ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ т. 13, № 4(55), с. 139–162
научная статья МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977517.977
10.25209/2079-3316-2022-13-4-139-162

Приближенный синтез оптимального управления в окрестности относительной минимали для дискретно-непрерывных систем

Ирина Викторовна **Расина**[1✉], Александр Олегович **Блинов**[2]

[1] Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Веськово, Россия
[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
[2] Российский государственный социальный университет, Москва, Россия

[1✉] *irinarasina@gmail.com* *(подробнее об авторах на с. 159)*

Аннотация. Рассматривается способ построения метода приближенного синтеза оптимального управления для дискретно-непрерывных систем (ДНС) на основе достаточных условий относительного минимума. Построение ведется в окрестности ранее найденной относительной минимали. Дается оценка точности такого построения и приводится иллюстративный пример.
(*see abstract in English on p. 160*)

Ключевые слова и фразы: дискретно-непрерывные системы, достаточные условия оптимальности, приближенный синтез оптимального управления, относительный минимум

Благодарности:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №21-11-00202)

Для цитирования: Расина И. В., Блинов А. О. *Приближенный синтез оптимального управления в окрестности относительной минимали для дискретно-непрерывных систем* // Программные системы: теория и приложения. 2022. **Т. 13**. № 4(55). С. 139–162. http://psta.psiras.ru/read/psta2022_4_139-162.pdf

Введение

Широко распространенные на практике гибридные системы (системы переменной структуры [1], дискретно-непрерывные системы [2], логико-динамические системы [3, 4], импульсные системы [5] и ряд других), продолжают оставаться предметом интенсивного исследования, в чем убеждают материалы конференций последних лет, таких как NUMTA 2019, VSPU 2019, MOTOR 2020, 2021, RusAutoCon 2021 и ряда других. Каждый тип таких систем требует построения своей математической модели, метода ее изучения и исследования. В работе рассматривается один из классов гибридных систем: так называемые дискретно-непрерывные системы (ДНС). При этом используется предложенная ранее [2, 6–8] двухуровневая математическая модель. В ней нижний уровень представляет собой описания однородных непрерывных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень (дискретный) связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом с целью обеспечения минимума функционала. Для рассматриваемой модели получены два варианта достаточных условий оптимальности типа Кротова и построены методы улучшения управления [6, 8], которые позволяют найти глобальный минимум функционала в поставленной ЗОУ. Следует заметить, что на практике традиционно находится лишь относительный минимум функционала, это объяснимо большим количеством трудностей, таких как сложная структура множества допустимых управлений или специфические ограничения на переменные состояния. Поэтому большинство разработанных численных методов, начиная с градиентного, позволяют найти лишь относительный минимум функционала. Один из подходов к проблеме реализации оптимальных программ, начиная с работ А.М. Летова и Р. Каллмана [7, 9, 10], предполагает построение синтеза управления, минимизирующего среднеквадратическое отклонение программы от заданной, на основе линеаризованной модели объекта управления. Однако, если исходная программа оптимальна по некоторому критерию, то в ее окрестности можно построить синтез по тому же критерию, используя для этого достаточные условия относительного минимума. Далее излагается реализация этой схемы и приводится иллюстративный пример, демонстрирующий ее преимущество.

1. Модель дискретно-непрерывной системы

Будем рассматривать двухуровневую систему, в которой верхний уровень представлен дискретным управляемым процессом. Пусть, как и в [11], задана абстрактная дискретная управляемая система:

$$(1) \qquad x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, \dots, k_F\},$$

где k – номер шага (этапа), не обязательно физическое время; $\mathbf{K} \subset \mathbb{N}$;

x и u – соответственно переменные состояния и управления;

f – оператор, отображающий прямое произведение множеств $\mathbf{K} \times \mathbf{U} \times \mathbf{X}$ на множество $\mathbf{X}$.

Все указанные объекты – произвольной природы (возможно, различной) для различных k;

$\mathbf{U}(k, x)$ – заданное при каждом k и x множество;

k_I, k_F – начальный и конечный шаги соответственно.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, действует непрерывная система нижнего уровня

$$(2) \qquad \dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c(z, t, x^c, u^c), \qquad \text{где} \quad t \in \mathbf{T}(z) = [t_I(z), t_F(z)],$$
$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \qquad u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c) \subset \mathbb{R}^{p(k)},$$

а $z = (k, x, u^d)$ – характеристика воздействия системы верхнего уровня на нижний, играющая на нижнем роль параметров. В ней $u^d = u^d(k)$ – управляющее воздействие верхнего уровня на нижний на каждом этапе. Здесь и далее:

x^c и u^c – соответственно переменные состояния и управления;

$\mathbf{U}^c(z, t, x^c)$ – заданное множество;

f^c – оператор, отображающий прямое произведение множеств $\mathbf{T} \times \mathbf{U}^c \times \mathbf{X}^c$ при каждом k на множество $\mathbf{X}^c$.

Оператор правой части (1) имеет вид

$$f(k, x, u) = \theta(z, \gamma^c), \qquad \text{где} \quad \gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \mathbf{\Gamma}^c(z),$$
$$\mathbf{\Gamma}^c(z) = \{\gamma^c : t_I = \tau(z), \quad x_I^c = \xi(z), \quad (t_F, x_F^c) \in \mathbf{\Gamma}_F^c(z)\},$$

где $t_I = \tau(z)$, $x_I^c = \xi(z)$ – заданные функции z.

Пусть $\mathbf{D}^c(z)$ – множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (2) с дополнительными ограничениями при кусочно-непрерывных u^c и кусочно-гладких x^c. На каждом дискретном шаге $k \in \mathbf{K}'$ модель рассматривает непрерывный процесс $m^c(k) \in \mathbf{D}^c(z(k))$ вида $(x^c(k,t),\ u^c(k,t))$, $t \in \mathbf{T}(z(k))$, управление которым $u(k) = (u^d(k), m^c(k))$ состоит из фиксированной на шаге дискретной части u^d и непрерывно изменяемой части m^c. Обозначим $\bar{m}(k) = (x(k), u(k))$. Решение описанной двухуровневой системы $m = \{\bar{m}(k) : \ k \in \mathbf{K}'\}$ есть *дискретно-непрерывный процесс*. Совокупность таких решений обозначаем через $\mathbf{D}$ и называем *множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов*.

Для модели (1), (2) рассматривается задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала $I = F(x(k_F))$ при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях

$$x(k) \in \mathbf{X}(k), \quad x^c \in \mathbf{X}^c(z,t), \tag{3}$$

где $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c(z,t)$ – заданные множества.

Заметим, что модель (1), (2) удобна для представления неоднородных управляемых процессов. Ее нижний уровень представляет собой описания однородных процессов на отдельных этапах, а верхний – связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом. В различных задачах управления, в частности в задачах оптимизации, оба уровня рассматриваются во взаимодействии. Взаимодействие с каждой подсистемой нижнего уровня осуществляется через границу этой подсистемы и соответствующего непрерывного процесса γ^c. Для удобства изложения приведем используемые далее основные конструкции и сами достаточные условия оптимальности.

