

С. П. Сорокин

Бипозиционные решения неравенств Гамильтона–Якоби в неклассических линейно-квадратичных задачах оптимального управления

Аннотация. Исследуются неклассические линейно-квадратичные задачи оптимального управления. Доказаны необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности, оперирующие сильно монотонными бипозиционными решениями неравенств Гамильтона–Якоби, параметрически зависящими от начальных или конечных позиций динамических систем. Бипозиционные экстремальные управления получены в явном виде, предложенный метод иллюстрирован примером.

Ключевые слова и фразы: сильно монотонные функции типа Ляпунова, канонические условия оптимальности, линейно-квадратичные задачи оптимального управления.

1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена исследованию неклассических задач оптимального управления линейно-квадратичной структуры. Специфика таких задач состоит в наличии смешанных ограничений на траекторию в промежуточные, вообще говоря, не фиксированные моменты времени и не разделенной зависимости целевого функционала от значений траектории в эти моменты. Эти особенности приводят к новым свойствам оптимальных процессов и требуют развития методов решения таких задач, поскольку традиционный для задач построения оптимального регулятора подход — метод динамического программирования Беллмана [1] — не применим для задач указанного класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00672-а, № 12-01-31252-мол-а, № 12-01-31391-мол-а).

Исследование основано на применении так называемой канонической теории оптимальности Гамильтона–Якоби [2, 3], обобщающей родственные подходы В. Ф. Кротова и К. Каратеодори [1, 4, 5]. Канонические условия оптимальности основаны на внешних оценках множеств достижимости динамических систем, которые строятся с помощью сильно монотонных функций типа Ляпунова (L -функций) — решений неравенств Гамильтона–Якоби, не убывающих вдоль всех траекторий рассматриваемой системы [6]. В работах [7, 8] введен класс *бипозиционных* L -функций, дополнительно зависящих от начальной или конечной позиций динамической системы. Использование этого класса функций привело к модификации канонической теории оптимальности, более эффективной для задач оптимального управления с не разделенными концевыми ограничениями и функционалами общего вида.

В статье рассматривается следующая линейно-квадратичная задача оптимального управления (P):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \\ J[x, u] &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Omega(t, x(t), u(t)) dt + \omega(q) \rightarrow \min,\end{aligned}$$

где Ω , ω — линейно-квадратичные функции вида

$$\begin{aligned}\Omega(t, x, u) &= (x'P(t)x + 2u'Q(t)x + u'R(t)u + 2p'(t)x + 2r'(t)u), \\ \omega(q) &= \frac{1}{2}q'Dq + d'q, \quad q = (x(t_1), x(t_0)),\end{aligned}$$

все матричные функции непрерывны на отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$, причем P , R , D симметричны и R положительно определена.

От классической линейно-квадратичной задачи построения оптимального регулятора [9, 10] задача (P) отличается общей зависимостью терминанта ω от x_0, x_1 и присутствием линейных слагаемых в Ω, ω .

2. Канонические условия оптимальности с линейно-квадратичной бипозиционной L -функцией

Перепишем задачу (P) в форме Майера:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \dot{x} = Ax + Bu, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \\
 (2) \quad & \dot{y} = \frac{1}{2} \left(x'Px + 2u'Qx + u'Ru + 2p'x + 2r'u \right), \quad y(t_0) = 0, \\
 & J[\sigma] = \frac{1}{2} q'Dq + d'y(t_1) \rightarrow \inf.
 \end{aligned}$$

Здесь $\sigma = (x, y, u)$ — процесс системы (1), (2), состоящий из кусочно-гладкой траектории (x, y) и кусочно-непрерывного управления u , удовлетворяющих на Δ системе.

