зоне гибридизированных мод

принадлежит к ортогональному классу симметрии. Аналогично, для Е-поляризации при $d = 0.688$ (см. рисунки 6в и 6г) пересекаются пороги мод $(17, 2, e)$ и $(21, 1, e)$, а мода $(21, 1, o)$ не участвует в гибридизации. Гибридизирующиеся моды превращаются в сумму и разность двух квази-WG мод.

В случае Н-поляризации в первой точке $d = 0.566$ нечетные моды начинают трансформироваться в моды ромбовидной и треугольной формы (см. рисунок 7а), во второй точке $d = 0.592$ четные моды начинают трансформироваться в моды квадратной формы (см. рисунок 7б). В случае Е-поляризации в точке $d = 0.688$ четные моды начинают трансформироваться в моды шестиугольной формы (см. рисунок 7в). На рисунках 7б и 7в наблюдается проникновение поля во внутреннюю область, максимумы поля не обходят отверстие. Во всех трех точках, где частоты избегают пересечения, порог одной из мод резко падает, а другой растет (см. рисунок 6).

В точках, где частоты избегают пересечения, наблюдается обмен полями между соответствующими модами. После обмена полями для Н-поляризации РЈ усиленные WG моды $(17, 2, o)$ и $(21, 1, o)$ становятся ромбовидной (см. рисунок 8) и треугольной формы (см. рисунок 8г). Около второй точки для Н-поляризации мы наблюдаем обмен полями для четных мод $(17, 2, e)$ и $(21, 1, e)$. Аналогично, для Е-поляризации около точки $d = 0.688$ наблюдается обмен полями между четными модами $(17, 2, e)$ и $(21, 1, e)$. После обмена полями моды $(17, 2, e)$ и $(21, 1, e)$ становятся ромбовидной (см. рисунок 9а) и шестиугольной формы (см. рисунок 9в). Четные моды имеют более высокие значения направленности, кроме того, их излучение квазиоднонаправленное, что подтверждается нормализованными диаграммами поля в дальней зоне.

Исследуем собственные значения и направленность излучения после обмена полями мод (см. рисунки 8а–8г для Н-поляризации и рисунки 9а–9г для Е-поляризации). В результате нашего исследования для Н-поляризации можно сделать вывод, что четная мода $(17, 2, e)$ (см. рисунок 8а) имеет максимальную направленность при минимальном значении порога генерации в точке $d = 0.694$. В случае Е-поляризации максимальную направленность в точке $d = 0.72$ имеет четная мода $(21, 1, e)$ (см. рисунок 9в), однако порог моды $(21, 1, o)$ (см. рисунок 9г) меньше порога моды $(21, 1, e)$. Высокая направленность моды $(21, 1, e)$ обусловлена обратным эффектом РЈ.