2. Достаточные условия улучшения и оптимальности управления

Достаточные условия оптимальности для такой модели получаются по аналогии с условиями Кротова для дискретных и непрерывных систем следующим образом. Из ограничений множеств $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^c$ исключаются дискретная цепочка и дифференциальная система и вводятся функционалы $\varphi(k,x)$, $\varphi^c(z,t,x^c)$. Последний можно рассматривать как параметрическое семейство функций от аргументов t, x^c с параметром z, которые считаются непрерывными, и по крайней мере, непрерывно-дифференцируемыми по этим аргументам, где $z = (k, x(k), u^d(k))$. Кроме того, рассматривается обобщенный лагранжиан по аналогии с лагранжианами Кротова для дискретных и непрерывных систем:

$$L = G(x(k_F)) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \sum_{\mathbf{K}'} \Big(G^c(z(k), \gamma^c(z(k))) - \\ - \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} R^c(z(k), t, x^c(k,t), u^c(k,t))dt \Big),$$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= F(x) + \varphi(k_F, x) - \varphi(k_I, x(k_I)),\\
R(k,x,u) &= \varphi(k+1, f(k,x,u)) - \varphi(k,x),\\
G^c(z,\gamma^c) &= -\varphi(k+1, \theta(z,\gamma^c)) + \varphi(k,x) +\\
&\qquad\qquad + \varphi^c(z, t_F, x^c_F) - \varphi^c(z, t_I, x^c_I),\\
R^c(z,t,x^c,u^c) &= \varphi^{c\mathrm{T}}_{x^c} f^c(z,t,x^c,u^c) + \varphi^c_t(z,t,x^c),\\
\mu^c(z,t) &= \sup_{x^c\in\mathbf{X}^c(z,t),\quad u^c\in\mathbf{U}^c(z,t,x^c)} R^c(z,t,x^c,u^c),\\
l^c(z) &= \inf_{\gamma^c\in\mathbf{\Gamma}(z),\quad x^c\in\mathbf{X}^c(z,t_F)} G^c(z,\gamma^c),\\
\mu(k) &= \begin{cases} \sup_{x\in\mathbf{X}(k),\quad u\in\mathbf{U}(k,x)} R(k,x,u), & k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}',\\ -\inf_{x\in\mathbf{X}(k),\quad u^d\in\mathbf{U}^d(k,x)} l^c(z), & k\in\mathbf{K}',\end{cases}\\
l &= \inf_{\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{X}(K)} G(x).
\end{aligned}
$$

Здесь $\varphi^c_{x^c}$ – градиент φ^c в пространстве (x^c), T – знак транспонирования.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть имеются последовательность дискретно-непрерывных процессов $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}\subset\mathbf{D}$ и функционалы φ, φ^c, такие что:*

1) $\mu^c(z,t)$ *– кусочно-непрерывна при каждом* z*;*

2) $R(k,x_s(k),u_s(k))\to\mu(k)$, $k\in\mathbf{K}$*;*

3) $\int_{\mathbf{T}(z_s)}(R^c(z_s,t,x^c_s(t),u^c_s(t^c)) - \mu^c(z_s,t))dt\to 0$, $k\in\mathbf{K}'$, $t\in\mathbf{T}(z_s)$*;*

4) $G^c(z_s,\gamma^c_s) - l^c(z_s)\to 0$, $k\in\mathbf{K}'$*;*

5) $G(x_s(t_F))\to l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – минимизирующая для I на $\mathbf{D}$.

Доказательство дано в [6–8].

3. Достаточные условия в форме Беллмана

В отличие от предыдущего способа задания пары (φ,φ^c) можно попытаться задать эти функции заранее, чтобы решение задачи о максимумах R, R^c и минимумах G, G^c заведомо реализовалось в D. Практически это возможно лишь в том случае, когда экстремумы R, R^c, G и G^c достигаются на не единственном элементе, а на некотором их множестве, тогда далее можно выбирать из этого множества элемент, реализующийся в D.

Обозначим через v всю совокупность управляющих воздействий $v = (u(k), u^d(k), u^c(k,t))$, т.е. совокупность управляющих функций, принимающих значения из $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^d$, $\mathbf{U}^c$ соответственно.

Исходя из теоремы 1, найдем последовательность элементов v_s, доставляющую минимум функционалу L и потребуем независимости этого результата от состояния всех процессов:

$$\inf_{\{v_s : s\in\mathbb{N}\}} L = 0.$$

Это требование означает, что минимум функционала L по состояниям достигается не на единственном элементе $m_x = (x(k), x^c(k,t))$, представляющем собой совокупность траекторий верхнего и нижнего уровня. Для возвращения в класс допустимых требуется подставить элементы последовательности v_s в уравнения модели. Тем самым будет найдена соответствующую последовательность состояний из класса допустимых.

Сформулированное выше требование непосредственно ведет к конкретным условиям оптимальности типа Беллмана, которые также могут быть использованы для построения эффективных алгоритмов.

Пусть $\mathbf{\Gamma}^c_F(z) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $\theta(z,\gamma^c) = \theta(z, x^c_F)$, других ограничений на переменные состояния нет. Получается следующая рекуррентная цепочка относительно функционалов Кротова-Беллмана двух уровней φ и $\varphi^c(z)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(k,x) &= \sup_{u\in\mathbf{U}(k,x)} \varphi(k+1, f(k,x(k),u)), \quad k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F,\\
\varphi(k_F,x) &= -F(x),\\
\varphi^c_t &= -\mathcal{H}^c(z,t,x^c,\varphi^c_{x^c}),\\
\mathcal{H}^c(z,t,x^c,p) &= \sup\,\{p^{\mathrm{T}} f^c(z,t,x^c,u^c) :\ u^c\in\mathbf{U}^c(z,t,x^c)\},\\
\varphi^c(z,t_F,x^c_F) &= \varphi(k+1,\theta(z,x^c_F)),\\
\varphi(k,x) &= \sup_{u^d\in\mathbf{U}^d(t,x)} \varphi^c(z,\tau(z),\xi(z)), \quad k\in\mathbf{K}',
\end{aligned}\tag{4}$$

которая разрешается в порядке следования от k_F к k_I.

Предположим, что решение этой цепочки $(\varphi(k,x(k)), \varphi^c(z,t,x^c))$ существует и, кроме того, существуют соответствующие этому решению функции $\tilde{u}(k,x)$, $\tilde{u}^d(k,x)$, $\tilde{u}^c(z,t,x^c)$, получающиеся в результате операций максимума в (4). Подставляя эти функции в правые части заданных дискретных и непрерывных соотношений, будем иметь:

$$x(k+1) = f(k, x(t), \tilde{u}(k, x(t))), \quad x(k_I) = x_I, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F,$$

$$x(k+1) = \theta(k, x(k), \tilde{u}^d(k, x(k)), \gamma^c(\tilde{z})),$$

$$\dot{x}^c = f^c(k, x(k), \tilde{u}^d(k, x(k)), t, x^c, \tilde{u}^c(\tilde{z}(k), t, x^c)),$$

$$t_I = \tau(\tilde{z}(k)), \quad x^c(t_I) = \xi(\tilde{z}(k)), \quad \tilde{z}(k) = (k, x(k), \tilde{u}^d(k, x(k)))$$

при $k \in \mathbf{K}'$. Тогда решение этой дискретно-непрерывной цепочки

$$(x(k), u(k))_*, \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}',$$

$$(x(k), u^d(k),\ x^c(k,t),\ u^c(k,t))_*, \quad k \in \mathbf{K}', \quad t \in \mathbf{T}(z_*(k)),$$