Будем исследовать задачу (P) с применением одной бипозиционной линейно-квадратичной сильно возрастающей L -функции вида

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & V(t, x, y; x_0) = \frac{1}{2} (x \ x_0) S(t) \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} + \\
 & + w'_1(t)x + w'_0(t)x_0 + c(t) - v(x_0) + y, \\
 & S(t_1) = D, \quad w_1(t_1) = d_1, \quad w_0(t_1) = d_0, \quad c(t_1) = 0, \\
 & v(x_0) = \frac{1}{2} (x_0 \ x_0) S(t_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + w'_1(t_0)x_0 + w'_0(t_0)x_0 + c(t_0).
 \end{aligned}$$

Здесь $S(t) = (S_{ij}(t))$ — $2n \times 2n$ симметричная матричная функция с $n \times n$ блоками S_{ij} , $i, j = 1, 2$, n -мерные вектор-функции w_1, w_0 и функция c непрерывно дифференцируемы, функция $v(x_0)$ включена для учета краевого условия наведения $V(t_0, x_0, y_0; x_0) \geq 0$ [7, 8].

Для конкретизации функций S, w_1, w_0, c , подставим функцию V в неравенство Гамильтона–Якоби для гладких сильно возрастающих L -функций

$$(4) \quad V_t + h(t, x, V_x, V_y) \geq 0 \quad \forall (t, x, x_0) \in \Delta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

где

$$\begin{aligned} h(t, x, V_x, V_y) &= \min_{u \in \mathbb{R}^m} H(t, x, V_x(t, x; x_0), u) = \\ &= \min_{u \in \mathbb{R}^m} \left[V'_x (Ax + Bu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} V'_y (x'Px + 2u'Qx + u'Ru + 2p'x + 2r'u) \right]. \end{aligned}$$

Вычисляя нижний гамильтониан h , найдем V -экстремальное управление

$$(5) \quad \begin{aligned} u_*[t, x; x_0] &= u_*(t, x, V_x(t, x; x_0)) = \\ &= -R^{-1} \left((Q + B'S_{11})x + B'S_{12}x_0 + B'w_1 + r \right). \end{aligned}$$

Неравенство Гамильтона–Якоби (4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} x' \left(\dot{S}_{11} + P + S_{11}A + A'S_{11} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(Q + B'S_{11}) \right) x + \\ &+ x' \left(\dot{S}_{12} + A'S_{12} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}B'S_{12} \right) x_0 + \\ &+ \frac{1}{2} x'_0 \left(\dot{S}_{22} - (B'S_{12})'R^{-1}(B'S_{12}) \right) x_0 + \\ &+ x' \left(\dot{w}_1 + A'w_1 + p - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) \right) + \\ &+ x'_0 \left(\dot{w}_0 - (B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) \right) + \\ &+ \left(\dot{c} - \frac{1}{2} (B'w_1 + r)'R^{-1}(B'w_1 + r) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\forall (t, x, x_0) \in \Delta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Выберем искомые функции так, чтобы занулить каждое из шести слагаемых в левой части неравенства, т.е. потребуем, чтобы V удовлетворяла уравнению Гамильтона–Якоби. Придем к следующей

системе дифференциальных уравнений на отрезке Δ :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \dot{S}_{11} + P + S_{11}A + A'S_{11} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(Q + B'S_{11}) = 0, \\
 & \dot{S}_{12} + A'S_{12} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}B'S_{12} = 0, \\
 & \dot{S}_{22} - (B'S_{12})'R^{-1}(B'S_{12}) = 0, \\
 & \dot{w}_1 + A'w_1 + p - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) = 0, \\
 & \dot{w}_0 - (B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) = 0, \\
 & \dot{c} - \frac{1}{2}(B'w_1 + r)'R^{-1}(B'w_1 + r) = 0
 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$S_{ij}(t_1) = D_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad w_1(t_1) = d_1, \quad w_0(t_1) = d_0, \quad c(t_1) = 0.$$

Отметим, что уравнение (6) является матричным уравнением типа Риккати, решение которого может не существовать на всем отрезке Δ , но мы предположим, что оно существует на Δ ; тогда остальные линейные уравнения имеют решения на Δ , а функция V удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби и условию $V(t_0, x_0, y_0; x_0) = 0$. Следовательно, она является бипозиционной сильно возрастающей L -функцией.