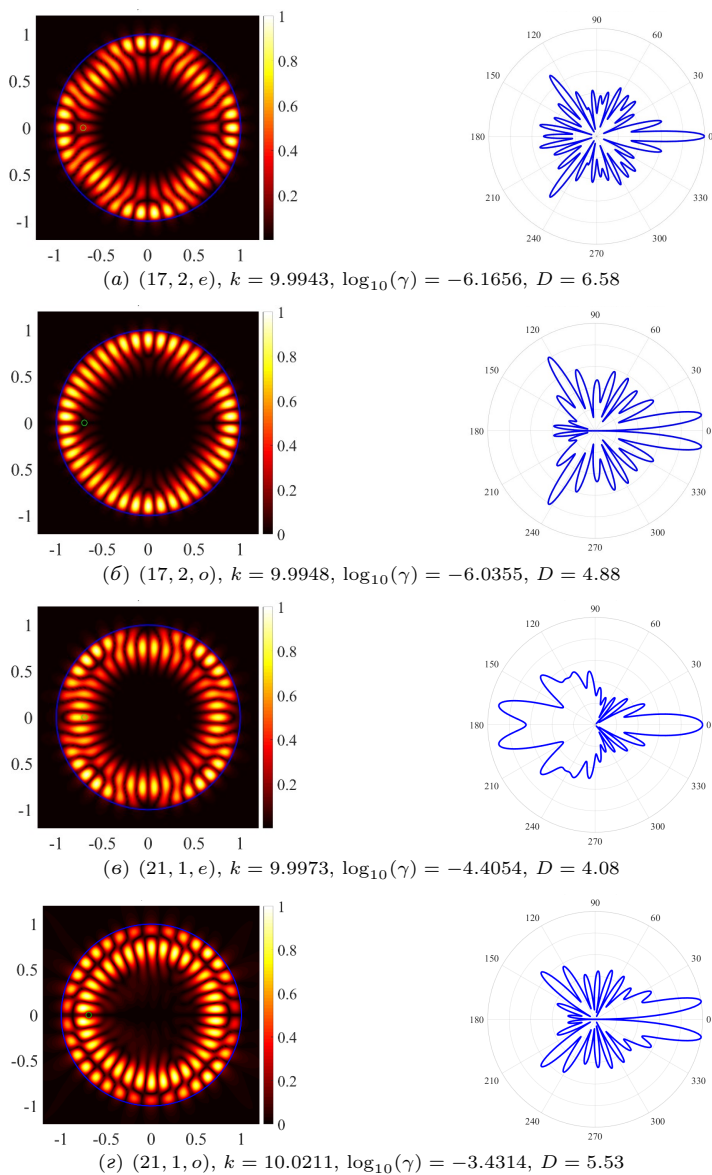


РИСУНОК 8. Диаграммы поля в ближней и дальней зонах при $d = 0.694$ в случае Н-поляризации

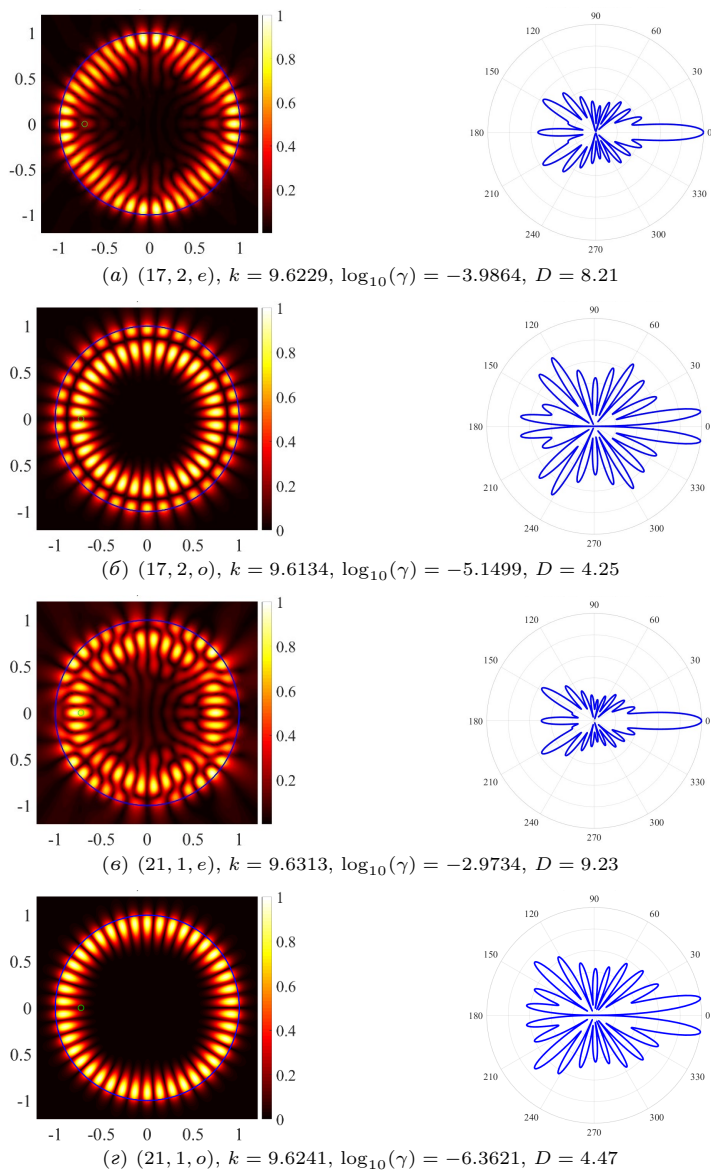


РИСУНОК 9. Диаграммы поля в ближней и дальней зонах при $d = 0.72$ в случае Е-поляризации

Заключение

Результаты наших численных экспериментов, выполненных с помощью тщательно протестированного программного комплекса, подтверждают предположения [21, 22] о том, что можно управлять характеристиками порогового усиления и направленности микродискового лазера с помощью небольшого отверстия. А именно, мы обнаружили, что небольшое отверстие, просверленное во внутренней фокальной области микродискового лазера с высоким показателем преломления, приводит к усилению направленности излучения WG мод, при этом порог генерации излучения остается небольшим. В отличие от [21, 22], этот вывод основан на классической полноволновой электромагнитной теории и не использует биллиардную теорию или концепцию волнового хаоса. Таким образом, он обеспечивает простое и ясное инженерное правило для размещения отверстий.