если оно существует, задает в целом оптимальный дискретно-непрерывный процесс m_*. Заметим, что функцию $\varphi^c(z, t, x^c)$ в данном случае можно считать фактически не зависящей от x, поскольку она, как синтезирующая, «обслуживает» семейство задач для различных начальных условий. Если системы нижнего уровня не зависят от u^d, то полученные условия (4) кратко можно записать в виде:

$$P(k, x) = 0, \quad G(x) = 0, \quad P^c(k, t, x, x^c) = 0, \quad G^c(k, x_F^c) = 0,$$

где

$$P(k, x) = \sup_{u \in \mathbf{U}(k,x)} R(k, x(k), u(k)),$$

$$P^c(k, t, x, x^c) = \sup_{u^c \in \mathbf{U}^c(z,t,x^c)} R^c(z, t, x^c, u^c).$$

4. Относительный минимум

Предположим, что $x^c(k, t_I) = \xi(k, x(k))$ а также k_I, k_F, $x(k_I)$, $t_I(k)$,$t_F(k)$ фиксированы, ограничения на переменные состояния обоих уровней и управления верхнего уровня отсутствуют и подсистемы нижнего уровня не зависят от u^d, $\mathbf{X}(k) = \mathbb{R}^{d(k)}$, $\mathbf{X}^c(k,t) = \mathbb{R}^{p(k)}$, $\mathbf{U}(k, x) = \mathbb{R}^{r(k)}$, и множество $\mathbf{U}^c(z, t, x^c)$ – компактно, а используемые конструкции достаточных условий оптимальности таковы, что справедливы все ниже следующие операции. Пусть $\bar{x}(k), \bar{x}^c(k,t)$ элементы из $\mathbf{D}$, причем имеется, по крайней мере, по одному элементу $u(k), u^c(k,t)$, соответствующим значениям $\bar{x}(k+1), \bar{x}^c(k,t)$, а именно $\bar{u}(k)$, $\bar{u}^c(k,t)$, которые являются внутренними точками множеств $\mathbf{U}, \mathbf{U}^c$. Обозначим через $\mathbf{D}_\varepsilon$ подмножество элементов множества $\mathbf{D}$, удовлетворяющих дополнительным условиям $|x(k) - \bar{x}(k)| < \varepsilon$, $|x^c(k,t) - \bar{x}^c(k,t)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Будем говорить, что функционал I достигает на дискретно-непрерывном процессе $\bar{m}$ относительного минимума на $\mathbf{D}$, если $I(\bar{m}) = \inf_{\mathbf{D}_\varepsilon} I$.

Из достаточных условий оптимальности и [12] следует, что составляющие условий относительного минимума для дискретного процесса верхнего уровня имеют вид:

$$\bar{R}_u = 0, \quad \bar{R}_x = 0, \tag{5}$$

$$\bar{R}_{uu} < 0, \quad \bar{R}_{xx} - \bar{R}_{xu}\bar{R}_{uu}\bar{R}_{xu}^T < 0, \tag{6}$$

$$\bar{G}_x = 0, \quad \bar{G}_{xx} < 0, \tag{7}$$

где черточкой сверху обозначены значения функций и их производных на паре $\bar{u}, \bar{x}$.

Покажем, что из (5) и (6) следует $\bar{P}_x = 0, \bar{P}_{xx} < 0$. Для поиска функции $u^*(k,x)$, доставляющей максимум функции $R(k,x,u)$ на множестве $\mathbf{U}(k,x)$ воспользуемся условием:

$$R_u(k,x,u^*(k,x)) = 0. \tag{8}$$

Так как на паре $(\bar{u}, \bar{x})$ $\bar{R}_u = 0, \bar{R}_{uu} < 0$, то можем утверждать, что $u^*(k, \bar{x}(k)) = \bar{u}(k)$. Из теоремы о неявной функции [13] следует существование функции $\varepsilon^*(k)$ такой, что при $|x(k) - \bar{x}(k)| \le \varepsilon^*(k)$ функция $u^*(k,x)$ непрерывна, непрерывно дифференцируема и $u^*(k,x) \in \mathbf{U}(k,x)$. Заметим, что $\varepsilon = \min_k \varepsilon^*(k)$.

Имеем $P(k,x) = R(k,x,u^*(k,x))$. Тогда $P_x = R_x + R_{u^*}u_x^*$. Очевидно, что на паре $(\bar{u}, \bar{x})$ $P_x = 0$. Далее

$$P_{xx} = R_{xx} + u_x^{*\mathrm{T}} R_{xu^*}^T + R_{xu^*}u_x^* + R_{u^*}u_{xx}^* + u_x^{*\mathrm{T}} R_{u^*u^*}u_x^*.$$

Матрицу u_x^* определим из условия (8), продифференцировав его по x, т.е. из равенства $\frac{\partial}{\partial x} R_{u^*} = 0$. Получим $u_x^* = -R_{u^*u^*}R_{xu^*}^T$. Тогда

$$\bar{P}_{xx} = \bar{R}_{xx} - \bar{R}_{xu}\bar{R}_{uu}\bar{R}_{xu}^T.$$

В свою очередь составляющие условий относительного минимума для непрерывных процессов нижнего уровня представимы в виде [12]:

$$\bar{d}P^c = 0, \qquad \bar{d}^2 P_{xx}^c < 0, \tag{9}$$

$$\bar{d}G_x^c = 0, \qquad \bar{d}^2 G^c > 0. \tag{10}$$

Прежде чем сформулировать полученные в работе [12] достаточные условия относительного минимума приведем необходимую для дальнейшего изложения систему векторно-матричных уравнений:

$$\psi(k) = H_x, \quad H_u = 0, \quad H(k,\psi,x,u) = \psi^T(k+1)f(k,x,u), \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \tag{11}$$
$$\psi(k) = H_x + \xi_x^T \theta_{x_I^c}\psi(k+1), \quad H(k,\psi,x,u) = \psi^T(k+1)\theta(z,x_I^c,x_F^c), \quad k \in \mathbf{K}',$$

$$\dot{\psi}^c(k,t) = -\mathcal{H}^c_{x^c}, \quad \dot{\lambda}(k,t) = -\mathcal{H}^c_x, \quad \mathcal{H}^c = \sup_u H^c, \tag{12}$$
$$H(k,x,\psi,x_I^c,x_F^c) = \psi^T(k+1)\theta(k,x,x_I^c,x_F^c),$$
$$H^c(k,t,x,x^c,u^c) = \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)f^c(k,t,x^c,u^c), \quad k \in \mathbf{K}' \setminus k_F.$$

$$\dot{\sigma}^c = -\mathcal{H}^c_{x^cx^c} - \mathcal{H}^c_{x^c\psi^c}\sigma^c - \sigma^c\mathcal{H}^{c\mathrm{T}}_{x^c\psi^c} - \sigma^c\mathcal{H}^c_{\psi^c\psi^c}\sigma^c + \Theta_2(k,t), \tag{13}$$

$$\dot{\beta} = -\mathcal{H}^c_{xx} - \omega\mathcal{H}_{\psi^cx} - \mathcal{H}_{x\psi^c}\omega - \omega\mathcal{H}_{\psi^c\psi^c}\omega \tag{14}$$

$$\dot{\omega} = -\mathcal{H}^c_{xx^c} - \mathcal{H}^c_{x^c\psi^c}\omega - \sigma^c\mathcal{H}^c_{\psi^cx} - \sigma^c\mathcal{H}^c_{\psi^c\psi}\omega, \tag{15}$$

$$\sigma(k) = \theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_x + H_{xx} + \xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_I^c}\sigma(k+1)\theta_x + \tag{16}$$
$$+ \theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_I^c}\xi_x + \xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_I^c}^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_I^c}\xi_x +$$
$$+ \xi_x^{\mathrm{T}}\sigma^c(k,t_I)\xi_x + \xi_x\omega^T(k,t_I) + \omega(k,t_I), \ k \in \mathbf{K}',$$

$$\psi(k_F) = -F_{x_F}, \quad \psi^c(k,t_F) = -H_{x_F^c}, \quad \lambda(k,t_F) = 0, \quad \sigma(k_F) = -F_{x_Fx_F} + \Theta_1, \tag{17}$$

$$\sigma^c(k,t_F) = \theta_{x_F^c}^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_F^c} + H_{x_F^cx_F^c}, \quad \omega(k,t_F) = 0, \quad \beta(k,t_F) = 0. \tag{18}$$