Установим свойства функции V .

ЛЕММА 1. а) Если процесс $\sigma = (x, y, u)$ порожден V -экстремальным управлением (5), т.е. удовлетворяет равенству

$$(7) \quad u(t) = u_*(t, x(t), V_x(t, x(t), x(t_0))),$$

то $V(t, x(t), y(t); x(t_0)) \equiv 0$ на Δ .

б) Если процесс σ не порожден V -экстремальным управлением, т.е. не удовлетворяет условию (7), то $V(t, x(t), y(t); x(t_0)) \geq 0$ на Δ и $V(t_1, x(t_1), y(t_1); x(t_0)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Утверждение следует из равенства

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t), y(t); x(t_0)) = 0,$$

справедливого в силу того, что функция V удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, а V -экстремальное управление доставляет строгий глобальный минимум по u функции $H(t, x, V_x(t, x; x_0), u)$ во всех точках (t, x, x_0) .

б) Если процесс σ не порожден V -экстремальным управлением, то найдется интервал $(a, b) \subset \Delta$, на котором равенство (7) нарушается, а тогда $\frac{d}{dt}V(t, x(t), y(t); x(t_0)) > 0$ на (a, b) . $\square$

Из леммы 1 и вида функции V (см. граничные условия в (3) и определение функции $v(x_0)$) следует, что для любого процесса σ выполняется неравенство

$$J[\sigma] = V(t_1, x(t_1), y(t_1); x(t_0)) + v(x(t_0)) \geq v(x(t_0)) \geq \inf_{\mathbb{R}^n} v(x_0).$$

Отсюда вытекает, что если функция v достигает своего минимума в некоторой точке $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, а процесс $\bar{\sigma}$ порожден V -экстремальным управлением (5) и удовлетворяет начальному условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, то

$$J[\bar{\sigma}] = \min v(x_0) = v(\bar{x}_0),$$

т.е. $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс. Таким образом, вопрос отыскания оптимальных процессов в задаче (P) сводится к нахождению точек минимума функции

$$v(x_0) = \frac{1}{2}x_0' \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right) x_0 + (w_1(t_0) + w_0(t_0))' x_0 + c(t_0).$$

ЛЕММА 2. а) Функция $v(x_0)$ имеет единственную точку минимума $\bar{x}_0$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма $x_0' \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right) x_0$ положительно определена, причем имеет место равенство

$$(8) \quad \bar{x}_0 = - \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right)^{-1} (w_1(t_0) + w_0(t_0)).$$

б) Функция $v(x_0)$ имеет множество точек минимума

$$(9) \quad \left\{ \bar{x}_0 \mid \sum_{i,j} S_{ij} \bar{x}_0 = 0 \right\}$$

тогда и только тогда, когда квадратичная форма $x_0' \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right) x_0$ положительно полуопределена и

$$(10) \quad (w_1(t_0) + w_0(t_0))' x_0 = 0 \quad \forall x_0 : x_0' \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right) x_0 = 0.$$

Из рассуждений, приведенных выше, и леммы 2 вытекают следующие достаточные условия оптимальности в задаче (P).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия:

а) существует симметричная матричная функция $S_{11}(t)$, удовлетворяющая на Δ матричному уравнению Риккати (6) с граничным условием $S_{11}(t_1) = D_{11}$;

б) квадратичная форма $x'_0(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0))x_0$ положительно определена.

Тогда существует единственный оптимальный процесс $\bar{\sigma}$, порожденный V -экстремальным управлением (5) и начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, где вектор $\bar{x}_0$ определен формулой (8), а значение задачи (P) удовлетворяет равенству

$$\min(P) = -\frac{1}{2}(w_1(t_0) + w_0(t_0))' \left(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0) \right)^{-1} (w_1(t_0) + w_0(t_0)) + c(t_0).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия:

а) существует симметричная матричная функция $S_{11}(t)$, удовлетворяющая на Δ матричному уравнению Риккати (6) с граничным условием $S_{11}(t_1) = D_{11}$;

б) квадратичная форма $x'_0(\sum_{i,j} S_{ij}(t_0))x_0$ положительно полуопределена и выполнено условие (10).

