


УДК 531.383:519.876.5

 10.25209/2079-3316-2022-13-3-5-15



## Моделирование многофункционального микромеханического гироскопа

Ляля Узбековна Бахтиева<sup>1✉</sup>, Владимир Михайлович Боголюбов<sup>2</sup>,  
Максим Дмитриевич Тумаков<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева (КАИ),  
Казань, Россия

<sup>✉</sup>lbakhtie@yandex.ru

(подробнее об авторах на с. 14)

**Аннотация.** Рассмотрена возможность построения многофункционального прибора инерциальной навигации на основе модуляционного микромеханического гироскопа гибридного типа. Построена математическая модель устройства («тяжелого» гироскопа) как качественной трехмерной колебательной системы. Численно показано, что при определенных условиях реакция системы на движение объекта имеет наряду с прецессией наблюдаемую нутацию, которая несет информацию о линейном движении основания гироскопа. Отмечено, что возможность измерения линейных ускорений обеспечивается наличием небольшого симметричного расстояния между осями упругого подвеса относительно центра масс чувствительного элемента. Полученные результаты позволяют реализовать в одном устройстве двухкомпонентный измеритель угловой скорости и двухкомпонентный линейный измеритель ускорения.

**Ключевые слова и фразы:** математическая модель, колебания, микромеханическая система

Для цитирования: Бахтиева Л. У., Боголюбов В. М., Тумаков М. Д. Моделирование многофункционального микромеханического гироскопа // Программные системы: теория и приложения. 2022. Т. 13. № 3(54). С. 5–15. [http://psta.psisiras.ru/read/psta2022\\_3\\_5-15.pdf](http://psta.psisiras.ru/read/psta2022_3_5-15.pdf)

© Бахтиева Л. У., Боголюбов В. М., Тумаков М. Д. 2022



This Article in English:

[http://psta.psisiras.ru/read/psta2022\\_3\\_17-27.pdf](http://psta.psisiras.ru/read/psta2022_3_17-27.pdf)

## Введение

Представленная авторами статья является продолжением серии работ, посвященных совершенствованию гироскопических устройств [1–4].

Несмотря на значительные успехи [5–11] в разработке микромеханических гироскопов (ММГ), остаются проблемы, ограничивающие точность их измерений. Наиболее важной из них является наличие малой массы чувствительного элемента, неспособной создавать необходимое значение гироскопического момента при измерении малых величин переносной угловой скорости, что накладывает требование к сверхвысокой чувствительности системы съема информации прибора. Решение этой проблемы связано с наметившейся в последние годы тенденцией перехода к гибридным ММГ, сочетающим методы планарной технологии изготовления инерционной массы с использованием электромеханического привода. На основе гибридного ММГ удалось создать двухосный датчик угловой скорости с несколько возросшими габаритами, но с существенно повышенной точностью [5–7].

Еще одним проблемным фактором, ухудшающим метрологические свойства прибора, является значительный уровень «нулевого смещения», связанный с технологией его изготовления. В отличие от метода, описанного в [7], авторами настоящей статьи предлагается использовать для решения указанной проблемы модуляционный принцип съема и обработки первичной информации в механическом контуре, который хорошо себя зарекомендовал в вибрационных гироскопах [1]. Отличительной особенностью модуляционного ММГ является то, что регистрация углового поворота основания прибора осуществляется не измерением этого поворота относительно неподвижной в инерциальном пространстве главной оси гироскопа, а измерением амплитуды и фазы колебаний его ротора во вращающейся системе координат. В этом случае информация об угловом движении основания содержится в указанных параметрах сигнала переменного тока и наличие постоянной составляющей, вызванной, так называемым «смещением нуля», не оказывает влияния на точность съема показаний ММГ.

Предложенная ниже математическая модель движения модуляционного ММГ гибридного типа и анализ численных результатов позволяет сделать вывод о возможности значительного расширения измерительной способности таких приборов.

### 1. Постановка задачи

Двухкоординатный гибридный ММГ способен измерять значение вектора угловой скорости вращения основания, лежащего в плоскости

его чувствительности. Когда устройство настраивается на резонанс по отношению к измеряемой угловой скорости, оно работает как интегрирующий гироскоп, так как отклонение его ротора (в условиях малого затухания) пропорционально углу поворота основания.