Теорема 2. ([12]) *Для того чтобы на элементе $\bar{m}$ достигался относительный минимум функционала I на множестве $\mathbf{D}$ достаточно существования таких вектор функций ψ, ψ^c, λ, матриц σ, σ^c, β, ω, отрицательно определенных матриц $\Theta(k)$, $-\Theta^1(k)$, $\Theta^2(k,t)$, что выполняются условия* (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18).

5. Приближенный синтез и его оценка

Как следует из достаточных условий оптимальности в форме Беллмана, позволяющих найти синтезирующие управления

$$u = u(k,x), \qquad u^c = u^c(k,t,x,x^c),$$

на решении задачи

$$dP = 0, \quad dG = 0, \quad d^2P = 0, \quad d^2G = 0, \tag{19}$$
$$dP^c = 0, \quad dG^c = 0, \quad d^2P^c = 0, \quad d^2G^c = 0.$$

С другой стороны элемент $\bar{m}$, доставляющий функционалу относительный минимум удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &dP = 0, \quad dG = 0, \quad dP^c = 0, \quad dG^c = 0, \\ &d^2P < 0, \quad d^2G > 0, \quad d^2P^c < 0, \quad d^2G^c > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Другими словами справедливы приведенные выше уравнения (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18).

Покажем, что замена условий (19) условиями (20) позволяют построить приближенный синтез в окрестности элемента $\bar{m}$ с точностью до малых выше второго порядка. Воспользуемся аналогом оценки Кротова для ДНС точности построения синтеза [8]:

$$\begin{aligned} \Delta = &\sup_{\mathbf{X}(k_F)} G(x) - \inf_{\mathbf{X}(k_F)} G(x) + \\ &+ \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \Big(\mu(k) - \inf_{\mathbf{X}(k)} R(k, x, \tilde{u}(k, x))\Big) + \sum_{\mathbf{K}'} \Bigg(\mu(k) - \inf_{\mathbf{X}(k)} l^c(\tilde{z}) + \\ &+ \sup_{\mathbf{X}(k)} \int\limits_{\mathbf{T}(\tilde{z})} \Big(\mu^c(\tilde{z}, t) - \inf_{\mathbf{X}^c(k)} R^c(\tilde{z}, t, x^c, \tilde{u}^c(\tilde{z}, t, x^c))\Big) dt\Bigg), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\mu(k) = \begin{cases} \sup \{R(k, x, u) : \ x \in \mathbf{X}(k), \quad u \in \mathbf{U}(k, x)\}, \quad t \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ -\inf \quad \{l^c(z) : x \in \mathbf{X}(k)\}, \quad k \in \mathbf{K}'. \end{cases}$$

$$\mu^c(z, t) = \sup \{R^c(z, t, x^c, u^c) : \ x^c \in \mathbf{X}^c(k), u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c)\},$$

$$l^c(z) = \inf \{G^c(z, x^c) : x^c \in \mathbf{X}^c(k)\}.$$

Здесь $\tilde{z} = (k, x), \mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c(k, x)$ – области, в которых строится синтез. Предполагается, что область синтеза на нижнем уровне достаточно широкая для выполнения операций на верхнем уровне. Рассмотрим одно из наиболее сложных слагаемых оценки Δ, учитывая, что функция P^c представима в виде:

$$P^c = \bar{P}^c + d\bar{P}^c + \frac{1}{2} d^2 \bar{P}^c + O(|\delta\rho|^2),$$

где $\delta\rho = \sqrt{|\delta x|^2 + |\delta x^c|^2}$. Обозначим

$$\delta_1 = \int\limits_{\mathbf{T}} \left(\sup\Big(\frac{1}{2} d^2 \bar{P}^c + O(|\delta\rho|^2)\Big) + \inf\Big(\frac{1}{2} d^2 \bar{P}^c + O(|\delta\rho|^2)\Big) \right) dt$$

на элементе $\bar{m}$. Тогда

$$\nu = \sup\Big(\frac{1}{2}d^2\bar{P}^c + O(|\delta\rho|^2)\Big) + \inf\Big(\frac{1}{2}d^2\bar{P}^c + O(|\delta\rho|^2)\Big) \leqslant$$
$$\leq \sup O(|\delta\rho|^2) - \inf(\delta x^{c\mathrm{T}}\Theta_2\delta x^c) - \inf O(|\delta\rho|^2).$$

Пусть $\tilde{\rho}$ элемент из окрестности $|\delta\rho|^2 \leq \varepsilon$, на котором $O(|\delta\rho|^2)$ достигает наибольшего значения, т.е.$\sup O(|\delta\rho|^2) = O(|\delta\tilde{\rho}|^2)$. Очевидно

$$\frac{O(|\delta\tilde{\rho}|^2)}{|\delta\tilde{\rho}|^2} \to 0$$

при $|\delta\tilde{\rho}| \to 0$. Но $|\delta\tilde{\rho}| \leqslant \varepsilon$, поэтому $\frac{O(|\delta\tilde{\rho}|^2)}{\varepsilon^2} \to 0$ при $\varepsilon \ \to 0$, т.е. $\sup O(|\delta\rho|^2) = O(\varepsilon^2)$. Аналогично $\inf O(|\delta\rho|^2) = O_1(\varepsilon^2)$. Далее

$$\inf(\delta x^c)^T\Theta_2\delta x^c) = \lambda^*(k,t)\varepsilon^2,$$

где λ^* – наибольшее собственное число матрицы Θ_2 [14]. Будем предполагать, что при каждом k функция $\lambda^*(k,t)$ суммируема. Отсюда $0 \leqslant \nu \leqslant O(\epsilon^2) - \lambda^*(k,t)\varepsilon^2$. Тогда имеем

$$\delta_1 \leqslant \int\limits_{\mathbf{T}}(O(\varepsilon^2) - \lambda^*(k,t)\varepsilon^2)dt.$$

Если на отрезке $[t_I(k), t_F(k)]$ существует решение уравнения (13) при $\Theta_2 = 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что при всех $||\Theta_2|| < \delta$ решение уравнения (13) также будет существовать на $[t_I(k), t_F(k)]$, что следует из теоремы о непрерывой зависимости решения от параметра [15]. Положим $\Theta_2(k,t) = q(k,t)E$, где E – единичная матрица, $q(k,t) < 0$. Тогда $\lambda * (k,t) = q(k,t)\epsilon$. Как и в [16] можно показать, что $\int\limits_{\mathbf{T}}(O(\varepsilon^2)dt = O_3(\varepsilon^2)$. Аналогичные рассуждения справедливы для остальных слагаемых оценки Δ. Отсюда следует, что $\Delta = O_4(\varepsilon^2)$.