Тогда существует множество оптимальных процессов $\bar{\sigma}$, порожденных V -экстремальным управлением (5) и начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, где вектор $\bar{x}_0$ определяется формулой (9), а значение задачи (P) удовлетворяет равенству

$$\min(P) = c(t_0).$$

Приведенные достаточные условия оптимальности теорем 1, 2 могут показаться жесткими, однако дальнейший анализ показывает, что в предположении полной управляемости системы (1) они становятся и необходимыми. Для обоснования этого факта используются результаты из [9–11].

3. Пример

Сначала рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления со свободными концами траектории без

ограничений на управление:

$$\dot{x} = u, \quad J = \int_0^T u^2(t) dt + \omega(x(0), x(T)) \rightarrow \inf,$$

$$\omega(x_0, x_T) = x_0^2 + 4x_0x_T + x_T^2.$$

Заметим, что концевая форма ω здесь знакопеременная, так что нулевой процесс не обязательно оптимален. Перепишем задачу в форме Майера:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = u^2, \quad y(0) = 0,$$

$$J[\sigma] = y(T) + \omega(x(0), x(T)) \rightarrow \inf.$$

Будем искать разрешающую функцию в виде

$$V(t, x, y; x_0) = (x, x_0)S(t) \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} - v(x_0) + y, \quad S(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

где 2×2 симметричная матричная функция $S(t) = (S_{ij}(t))$ непрерывно дифференцируема и функция $v(x_0)$ непрерывна.

Во-первых, V -экстремальное бипозиционное управление (5) определяется равенством

$$(11) \quad u_*[t, x; x_0] = -\frac{V_x}{2} = -S_{11}(t)x - S_{12}(t)x_0,$$

а дифференциальная система типа Риккати имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= S_{11}^2, & S_{11}(T) &= 1, \\ \dot{S}_{12} &= S_{11}S_{12}, & S_{12}(T) &= 2, \\ \dot{S}_{22} &= S_{12}^2, & S_{22}(T) &= 1. \end{aligned}$$

Её решение приводит к бипозиционной L -функции

$$V(t, x, y; x_0) = \frac{1}{T+1-t}x^2 + \frac{4}{T+1-t}xx_0 + \frac{4}{T+1-t}x_0^2 - \frac{9}{T+1}x_0^2 + y.$$

Применение теорем 1 и 2 приводит к следующим выводам:

1. Если $T < 2$, то $\min(P) = 0$ и глобально оптимальным является единственный процесс $\bar{\sigma} = 0$.
2. Если $T = 2$, то $\min(P) = 0$ и существует бесконечное множество оптимальных процессов $\tilde{\sigma}(x_0)$: $\tilde{u}(t, x_0) \equiv -x_0$, $\tilde{x}(t, x_0) = x_0(1-t)$, $\tilde{y}(t, x_0) = x_0^2t$, $x_0 \in \mathbb{R}$, полученных с помощью V -экстремального управления (11).

3. При $T > 2$ $\inf(P) = -\infty$, и оптимального процесса не существует. Для этого достаточно рассмотреть минимизирующую последовательность процессов $\{\sigma^k\}$: $u^k(t) = k$, $x^k(t) = kt - kT/2$, $y^k(t) = k^2t$, для которой $J[\sigma^k] \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Очевидно, что нулевой экстремали соответствует сопряженная точка $T = 2$ [12, 13], на которую (по аналогии со случаем фиксированного x_0) указывает неограниченность значения исходной задачи при $T > 2$. Мы получили этот вывод автоматически в процессе решения задачи, без специальных критериев проверки условия Якоби отсутствия сопряженных точек для фиксированной экстремали. (Впрочем, для задач со свободным x_0 такие критерии нам не известны.)