Целью данного исследования является разработка теоретических основ для создания многофункционального устройства, которое, наряду с возможностью измерения угловых отклонений в двух ортогональных направлениях, совпадающих с его осями чувствительности, позволяет измерять величину вектора силы инерции, вызванную ускоренным линейным движением основания. То есть требуется исследовать возможность разработки датчика угловой скорости, выполняющего одновременно функцию акселерометра.

На рисунке 1 представлена кинематическая схема предлагаемого модуляционного микромеханического гироскопа – ньютонометра гибридного типа (ММГ-Н), включающего подвижное основание 1, вентильный привод 2, ротор 3, упругий подвес 4, элементы крепления ротора 5, датчик угла 6, связанный с валом привода.

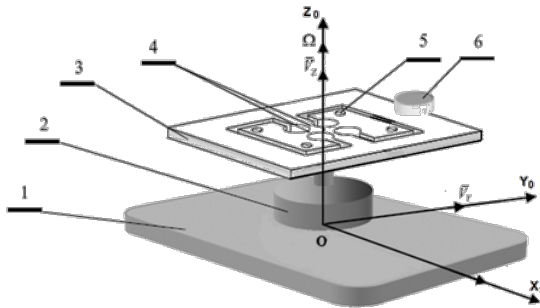


Рисунок 1. Кинематическая схема модуляционного гибридного ММГ-Н

Покажем, что линейное ускорение можно измерить за счет небольшого симметричного разноса осей упругого подвеса относительно центра масс чувствительного элемента.

## 2. Математическая модель

На рисунке 2 приведен чертеж общего вида ротора ММГ-Н, отличительной особенностью которого является наличие непересечения упругих опор 1, 2, создающие «маятниковость» ротора 3, обусловленную смещением его центра относительно осей.

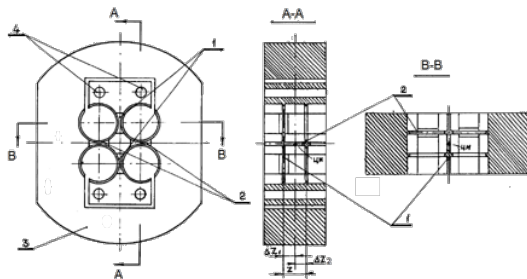


Рисунок 2. Чертеж общего вида ротора модуляционного гибридного ММГ

Для описания движения модуляционного гироскопа-ньютонметра (ММГ-Н), установленного на подвижном основании, введем систему координат с началом отсчета в центре масс ротора гироскопа и осями, направленными на неподвижные звезды, т. е. перемещающимися поступательно в инерциальном пространстве (рисунок 1). Свяжем с подвижным основанием систему координат  $X_0Y_0Z_0$ , ось  $OZ_0$  которой совпадает с осью вращения ротора ММГ-Н (рисунок 3).

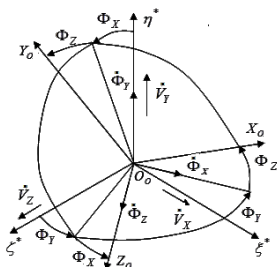


Рисунок 3. Положение объекта в базовой системе координат

Движение основания прибора будем считать известным, т.е. в каждое мгновение времени известна ориентация системы координат  $X_0Y_0Z_0$  относительно инерциальной системы  $\xi^*\eta^*\zeta^*$ , а проекции  $\dot{\Phi}_x$ ,  $\dot{\Phi}_y$ ,  $\dot{\Phi}_z$  вектора абсолютной угловой скорости основания на оси системы  $\xi^*\eta^*\zeta^*$

являются заданными функциями времени. Кроме вышеупомянутых систем необходимы еще четыре системы осей  $X_B Y_B Z_B$ ,  $X_p Y_p Z_p$ ,  $X_1 Y_1 Z_1$ ,  $X_2 Y_2 Z_2$ , связанные соответственно с валом привода, с осями главных моментов инерции ротора и с соответствующими осями упругих опор (торсионов), как показано на рисунке 4.