Список литературы

- [1] Heifetz A., Kong S.-C., Sahakian A. V., Taflove A., Backman V. *Photonic nanojets* // Journal of Computational and Theoretical Nanoscience.– 2009.– Vol. **6**.– No. 9.– pp. 1979–1992. doi ↑114, 115
- [2] Luk'yanchuk B. S., Paniagua-Dominguez R., Minin I., Minin O., Wang Z. *Refractive index less than two: photonic nanojets yesterday, today and tomorrow* // Optical Materials Express.– 2017.– Vol. **7**.– No. 6.– pp. 1820–1847. doi ↑114, 115
- [3] Bekefi G., Farnell G. W. *A homogeneous dielectric sphere as a microwave lens* // Canadian Journal of Physics.– 1956.– Vol. **34**.– No. 8.– pp. 790–803. doi ↑114, 115
- [4] Boriskin A. V., Nosich A. I. *Whispering-gallery and Luneburg-lens effects in a beam-fed circularly layered dielectric cylinder* // IEEE Transactions on Antennas and Propagation.– 2002.– Vol. **50**.– No. 9.– pp. 1245–1249. doi ↑114
- [5] Dukhopelnykov S. V., Lucido M., Sauleau R., Nosich A. I. *Circular dielectric rod with conformal strip of graphene as tunable terahertz antenna: interplay of inverse electromagnetic jet, whispering gallery and plasmon effects* // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics.– 2021.– Vol. **27**.– No. 1.– 4600908. doi ↑114
- [6] He L., Ozdemir S. K., Yang L. *Whispering gallery microcavity lasers* // Laser and Photonics Reviews.– 2013.– Vol. **7**.– No. 1.– pp. 60–82. doi ↑115
- [7] Wiersig J., Hentschel M. *Combining directional light output and ultralow loss in deformed microdisks* // Physical Review Letters.– 2008.– Vol. **100**.– No. 3.– 033901. doi ↑115

- [8] Smotrova E. I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A. I. *Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser* // Journal of the Optical Society of America B.– 2013.– Vol. **30**.– No. 7.– pp. 1732–1742.  [↑](#)_{115, 116}
- [9] Hentschel M., Kwon T.-Y. *Designing and understanding directional emission from spiral microlasers* // Optics Letters.– 2009.– Vol. **34**.– No. 2.– pp. 163–165.  [↑](#)₁₁₅
- [10] Zhang S., Li Y., Hu P., Li A., Zhang Y., Du W., Du M., Li Q., Yun F. *Unidirectional emission of GaN-based eccentric microring laser with low threshold* // Optics Express.– 2020.– Vol. **28**.– No. 5.– pp. 6443–6451.  [↑](#)₁₁₅
- [11] Smotrova E. I., Byelobrov V. O., Benson T. M., J. Čtyroký, Sauleau R., Nosich A. I. *Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions* // IEEE Journal of Quantum Electronics.– 2011.– Vol. **47**.– No. 1.– pp. 20–30.  [↑](#)₁₁₅
- [12] Shapoval O. V., Kobayashi K., Nosich A. I. *Electromagnetic engineering of a single-mode nanolaser on a metal plasmonic strip placed into a circular quantum wire* // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics.– 2017.– Vol. **23**.– No. 6.– 1501609.  [↑](#)₁₁₅
- [13] Oktyabrskaya A. O., Repina A. I., Spiridonov A. O., Karchevskii E. M., Nosich A. I. *Numerical modeling of in-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method* // Optics Communications.– 2020.– Vol. **476**.– 126311.  [↑](#)_{115, 125}
- [14] Spiridonov A. O., Karchevskii E. M., Nosich A. I. *Symmetry accounting in the integral-equation analysis of lasing eigenvalue problems for two-dimensional optical microcavities* // Journal of the Optical Society of America B.– 2017.– Vol. **34**.– No. 7.– pp. 1435–1443.  [↑](#)₁₁₅
- [15] Репина А. И. *Сходимость метода Галеркина решения нелинейной задачи о собственных модах микродисковых лазеров*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.– т. **163**.– №1, Казань: Изд-во Казанского ун-та.– 2021.– с. 5–20.  [↑](#)₁₁₆
- [16] Spiridonov A. O., Oktyabrskaya A., Karchevskii E. M., Nosich A. I. *Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for 2-D optical microcavities* // SIAM Journal on Applied Mathematics.– 2020.– Vol. **80**.– No. 4.– pp. 1977–1988.  [↑](#)_{116, 118}
- [17] Spiridonov A. O., Repina A. I., Ketov I. V., Solov'ev S. I., Karchevskii E. M. *Exponentially convergent Galerkin method for numerical modeling of lasing in microcavities with piercing holes* // Axioms.– Vol. **10**.– pp. 184.  [↑](#)₁₁₆