Модифицируем пример, введя ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$. Разберем этот вариант, используя канонические достаточные условия оптимальности с множеством сильно возрастающих L -функций [7, 8].

Ясно, что при $T < 2$ процесс $\bar{\sigma} = 0$ останется глобально оптимальным, а при $T = 2$ оптимальными будут процессы $\bar{\sigma}(x_0)$ с $x_0 \in [-1, 1]$ (остальные процессы серии $\bar{\sigma}(x_0)$ не допустимы).

Пусть теперь $T > 2$. Отметим, что теперь

$$h(t, x, \psi) = \begin{cases} \psi_x + \psi_y, & \psi_x + 2\psi_y < 0, \\ -\psi_x + \psi_y, & \psi_x - 2\psi_y > 0, \\ -\frac{\psi_x^2}{4\psi_y}, & \left| \frac{\psi_x}{2\psi_y} \right| \leq 1 \text{ и } \psi_y \neq 0, \\ 0, & \psi_x = 0 \text{ и } \psi_y = 0, \end{cases}$$

а управление, минимизирующее функцию Понтрягина H , имеет вид

$$u(t, x, \psi) = \begin{cases} 1, & \psi_x + 2\psi_y < 0, \\ -1, & \psi_x - 2\psi_y > 0, \\ -\frac{\psi_x}{2\psi_y}, & \left| \frac{\psi_x}{2\psi_y} \right| \leq 1 \text{ и } \psi_y \neq 0, \\ \text{любое } |u| \leq 1, & \psi_x = 0 \text{ и } \psi_y = 0. \end{cases}$$

Во-первых, возьмем четыре линейные сильно возрастающие L -функции

$$\begin{aligned} V^1(t, x; x_0) &= t - x + x_0, & V^2(t, x; x_0) &= t + x - x_0, \\ V^3(y) &= y, & V^4(t, y) &= t - y, \end{aligned}$$

дающие точное априорное описание множества достижимых точек каждого из уравнений управляемой системы. Далее, возьмем семейство (по ψ) сильно возрастающих L -функций, линейных по фазам:

$$V^\psi(t, x, y; x_0) = \psi(x - x_0) + \frac{\psi^2}{4}t + y, \quad |\psi| \leq 2.$$

Поскольку все L -функции линейны, то применяются достаточные условия, близкие к принципу максимума Понтрягина. Отметим, что конструкция функций V^ψ использует прием нормировки L -функций (см. [3, 4]).

В соответствие с достаточными условиями оптимальности канонической теории необходимо рассмотреть вспомогательную *концевую* задачу, допустимое множество которой определяется множествами надуровня функций V и представляет собой внешнюю оценку множества точек, соединимых траекториями управляемой системы. Чтобы не иметь в конечной задаче бесконечного числа ограничений, от семейства L -функций $\{V^\psi \mid |\psi| \leq 2\}$ перейдем к его нижней огибающей — к функции

$$V^5(t, x, y; x_0) = V_*(t, x, y; x_0) = \begin{cases} -\frac{(x - x_0)^2}{t} + y, & |x - x_0| < t, \\ -2|x - x_0| + t + y, & |x - x_0| \geq t. \end{cases}$$

Множество функций V^i , $i = \overline{1, 5}$, обозначим через $\mathcal{V}$ и рассмотрим соответствующую концевую задачу ($EP(\mathcal{V})$):

$$\begin{aligned} y_1 + x_0^2 + 4x_0x_1 + x_1^2 &\rightarrow \inf; \\ \frac{(x_1 - x_0)^2}{T} - y_1 &\leq 0, \quad |x_1 - x_0| \leq T, \quad y_1 \in [0, T]. \end{aligned}$$

Эта задача имеет два решения, через которые с помощью $\mathcal{V}$ -экстремального бипозиционного управления

$$u_*[t, x; x_0] = \begin{cases} -1, & x - x_0 \leq -t, \\ \frac{x - x_0}{t}, & |x - x_0| < t, \\ 1, & x - x_0 \geq t, \end{cases}$$

определяются глобально оптимальные процессы

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= (x^1(t) = t - T/2, \ y^1(t) = t, \ u^1(t) \equiv 1), \\ \sigma^2 &= (x^2(t) = -t + T/2, \ y^2(t) = t, \ u^2(t) \equiv -1). \end{aligned}$$

Заметим, что функции V^ψ представимы в виде разности $\varphi(t, x, y) - \varphi(t_0, x_0, y_0)$, т.е. порождены традиционными φ , однако их нижняя огибающая V_* этим свойством не обладает.