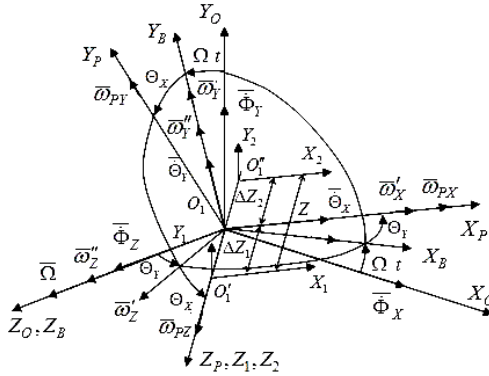


Рисунок 4. Положение чувствительного элемента ММГ-Н относительно движущегося объекта

Начало осей систем  $X_B Y_B Z_B$  и  $X_p Y_p Z_p$  лежит в центре масс ММГ-Н, а их положение относительно системы  $X_0 Y_0 Z_0$  задано последовательными поворотами в положительном направлении на угол  $\Omega t$  относительно  $X_B Y_B Z_B$  и углы  $\Theta_x, \Theta_y$  относительно  $X_p Y_p Z_p$  ( $\Omega$  – угловая скорость вращения ротора).

Наличие непересечения осей торсионов, обусловленное величиной  $Z$ , а также смещение центра масс ротора относительно соответствующих осей упругих опор на  $\Delta Z_1$  и  $\Delta Z_2$  (рисунок 4), создает статическую неуравновешенность (маятниковость) ротора, что позволяет отнести такой прибор к классу «тяжелых» гироскопов.

Проекции угловой скорости движения основания на оси системы  $X_B Y_B Z_B$  после поворота на угол  $\Omega t$  имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x'' &= \dot{\Phi}_x \cos \Omega t + \dot{\Phi}_y \sin \Omega t, \\ \omega_y'' &= \dot{\Phi}_y \cos \Omega t - \dot{\Phi}_x \sin \Omega t, \\ \omega_z'' &= \dot{\Phi}_z + \Omega. \end{aligned}$$

Проекции угловых скоростей на оси системы  $X_p Y_p Z_p$  после поворота

на угол  $\Theta_y$  можно записать в виде

$$\omega'_x = \omega''_x \cos \Theta_y - \omega''_z \sin \Theta_y,$$

$$\omega'_y = \omega''_y + \dot{\Theta}_y,$$

$$\omega'_z = \omega''_z \cos \Theta_y + \omega''_x \sin \Theta_y,$$

а после поворота на угол  $\Theta_x$  соответственно

$$\omega_{px} = \omega'_x + \dot{\Theta}_x,$$

$$\omega_{py} = \omega'_y \cos \Theta_x + \omega'_z \sin \Theta_x,$$

$$\omega_{pz} = \omega'_z \cos \Theta_x - \omega'_y \sin \Theta_x.$$

Поскольку ротор ММГ-Н имеет «маятниковость», в результате его движения с угловыми скоростями  $\omega_{px}$ ,  $\omega_{py}$  центр масс перемещается поступательно с линейной скоростью (рисунок 4), проекции которой на оси системы  $X_p Y_p Z_p$  имеют вид

$$V_{px} = -\omega_{py} \Delta Z_1, \quad V_{py} = -\omega_{px} \Delta Z_2, \quad V_{pz} = 0.$$

Для получения математической модели рассматриваемой гироскопической системы воспользуемся вариационным принципом Остроградского–Лиувилля [12], выбирая в качестве обобщенных координат углы поворота ротора  $\Theta_x$  и  $\Theta_y$ , однозначно определяющие его положение, а в качестве обобщенных сил – моменты демпфирования, моменты упругости торсионов и моменты, вызываемые силами инерции. Последние при условии малости углов  $\Theta_x$  и  $\Theta_y$  определяются следующими выражениями:

$$M_{ix} = m \Delta Z_2 (\dot{V}_y \cos \Omega t - \dot{V}_x \sin \Omega t),$$

$$M_{iy} = m \Delta Z_1 (\dot{V}_x \cos \Omega t + \dot{V}_y \sin \Omega t).$$

Линеаризованная математическая модель ММГ-Н после факторизации и учета обобщенных сил до первого порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned} & (J + \Delta J) \ddot{\Theta}_x + \mu \dot{\Theta}_x + (k_x + (C - J + \Delta J) \Omega^2) \Theta_x - (2J - C) \dot{\Theta}_y = \\ & -(J + \Delta J) (\ddot{\Phi}_x \cos \Omega t + \ddot{\Phi}_y \sin \Omega t) - \Omega (C + 2\Delta J) (\dot{\Phi}_y \cos \Omega t - \dot{\Phi}_x \sin \Omega t) \\ (1) \quad & + (M + \Delta M) (\dot{V}_y \cos \Omega t - \dot{V}_x \sin \Omega t) + M_x \cos \Omega t + M_y \sin \Omega t, \\ & (J - \Delta J) \ddot{\Theta}_y + \mu \dot{\Theta}_y + (k_y + (C - J - \Delta J) \Omega^2) \Theta_y + (2J - C) \Omega \dot{\Theta}_x = \\ & (J - \Delta J) (-\ddot{\Phi}_y \cos \Omega t + \ddot{\Phi}_x \sin \Omega t) + \Omega (C - 2\Delta J) (\dot{\Phi}_x \cos \Omega t + \dot{\Phi}_y \sin \Omega t) \\ & - (M - \Delta M) (\dot{V}_x \cos \Omega t + \dot{V}_y \sin \Omega t) + M_y \cos \Omega t - M_x \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Уравнения (1) получены для случая, когда вал привода ММГ-Н вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , жесткости  $k_x, k_y$  торсионов малы по сравнению с их изгибной жесткостью, а основание совершает как угловое перемещение со скоростью  $\dot{\Phi}_x, \dot{\Phi}_y, \dot{\Phi}_z$ , так и поступательное движение с ускорением  $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ . Здесь введены следующие обозначения:

$$J = \frac{A + B + m(\Delta Z_1^2 + \Delta Z_2^2)}{2}, \quad \Delta J = \frac{A - B + m(\Delta Z_1^2 - \Delta Z_2^2)}{2},$$

$$M = \frac{m(\Delta Z_1 + \Delta Z_2)}{2}, \quad \Delta M = \frac{m(\Delta Z_1 - \Delta Z_2)}{2},$$

$\mu_x = \mu_y = \mu$  – коэффициент вязкого трения,  $k_x = k_y = k$  – крутильная жесткость торсионов,  $A, B, C$  – экваториальные и полярный моменты инерции ротора,  $m$  – масса ротора,  $M_x, M_y$  – внешние моменты, действующие по соответствующим осям чувствительности гироскопа.

### 3. Численное моделирование

Система уравнений (1) решалась численно в среде Maple при нулевых начальных условиях

$$(2) \quad \Theta_x = \dot{\Theta}_x = 0, \quad \Theta_y = \dot{\Theta}_y = 0.$$

На рисунке 5 представлены графики решения задачи (1)–(2)

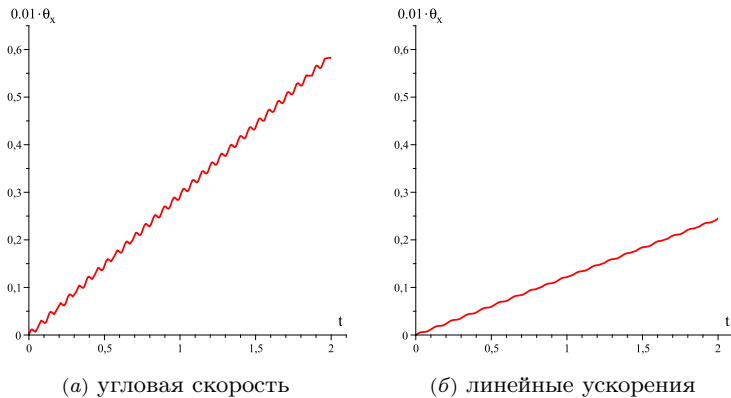


РИСУНОК 5. Решение задачи в случае несимметричного ротора

в случае несимметричного ротора ( $A \neq B$ ). рисунок 5а соответствует каналу измерения угловой скорости при  $\dot{\Phi}_y = 0.1, \dot{\Phi}_x = 0$  (линейные ускорения  $\dot{V}_x$  и  $\dot{V}_y$  в уравнениях (1) равны нулю), а рисунок 5б – каналу

измерения линейных ускорений при  $\dot{V}_x = 0.01$ ,  $\dot{V}_y = 0$  (компоненты угловой скорости  $\dot{\Phi}_x$  и  $\dot{\Phi}_y$  в уравнениях (1) равны нулю).