Таким образом, достаточные условия относительного минимума позволяют построить синтез в ϵ окрестности с точностью (по функционалу) до малых второго порядка относительно ϵ , т.е. обеспечивают хорошее приближение по рассмотренному критерию (порядок малых величин).

Если окрестность задана, то критерием близости может служить сама величина оценки Δ. Ее уменьшение возможно за счет выбора свободных элементов матриц Θ_2, Θ_3, Θ_4.

Замечание 1. Аналогичный метод приближенного синтеза для классической задачи ОУ был предложен в работе [17]. Однако автор при построении конструкций метода использует тейлоровское разложение функции Беллмана. Известно, что во многих практических задачах функция Беллмана недифференцируема, что сужает круг приложений.

В предлагаемом в данной работе методе линейно-квадратические функции φ, φ^c аппроксимируют в тейлоровском смысле не функции Беллмана, а функции Кротова из более широкого класса. В уравнениях метода это отражено возможностью варьирования матриц Θ_2, Θ_3, Θ_4. Естественно, что при этом возникает возможность получения лучших приближений при менее жестких требованиях к аналитическим свойствам описания объектов управления.

6. Пример

Рассмотрим работу метода на примере системы, динамика которой включает в себя два этапа.

1-ый этап:

$$\dot{x}_1^c = (x_1^c)^3 + x_1^c x_2^c u^c, \quad \dot{x}_2^c = x_1^c (x_2^c)^2 - (u^c)^2,$$

$$x_1^c(0) = 0.5, \quad x_2^c(0) = 0.5, \quad |u^c| \leqslant 1, \quad t \in [0,1].$$

2-ой этап:

$$\dot{x}_1^c = x_2^c u^c, \quad \dot{x}_2^c = (x_1^c)^2 + (u^c)^2, \quad |u^c| \leqslant 1, \quad t \in [1,3].$$

Функционал в примере: $I = x_1^c(3) \to \min$. Построим ДНС. Нетрудно видеть, что $\mathbf{K} = 0,1,2$, $\mathbf{K}' = 1$. Поскольку оба этапа связаны через переменную x_1^c, то она и играет роль x, а дискретный процесс верхнего уровня принимает вид:

$$\begin{array}{lll} x_1(0) = x_1^c(0,0) = 0.5, & x_2(0) = x_2^c(0,0) = 0.5, & \\ x(1) = x^c(0,1), & x(2) = x^c(1,3), & \xi = x(1), \\ \theta(1) = x^c(0,1), & x^c(1,1) = x(1), & I = x_1(2). \end{array}$$

Основные конструкции имеют вид:

$$H^c(0,t,x_1^c,x_2^c,u^c,\psi_1^c,\psi_2^c) = \psi_1^c((x_1^c)^3 + x_1^c x_2^c u^c) + \psi_2^c(x_1^c (x_2^c)^2 + u^{c2}),$$

$$H^c(1,t,x_1^c,x_2^c,u^c,\psi^c) = \psi_1^c x_2^c u^c + \psi_2^c((x_1^c)^2 + (u^c)^2).$$

Решение было найдено методом улучшения первого порядка для ДНС [18] и сделана проверка доставляет ли оно функционалу относительный минимум. При этом значение функционала $I = -0.894$

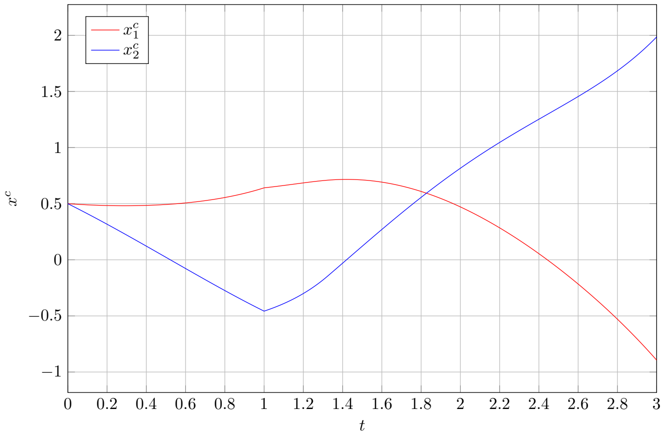

Рисунок 1. Переменные состояния

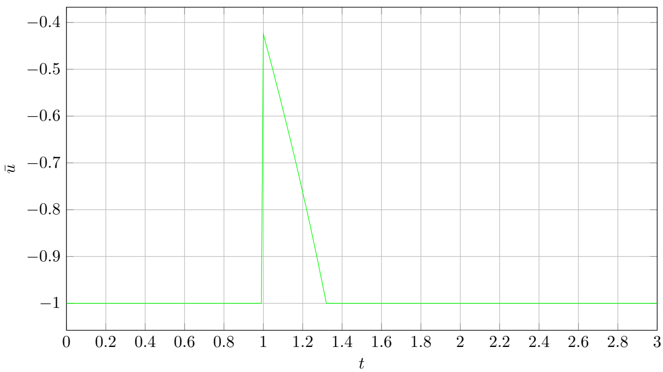

Рисунок 2. Графики управлений

Полученные траектории и управляющие воздействия представлены на рисунках 1и 2.

Поскольку уравнения каждого из этапов не зависят от переменной x верхнего уровня, то $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $\omega = 0$. Нетрудно видеть, что на обоих этапах вектор $\psi^{c\mathrm{T}} = (\psi_1^c, \psi_2^c)^T$, а матрица

$$\sigma^c = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^c & \sigma_{12}^c \\ \sigma_{21}^c & \sigma_{22}^c \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов, приведенные на рисунках 3, 4, 5 и 6, показывают, что система векторно-матричных уравнений для ψ^c, σ^c на обоих этапах имеет решение. Матрица σ^c – симметрическая, поэтому на графиках представлен лишь элемент σ^c_{12}.