При исследовании случая $T > 2$ можно использовать и другое семейство L -функций (вместо V^ψ):

$$\tilde{V}^\psi(t, x, y; x_0) = \psi(x - x_0) + t(|\psi| - 1) + y, \quad |\psi| \geq 2,$$

дополненное априорными оценками.

Заключение

Представленные в статье результаты распространяемы на задачи управления дискретно-непрерывными (гибридными) системами линейно-квадратичной структуры, а также могут быть использованы для разработки численных методов решения таких задач.

Список литературы

- [1] Vinter R.B. Optimal Control. Boston : Birkhauser, 2000. — 520 p. ↑1
- [2] Дыхта В. А. *Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении* // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения, 2006. Т. 110, с.76–108 ↑1
- [3] Дыхта В. А. *Неравенства Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение* // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки, 2010. Т. 15, № 15, с.405–425 ↑1, 3
- [4] Krotov V.F. Global Methods in Optimal Control Theory. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 195. New York : Marcel Dekker, 1996. — 384 p. ↑1, 3
- [5] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, Физматлит, 1997. — 288 с. ↑1
- [6] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. Grad. Texts in Math., Vol. 178. New York : Springer-Verlag, 1998. — 276 p. ↑1
- [7] Дыхта В. А., Сорокин С. П. *Позиционные решения неравенств Гамильтона–Якоби в задачах управления дискретно-непрерывными системами* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 6, с.48–63 ↑1, 2, 3
- [8] Дыхта В. А., Сорокин С. П. *Неравенства Гамильтона–Якоби и условия оптимальности в задачах управления с общими конечными ограничениями* // Автоматика и телемеханика, 2011, № 9, с.13–27 ↑1, 2, 3
- [9] Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учеб. пособие. СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 2003. — 540 с. ↑1, 2

- [10] Clements D.J., Anderson B.D.O. Singular Optimal Control: The Linear-Quadratic Problem. Lecture Notes in Control and Information Sciences / ed. Balakrishan A. V., Thoma M. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1978. — 93 p. ↑1
- [11] Pachter M. *Revisit of linear-quadratic optimal control* // Journal of Optimization Theory and Applications, 2009. **Vol. 140**, p. 301–314 ↑2
- [12] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М. : Физматлит, 1961. — 228 с. ↑3
- [13] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. — 280 с. ↑3

Рекомендовал к публикации

Программный комитет Молодёжной школы-семинара

Модели и методы исследования гетерогенных систем

Об авторе:



С.П. Сорокин

Сорокин Степан Павлович, м.н.с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134

e-mail:

sorsp@mail.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

С. П. Сорокин. *Бипозиционные решения неравенств Гамильтона–Якоби в неклассических линейно-квадратичных задачах оптимального управления* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 5(14), с. 33–44.

URL:

http://psta.psiras.ru/read/psta2012_5_33-44.pdf

S. Sorokin. *Bi-positional solutions of Hamilton–Jacobi inequalities for non-classical linear-quadratic optimal control problems.*

ABSTRACT. Non-classical linear-quadratic optimal control problems are considered. New necessary and sufficient global optimality conditions are proved. These conditions use strongly monotone bi-positional solutions of Hamilton–Jacobi inequalities, which parametrically depend on initial or final data. Bi-positional control is obtained in explicit form. The method is illustrated by an example.

Key Words and Phrases: strongly monotone Lyapunov-like functions, canonical optimality conditions, linear-quadratic optimal control problems.