Из графиков рисунка 5 видно, что использование несимметричного ротора приводит к его прецессии, сопровождающейся нутацией как в канале измерения угловой скорости, так и в канале измерения линейных ускорений. При этом амплитуда нутационных колебаний в случае качественного чувствительного элемента достаточно велика.

На рисунке 6 показаны аналогичные решения задачи (1)–(2) в случае симметричного ротора, имеющего одинаковые экваториальные моменты инерции ( $A = B$ ).

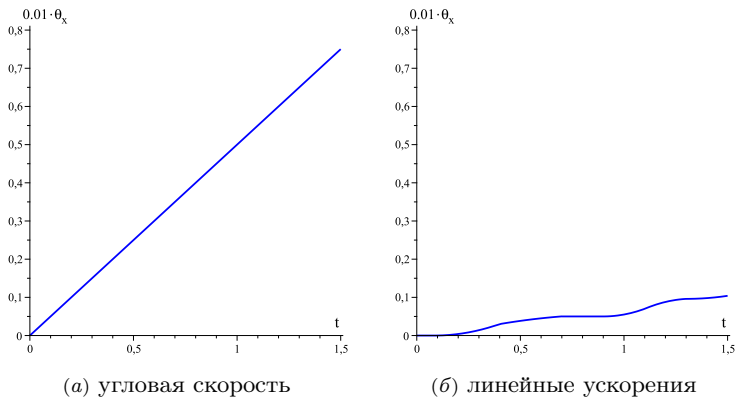


РИСУНОК 6. Решение задачи в случае симметричного ротора

Отличительной особенностью графиков рисунка 6 является отсутствие нутации в канале измерения угловой скорости (рисунок 6а), что связано с динамикой входной информации гироскопа, реагирующей не только на угловую скорость, но и на угловое ускорение, а при равенстве экваториальных моментов инерции симметричного ротора можно реально подавить его нутационные колебания по каналу измерения угловой скорости. В канале измерения линейных ускорений наряду с прецессией наблюдается нутация (рисунок 6б).

Таким образом, прецессионное движение отражает реакцию чувствительного элемента гироскопа на угловое и поступательное движение основания, а нутационные колебания возникают только при его поступательном движении. Нутационные колебания становятся информационными, так как в их амплитуде и фазе содержится



информация о величине и направлении измеряемых линейных ускорений движущегося объекта.

Отметим, что информацию по каналу измерения линейного ускорения можно получить только в том случае, если множители  $(M + \Delta M)$  и  $(M - \Delta M)$  в уравнениях (1) не равны нулю, т.е. когда  $\Delta Z_1 \neq 0$  и  $\Delta Z_2 \neq 0$  (наличие непересечения осей кручения упругого подвеса).

#### 4. Заключение

Авторами построена математическая модель движения модуляционного микромеханического гироскопа гибридного типа. На основе численного анализа результатов моделирования показано, что при определенных условиях реакция системы на движение объекта имеет наряду с прецессией наблюдаемую нутацию, параметры которой содержат информацию о величине и направлении линейных ускорений движущегося объекта. Отмечено, что измерение линейного ускорения может быть реализовано за счет небольшого симметричного разнеса осей упругого подвеса относительно центра масс чувствительного элемента.

Полученные результаты позволяют решить актуальную проблему инерциальной навигации, связанную с созданием многофункционального прибора, выполняющего функции измерителя как угловых скоростей, так и линейных ускорений.