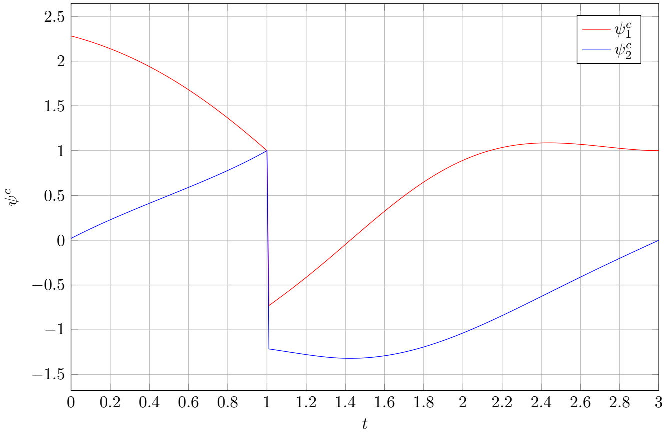

Рисунок 3. Графики вектора ψ^c

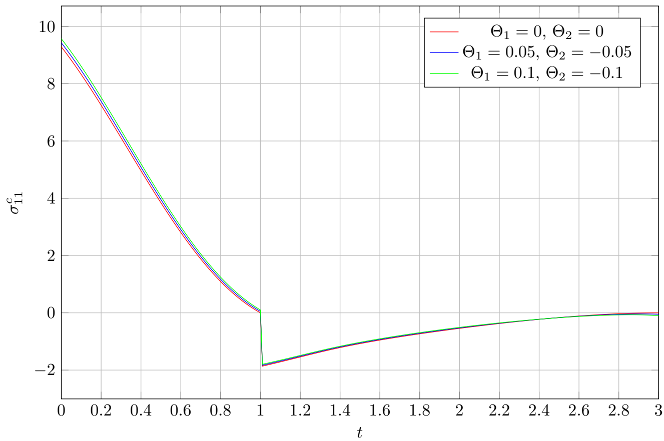

Рисунок 4. Графики элементов матрицы σ^c: σ^c_{11}

Следовательно, исследуемый элемент $\bar{m}$ доставляет функционалу относительный минимум. Поскольку в уравнении для матрицы σ^c и начальных условиях для нее фигурируют матрицы Θ_1, Θ_2, то было проведено несколько вариантов расчетов. Для указанных матриц задавались элементы главной диагонали, а элементы, расположен-

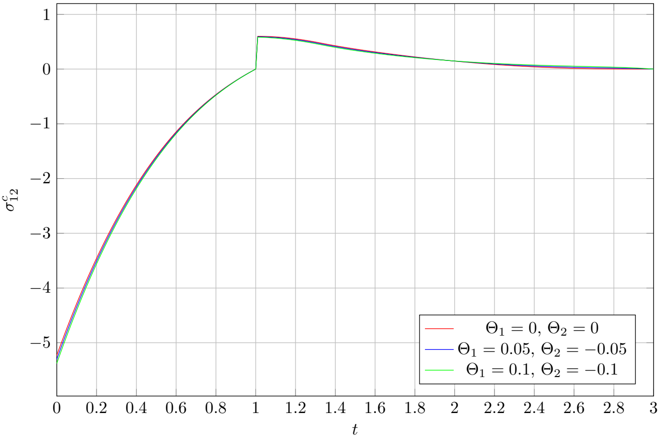

Рисунок 5. Графики элементов матрицы σ^c: σ^c_{12}

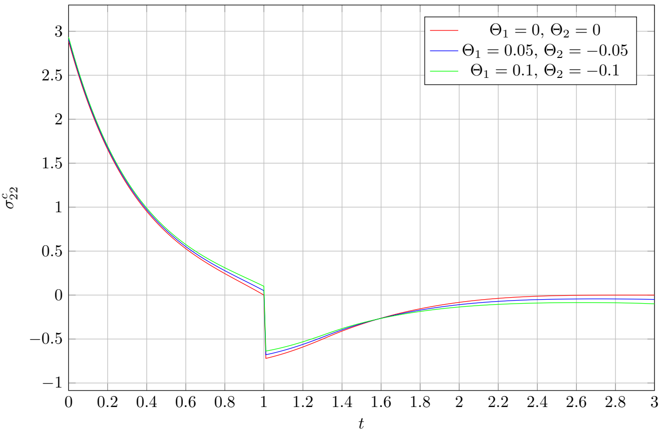

Рисунок 6. Графики элементов матрицы σ^c: σ^c_{22}

ные на побочной диагонали полагались равными нулю. Варианты следующие:

(1) матрицы Θ_1, Θ_2 нулевые;

(2) элементы, стоящие на главной диагонали матрицы Θ_1 равны 0.05, а в матрице Θ_2 -0.05;

(3) элементы тех же матриц равны соответственно 0.1 и -0.1.

Из рисунков 4, 5, 6 можно сделать вывод, что изменение матриц

Θ_1, Θ_2 не оказывает существенного влияния на решение уравнения для матрицы σ^c.

Линеаризованная система для исходной ДНС имеет вид:

1-ый этап:

$$\dot{x}_1^c = a_1 x_1^c + a_2 x_2^c + b_1 u^c, \quad \dot{x}_2^c = a_3 x_1^c + a_4 x_2^c + b_2 u^c,$$
$$a_1 = 3(\bar{x}_1^c)^2 + \bar{x}_2^c \bar{u}^c, \quad a_2 = \bar{x}_1^c \bar{u}^c, \quad a_3 = (\bar{x}_2^c)^2, \quad a_4 = 2\bar{x}_1^c \bar{x}_2^c,$$
$$b_1 = \bar{x}_1^c \bar{x}_2^c, \quad b_2 = -2\bar{u}^c.$$

2-ой этап:

$$\dot{x}_1^c = m_2 x_2^c + n_1 u^c, \quad \dot{x}_2^c = m_3 x_1^c + n_2 u^c,$$
$$m_2 = \bar{u}^c, \quad m_3 = 2\bar{x}_1^c, \quad n_1 = \bar{x}_2^c, \quad n_2 = 2\bar{u}^c.$$

Решение линеаризованной системы приведено на рисунке 7.

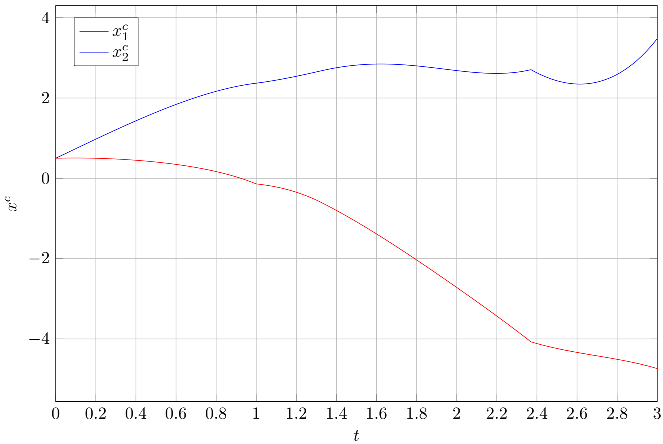

Рисунок 7. Переменные состояния линеаризованной системы

Для исходной и линеаризованной систем был найден приближенный синтез оптимального управления и вычислена оценка Δ точности его построения. В данной ситуации основную сложность представляет вычисление максимума и минимума функции $P^c(t, x^c)$ по состоянию в заданной окрестности полученного решения $(\bar{x}^c)$. Имеем $P^c(t, x^c) = \mathcal{H}^c(t, x^c, \varphi^c_{x^c}) + \varphi^c_t = H^c(t, x^c, \bar{u}^c, \varphi^c_{x^c}) + \varphi^c_t$. Поскольку в данном примере $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $\omega = 0$, то с учетом способа ее задания при получении достаточных условий относительного минимума имеем $\varphi^c = \psi^{c\mathrm{T}}(k, t)x^c +$

$\frac{1}{2}(x^c-\bar{x}^c)^T\sigma^c(k,t)(x^c-\bar{x}^c)$. Тогда $\varphi^c_{x^c}=\psi^c+\sigma^c(k,t)(x^c-\bar{x}^c)$ и $\varphi^c_t=\dot{\psi}^{c\mathrm{T}}(k,t)x^c+\frac{1}{2}(x^c-\bar{x}^c)^T\dot{\sigma}^c(k,t)(x^c-\bar{x}^c)$.