- [18] Repina A. I., Ketov I. V., Oktyabrskaya A. O., Spiridonov A. O., Karchevskii E. M. *Enhanced directionality of emission of the on-threshold modes of a high refractive index microdisk laser due to a small piercing hole* // *Proceedings of the 2021 IEEE 3rd Ukrainian Conference on Electrical and Computer Engineering, UKRCON 2021* (5–8 July, 2021, Lviv, Ukraine). – pp. 96–99.  [↑116](#)
- [19] Kress R., Colton D. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Classics in Applied Mathematics. – New York: SIAM. – 2013. – ISBN 978-1-611973-15-0. – 290 pp.   [↑117, 118](#)
- [20] Repina A. I., Oktyabrskaya A. O., Spiridonov A. O., Ketov I. V., Karchevskii E. M. *Trade-off between threshold gain and directionality of emission for modes of two-dimensional eccentric microring lasers analysed using lasing eigenvalue problem* // *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. – 2021. – Vol. **15**. – No. 10. – pp. 1133–1146.  [↑122](#)
- [21] Wiersig J. *Formation of long-lived, scarlike modes near avoided resonance crossings in optical microcavities* // *Physical Review Letters*. – 2007. – Vol. **97**. – No. 25. – 253901. – 4 pp.  [↑129, 134](#)
- [22] Wiersig J., Hentschel M. *Unidirectional light emission from high-Q modes in optical microcavities* // *Physical Review A*. – 2005. – Vol. **73**. – No. 3. – 031802(R).  [↑129, 134](#)

Поступила в редакцию 28.06.2022;
 одобрена после рецензирования 12.08.2022;
 принята к публикации 10.09.2022.

Рекомендовал к публикации

д.ф.-м.н. А. М. Елизаров

Информация об авторах:



Илья Владимирович Кетов

Лаборант-исследователь НИЛ Высокопроизводительные вычисления, медицинская кибернетика и машинное зрение, г. Казань. Область научных интересов: прикладная математика, компьютерное моделирование, численный анализ, математическое моделирование лазеров на микро-резонаторах.



0000-0001-7985-8816

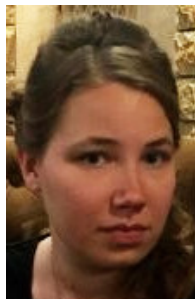
e-mail: ivlketov@gmail.com

**Александр Олегович Спиридонов**

Канд. физ.-мат. наук., ст. науч. сотр. НИЛ Высокопроизводительные вычисления, медицинская кибернетика и машинное зрение, г. Казань. Область научных интересов: прикладная математика, компьютерное моделирование, численный анализ, математическое моделирование лазеров на микрорезонаторах, разработка программного обеспечения.



0000-0003-4043-7648

e-mail: aospiridonov@gmail.com**Анна Игоревна Репина**

Канд. физ.-мат. наук., ассистент кафедры системного анализа и информационных технологий Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета, г. Казань. Область научных интересов: прикладная математика, компьютерное моделирование, численный анализ, математическое моделирование лазеров на микрорезонаторах.



0000-0003-2821-1371

e-mail: airepinas@gmail.com**Евгений Михайлович Карчевский**

Д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Института вычислительной математики и информационных технологий К(П)ФУ, гл. научн. сотр. НИЛ Высокопроизводительные вычисления, медицинская кибернетика и машинное зрение, г. Казань. Область научных интересов: прикладная математика, компьютерное моделирование, численный анализ, математическое моделирование компонентов интегральной и волоконной оптики и лазеров на микрорезонаторах.



0000-0001-6931-425X

e-mail: ekarchev70@gmail.com

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.