#### Список литературы

- [1] Bakhtieva L. U., Bogolyubov V. M. *Parametrically excited microelectromechanical system in the problems of orientation of moving objects* // Journal of Physics: Conference Series.– 2019.– Vol. **1158**.– No. 2.– 022018.– 7 pp. doi ↑6
- [2] Bakhtieva L. U., Bogolyubov V. M. *Modulation of damping in the rotor vibratory gyroscopes* // Russian Aeronautics (Iz.VUZ).– 2018.– Vol. **61**.– No. 4.– pp. 599–604. doi ↑6
- [3] Bakhtieva L. U., Bogolyubov V. M. *Astatic gyrocompass based on a hybrid micromechanical gyroscope*, 2021 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS) (10–13 September 2021, Batumi, Georgia).– 2021.– с. 1–5. doi ↑6
- [4] Bakhtieva L. U., Bogolyubov V. M. *Study on parametrically excited microelectromechanical system in the problems of orientation of moving objects*, Research Trends and Challenges in Physical Science.– т. **5**.– В Р International.– 2021.– ISBN 978-93-5547-183-3.– с. 150–157. doi ↑6
- [5] Матвеев В. В., Распопов В. Я. *Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на микромеханических датчиках* // XXIV

- Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам* (Санкт-Петербург, 29–31 мая 2017 года), ред. В. Г. Пешехонов, СПб.: "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор".– 2017.– ISBN 978-5-91995-046-2.– с. 264–266. ↑<sup>6</sup>
- [6] Лукьянов Д. П., Распопов В. Я., Филатов Ю. В. *Прикладная теория гироскопов*, учебник для вузов.– СПб.: ГИЦ РФ ОАО Концерн "Электроприбор".– 2015.– ISBN 978-5-91995-036-3.– 315 с. ↑<sup>6</sup>
- [7] Коновалов С. Ф., Пономарев Ю. А., Майоров Д. В. *Магнитная компенсация нулевого сигнала в гибридном двухкоординатном МЭМС-гироскопе R-R-R типа* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение".– 2013.– № 4(93).– с. 122–131. ↑<sup>6</sup>
- [8] Lysenko I. E., Sevostyanov D. Y., Kidyaev N. F., Kovalev A. V. *Research of dynamic characteristics of a three-axis micromechanical gyroscope-accelerometer* // Journal of Physics: Conference Series.– 2021.– Vol. **2086**.– 012206.– 4 pp. ↑<sup>6</sup>
- [9] Li S., Chen L. *Research on the reliability test of a micromechanical gyroscope with full symmetry structure* // Journal of Physics: Conference Series.– 2020.– Vol. **1650**.– 022092.– 5 pp. ↑<sup>6</sup>
- [10] Ninalalov I., Merkurjev I., Kubryak O., Astakhov S. *Methods for improving the accuracy of an autonomous orientation and navigation system based on micromechanical gyroscopes and optoelectronic sensors*, 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS) (30 May 2022–01 June 2022, Saint Petersburg, Russian Federation).– pp. 1–2. ↑<sup>6</sup>
- [11] Li Y., Tan Q., Wen J., Song L., Yang F. *Study of nonlinear vibration of resonant gyroscope based on uncertainty analysis method* // Microelectronic Engineering.– 2022.– Vol. **263**.– 111845. ↑<sup>6</sup>
- [12] Бахтиева Л. У., Тазюков Ф. Х. *Решение задач устойчивости тонкой оболочки при импульсном нагружении*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.– т. **156**.– №1, Казань: Изд-во Казанского ун-та.– 2014.– с. 5–11. ↑<sup>10</sup>


Поступила в редакцию 28.06.2022;  
 одобрена после рецензирования 12.08.2022;  
 принята к публикации 20.09.2022.

Рекомендовал к публикации

д.ф.-м.н. А. М. Елизаров

**Информация об авторах:****Ляля Узбековна Бахтиева**


кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Казанского федерального университета. Область научных интересов – математическое моделирование физических процессов

 0000-0003-0813-9042

**e-mail:** [lbakhtie@yandex.ru](mailto:lbakhtie@yandex.ru)

**Владимир Михайлович Боголюбов**


доктор технических наук, доцент, профессор кафедры радиоэлектронных и телекоммуникационных систем Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева. Область научных интересов – радиоэлектроника, системы управления, инерциальная навигация

 0000-0001-5014-6305

**e-mail:** [bvm200@yandex.ru](mailto:bvm200@yandex.ru)

**Максим Дмитриевич Тумаков**

магистрант 1го курса ИВМиИТ КФУ. Область научных интересов – обработка изображений, высокопроизводительные вычисления, математическое моделирование

 0000-0002-8028-6939

**e-mail:** [madtumakov@stud.kpfu.ru](mailto:madtumakov@stud.kpfu.ru)

*Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.  
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*