Синтезирующее управление с учетом квадратической зависимости функции R^c от u^c для исходной системы на первом этапе при $\varphi^c_{x^c_2}>0$

$$\tilde{u}^c(0,t,x^c)=\begin{cases}\dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_1x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}} & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_1x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\in(-1,1),\\ 1, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_1x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\geqslant 1,\\ -1, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_1x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\leqslant -1,\end{cases}\tag{22}$$

и при $\varphi^c_{x^c_2}<0$,

$$\tilde{u}^c(0,t,x^c)=\begin{cases}1, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_1x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\geqslant 1,\\ -1, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_1x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\leqslant -1,\end{cases}\tag{23}$$

а на втором при $\varphi^c_{x^c_2}<0$

$$\tilde{u}^c(1,t,x^c)=\begin{cases}-\dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\in(-1,1),\\ 1, & -\dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\geqslant 1,\\ -1, & -\dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\leqslant -1,\end{cases}\tag{24}$$

и при $\varphi^c_{x^c_2}>0$

$$\tilde{u}^c(1,t,x^c)=\begin{cases}1, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\geqslant 1,\\ -1, & \dfrac{\varphi^c_{x^c_1}x^c_2}{2\varphi^c_{x^c_2}}\leqslant -1.\end{cases}\tag{25}$$

Окрестность найденной относительной минимали, представляющая собой круг радиуса ε с центром в точке $(\bar{x}^c_1,\bar{x}^c_2)$ при каждом t, была заменена квадратной сеткой со сторонами $[-\varepsilon\ -\bar{x}^c_1,\varepsilon\ +\bar{x}^c_1]$, $[-\varepsilon\ -\bar{x}^c_2,\varepsilon\ +\bar{x}^c_2]$ с шагом h. При выходе узла сетки за пределы круга узел возвращался на его границу. При этом величина ε полагалась равной

0.1, 0.2 и 0.3, а шаг $h = 0.05$. Для линеаризованной системы, как показано в [19] $\tilde{u}^c(0,t,x^c) = \bar{u}^c$. Поиск экстремумов функции $P^c(t,x^c)$ проводился по той же схеме. Поскольку множество $\mathbf{K}'$ состоит из одной точки, то в ней работает конструкция G^c, имеющая следующий вид:

$$G^c = -\psi^T(2)\theta - \frac{1}{2}(\theta-\bar{\theta})^T\sigma(2)(\theta-\bar{\theta}) + \psi^T(1)x- \\ -\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\sigma(1)(x-\bar{x}) + \psi^{c\mathrm{T}}(1,3)x^c+ \\ +\frac{1}{2}(x^c-\bar{x}^c)^T\sigma^c(1,3)(x^c-\bar{x}^c).$$

При этом учитывалось, что начальные условия процесса фиксированы. Заметим, что функция R также определена лишь в одной начальной точке с фиксированными $(x_1(0), x_2(0))$. И, наконец, конструкция G представима следующим образом: $G = x_1(2) + \psi^T(2)x(2) + \frac{1}{2}(x(2) - \bar{x}(2))^T\sigma(2)(x(2) - \bar{x}(2))$. Результаты проведенных расчетов оценок $\Delta =$ для исходной системы и $\Delta_L =$ для линеаризованной в зависимости от величины окрестности ε представлены в таблице 1 .

Таблица 1. Оценки Δ и Δ_L

ε	Δ	Δ_L
0.3	2.501	7.379
0.2	1.365	4.831
0.1	0.618	2.385

Синтезирующие управляющие воздействия по этапам представлены на рисунке 8, а соответствующие им траектории на рисунке 9. При этом $x_2\tilde{(}3) = -1.135$. Из полученных результатов следует, что оценка $\Delta = 2.501$ меньше оценки $\Delta_L = 7.379$ в 2.95 раза при $\varepsilon\ = 0.3$, что свидетельствует о преимуществе предложенного подхода к построению приближенного синтеза оптимального управления. При других величинах окрестности ситуация аналогичная.

7. Заключение

В изложенной выше работе предложен метод приближенного синтеза оптимального управления для ДНС в окрестности полученной ранее относительной минимали. Основой для его разработки служат достаточные условия относительного минимума ДНС, при этом построение ведется для исходной, а не линеаризованной системы.

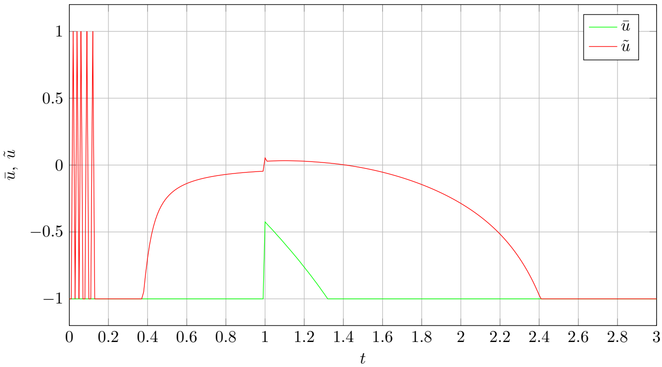

Рисунок 8. Графики управлений

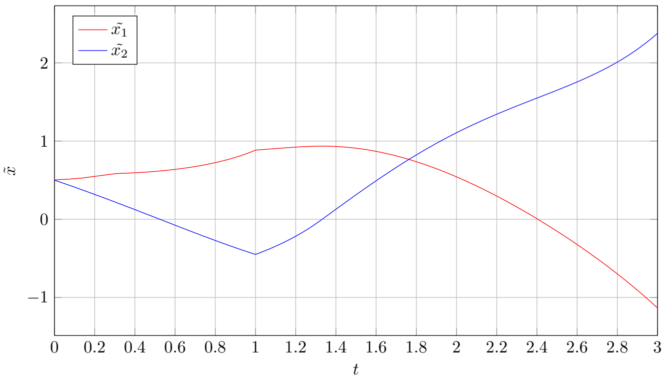

Рисунок 9. Переменные состояния

Преимущество предлагаемого подхода иллюстрируется примером, в качестве критерия точности построения служит аналог оценки Кротова.

Авторы признательны С. В. Знаменскому за конструктивные замечания, позволившие улучшить качество статьи О. В. Фесько за помощь в получении относительной минимали.

Список литературы

[1] С. В. Емельянов (ред.) *Теория систем с переменной структурой*.– М.: Наука.– 1970.– 592 с. ↑140

[2] Гурман В. И. *К теории оптимальных дискретных процессов* //

Автоматика и телемеханика.– 1973.– № 6.– с. 53–58. ↑140

[3] Васильев С. Н. *Теория и применение логико-управляемых систем // Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (Москва, 29–31 января 2003), М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.– 2003.– с. 23–52. ↑140

[4] Бортаковский А. С. *Достаточные условия оптимальности детерминированными логико-динамическими системами*, Информатика. Сер. Автоматизация проектирования, М.: ВИМИ.– 1992.– с. 72–79. ↑140

[5] Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*.– М.: Наука.– 2005.– ISBN 978-5-9710-5725-3.– 429 с. ↑140

[6] Расина И. В. *Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам*, ВМСППС'2017 (24–31 мая 2017 г., Алушта, Крым), М.: Изд-во МАИ.– 2017.– с. 699–701. ↑140, 143

[7] Летов А. М. *Динамика полета и управление*.– М.: Наука.– 1969.– 360 с. ↑140, 143

[8] Расина И. В. *Метод оценки приближенно-оптимального синтеза в сложных дискретных процессах // Методы оптимизации и их приложения*, Иркутск: СЭИ СО АН СССР.– 1982.– с. 98–108. ↑140, 143, 148

[9] Летов А. М. *Аналитическое конструирование регуляторов, II //* Автоматика и телемеханика.– 1960.– Т. **21**.– № 5.– с. 436–441. ↑140

[10] Kalman R. *Contributions to the theory of optimal control //* Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.– 1960.– Vol. **5**.– pp. 102–119. ↑140

[11] Кротов В. Ф. *Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем //* ДАН СССР.– 1967.– Т. **172**.– № 1.– с. 18–21. ↑141

[12] Расина И. В., Фесько О. В. *Достаточные условия относительного минимума для дискретно-непрерывных систем //* Программные системы: теория и приложения.– 2020.– Т. **11**.– № 2.– с. 47–59. doi ↑146, 147

[13] Рудин У. *Основы математического анализа*.– М.: Мир.– 1976.– 321 с. ↑146

[14] Беллман Р. *Введение в теорию матриц*.– М.: Наука.– 1969.– 368 с. ↑149

[15] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*.– М.: Мир.– 1970.– 720 с. ↑149

[16] Гурман В. И., Расина И. В. *О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума //* Автоматика и телемеханика.– 1979.– № 10.– с. 12–18. ↑149

[17] Мерриэм К. У. *Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью*.– М.: Мир.– 1967.– 552 с. ↑149

[18] Расина И. В., Фесько О. В. *Метод улучшения управления первого порядка для дискретно-непрерывных систем* // Программные системы: теория и приложения.– 2018.– Т. **9**.– № 3.– с. 65–76. ↑150

[19] Кротов В. Ф., Гурман В. И. *Методы и задачи оптимального управления*.– М.: Наука.– 1973.– 448 с. ↑156

Поступила в редакцию 14.10.2022;
одобрена после рецензирования 09.11.2022;
принята к публикации 10.11.2022.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Информация об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН и Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва, Российская Федерация, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 130 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968

e-mail: ***irinarasina@gmail.com***

Александр Олегович Блинов

к.т.н., доцент кафедры информационных технологий, искусственного интеллекта и общественно-социальных технологий цифрового общества факультета политических и социальных технологий ФГБОУ ВО «Российский государственный социальный университет», Москва, Российская Федерация

0000-0002-5713-2325

e-mail: *aleblinov@yandex.ru*

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ISSN 2079-3316 **PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS** **vol. 13**, No 4(55), pp. 139–162
Research Article OPTIMIZATION METHODS AND CONTROL THEORY

UDC 517.977517.977
10.25209/2079-3316-2022-13-4-139-162

Approximate synthesis of optimal control in the vicinity of the relative minimum for discrete-continuous systems

Irina Viktorovna **Rasina**[1], Alexander Olegovich **Blinov**[2]

[1] Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia
[1] Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia
[2] Russian State Social University, Moscow, Russia
[1]✉*irinarasina@gmail.com* *(learn more about the authors in Russian on p. 159)*

Abstract. A way of constructing a method of approximate synthesis of optimal control for discrete-continuous systems (DNS) based on sufficient conditions for a relative minimum is considered. The construction is carried out in the vicinity of the previously found relative minimum. An estimate of the accuracy of such a construction is given and an illustrative example is given. (*In Russian*).

Key words and phrases: discrete-continuous systems, sufficient optimality conditions, approximate optimal control synthesis, relative minimum

2020 *Mathematics Subject Classification*: 49M30; 49N10

Acknowledgments:

[1]The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00202)

For citation: Irina V. Rasina, Alexander O. Blinov. *Approximate synthesis of optimal control in the vicinity of the relative minimum for discrete-continuous systems* // Program Systems: Theory and Applications, 2022, **13**:4(55), pp. 139–162. (*In Russian*). http://psta.psiras.ru/read/psta2022_4_139-162.pdf

References

[1] S. V. Yemel'yanov (ed.). *Theory of Systems with Variable Structures*, Nauka, M., 1970 (in Russian), 592 pp.↑140

[2] V. I. Gurman. “Theory of optimum discrete processes”, *Autom. Remote Control*, **34**:7 (1973), pp. 1082–1087. ↑140

[3] S. N. Vassilyev. “Theory and application of logic-based controlled systems”, *Proceedings of the International Conference Identification and Control Problems*, SICPRO'03 (Moskva, 29–31 yanvarya 2003, Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN), Institute of control sciences, M., 2003, pp. 53–58 (in Russian).↑140

[4] A. S. Bortakovskii. “Sufficient optimality conditions for control of deterministic logical-dynamic systems”, Informatika, Ser. Computer Aided Design, vol. **2**–**3**, VIMI, M., 1992, pp. 72–79 (in Russian).↑140

[5] B. M. Miller, Ye. Ya. Rubinovich. *Optimization of the Dynamic Systems with Pulse Controls*, Nauka, M., 2005, ISBN 978-5-9710-5725-3 (in Russian), 429 pp.↑140

[6] I. V. Rasina. “Discrete-continuous systems with intermediate criteria”, *Materialy XX Yubileynoy Mezhdunarodnoy konferentsii po vychislitel'noy mekhanike i sovremennym prikladnym programmnym sistemam*, VMSPPS'2017 (24–31 maya 2017 g., Alushta, Krym), Izd-vo MAI, M., 2017, pp. 699–701 (in Russian).↑140, 143

[7] A. M. Letov. *Flight Dynamics and Control*, Nauka, M., 1969 (in Russian), 360 pp.↑140, 143

[8] I. V. Rasina. “Method for estimating approximately optimal synthesis in complex discrete processes”, *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya*, SYeI SO AN SSSR, Irkutsk, 1982, pp. 98–108 (in Russian).↑140, 143, 148

[9] A. M. Letov. “Analytical design of controllers, II”, *Avtomatika i telemekhanika*, **21**:5 (1960), pp. 436–441 (in Russian). ↑140

[10] R. Kalman. “Contributions to the theory of optimal control”, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, **5** (1960), pp. 102–119.↑140

[11] V. F. Krotov. “Sufficient conditions for the optimality of discrete control systems”, *DAN SSSR*, **172**:1 (1967), pp. 18–21 (in Russian). ↑141

[12] I. V. Rasina, O. V. Fesko. “Sufficient relative minimum conditions for discrete-continuous control systems”, *Program Systems: Theory and Applications*, **11**:2 (2020), pp. 61–73. doi↑146, 147

[13] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, 1976, ISBN 978-0070542358, 342 pp.↑146

[14] R. Bellman. *Introduction To Matrix Analysis*, McGraw-Hill series in matrix theory, McGraw-Hill, 1960, ISBN 9781124059969.↑149

[15] Ordinary Differential Equations, 1964, 612 pp.↑149

[16] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "On practical applications of conditions sufficient for a strong relative minimum", *Autom. Remote Control*, **40**:10 (1980), pp. 1410–1415.↑149

[17] Merriam III C. W.. *Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems*, 1st ed., McGraw Hill, 1964, 391 pp.↑149

[18] I. V. Rasina, O. V. Fes'ko. "First order control improvement method for discrete continuous systems", *Program Systems: Theory and Applications*, **9**:3 (2018), pp. 65–76 (in Russian). ↑150

[19] V. F. Krotov, V. I. Gurman. *Methods and Problems of Optimal Control*, Nauka, M., 1973 (in Russian), 448 pp.↑156