

А. М. Цирлин, А. А. Ахременков

## Об оптимальной организации систем охлаждения на примере платы суперкомпьютера

Аннотация. Данная работа посвящена анализу систем охлаждения с точки зрения термодинамики. Найдено минимальное возможное производство энтропии, и получены условия, необходимые для достижения этого уровня.

*Ключевые слова и фразы:* системы охлаждения, производство энтропии, оптимизация.

### Введение

Расчету систем теплообмена посвящена обширная литература (см. [1–7]) и др. В большинстве своем эти работы основаны на эвристических алгоритмах, а значит не позволяют получить количественные критерии возможности усовершенствования системы. В работе [8] получена оценка снизу для диссипации в системах многопоточного теплообмена с заданной тепловой нагрузкой и суммарным коэффициентом теплообмена, а так же организация системы, реализующая эту оценку. Показано, что для ньютоновских законов теплообмена нижняя граница может быть достигнута, если посредством распределения поверхности и тепловой нагрузки между теплообменниками, выбора входных температур и водяных эквивалентов удалось выполнить два условия:

- отношение абсолютных температур контактирующих потоков в каждой точке должно быть одинаково;
- температуры потоков, покидающих теплообменник, должны быть одинаковы.

Системы охлаждения отличаются от систем теплообмена тем, что для каждого  $i$ -го охлаждаемого устройства задан отбираемый тепловой поток  $q_i$  и рабочая температура  $T_i$ , требуется передать от охлаждаемых устройств к хладагенту некоторый суммарный поток теплоты  $q$  так, чтобы поверхность охлаждения (размеры системы) и

расход хладагента  $g$  не превышали некоторого значения, температура хладагента на входе в систему  $T_0$  была не ниже заданной...

Оптимальная организация системы предполагает:

- распределение ограниченной поверхности контакта между отдельными охлаждаемыми устройствами;
- выбор последовательности контактов хладагента с охлаждаемыми устройствами;
- выбор значений  $T_0$ , расхода хладагента  $g$ , суммарной поверхности теплообмена.

Прежде чем переходить к решению этих задач проанализируем связь между переменными, характеризующими систему, и производством энтропии (диссипацией)  $\sigma$ . Эта связь показывает, что улучшение «естественных показателей» функционирования системы монотонно связано с  $\sigma$ , что позволяет формулировать задачу оптимальной организации системы охлаждения как задачу о минимуме диссипации.

Второй раздел посвящен решению задачи о минимальной необратимости для простейших структур и системы общего вида.

Наконец, в третьем разделе рассмотрена система охлаждения платы суперкомпьютера и алгоритм расчета системы охлаждения, близкой к оптимальной.

## 1. Связь показателей системы с производством энтропии

Будем считать заданными тепловые нагрузки и рабочие температуры охлаждающих устройств  $q_i, T_i, i = 1, 2, \dots, n$ , а так же предполагать, что хладагент поступает и выходит из системы одним потоком с температурой на входе  $T_0$ , на выходе  $T_f$  и водяным эквивалентом  $W = gC$ . Это значит, что мы предполагаем теплоемкость хладагента  $C$  неизменной. Внутри системы поток хладагента может разветвляться и перемешиваться.

Запишем уравнения термодинамических балансов системы [9].

—Энергетический баланс

$$(1) \quad W(T_f - T_0) = \sum_{i=1}^n q_i = q,$$

—Энтропийный баланс

$$(2) \quad W \ln \frac{T_f}{T_0} = \sigma = \sum_{i=1}^n q_i \left( \frac{1}{T_{si}} - \frac{1}{T_i} \right).$$

Здесь  $T_{si}$  - эффективная абсолютная температура хладагента при контакте с  $i$ -ой охлаждаемой системой. При фиксированной тепловой нагрузке  $q$

$$(3) \quad T_f = T_0 + \frac{q}{W}$$

и условие (2) примет вид

$$(4) \quad W \ln \left( 1 + \frac{q}{T_0 W} \right) = \sigma.$$

Рост  $\sigma$  приводит либо к росту водяного эквивалента хладагента при заданной его входной температуре  $T_0$ , либо к уменьшению его температуры  $T_0$  при заданном значении  $W$ . И то и другое нежелательно, так как хладагент в свою очередь поступает во внешний теплообменник, где охлаждается (обычно потоком воздуха в радиаторе либо в градирне) от температуры  $T_f$  до  $T_0$ . Чем больше  $W$  или чем ниже  $T_0$ , тем больше надо затратить во внешнем теплообменнике. Таким образом минимизация  $\sigma$  является естественным критерием качества организации системы.

Как следует из (2), величина  $\sigma$  целиком определяется значениями температур  $T_{si}$ , от которых зависят тепловые потоки  $q_i$  и движущие силы.

## 2. Условия минимальной диссипации

Пусть тепловые потоки пропорциональны разности температур

$$(5) \quad q_i = \alpha_i (T_i - T_{si}),$$

где  $\alpha_i$  - коэффициент теплообмена, пропорциональный поверхности контакта  $s_i$   $i$ -го охлаждаемого устройства с хладагентом.

Так как коэффициент пропорциональности между  $\alpha_i$  и  $s_i$  одинаков для всех  $i$ , ограничения на суммарную площадь эквивалентны ограничению на сумму  $\alpha_i$ , так что

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha.$$

Из равенства (5) следует, что

$$(7) \quad T_{si} = T_i - \frac{q_i}{\alpha_i},$$

$$(8) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n q_i \left( \frac{\alpha_i}{T_i \alpha_i - q_i} - \frac{1}{T_i} \right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha_i).$$

Будем искать минимум  $\sigma$  по  $\alpha_i > 0$ , при условии (6). Функция Лагранжа этой задачи сепарабельна

$$(9) \quad L = \sum_i (\sigma_i(\alpha_i) + \lambda^2 \alpha_i).$$

Условие ее стационарности по  $\alpha_i$  приводит к выражению

$$(10) \quad \frac{q_i^2}{(T_i \alpha_i - q_i)^2} = \lambda^2, i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$(11) \quad q_i(1 + \lambda) = T_i \alpha_i \Rightarrow \alpha_i^* = \frac{q_i}{T_i} (1 + \lambda).$$

С учетом ограничения (6), получим для распределения поверхностей контакта

$$(12) \quad \alpha_i^* = \alpha \frac{\frac{q_i}{T_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{T_j}}.$$

Это условие приводит к эквивалентному требованию для температур хладагента, которые соответствуют оптимальному распределению поверхности

$$(13) \quad T_{si} = T_i \left( 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{T_j}}{\alpha} \right) = T_i m(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом мы получили условия организации процесса охлаждения, к реализации которых следует стремиться.

Отметим, что в любой точке контакта отношение температур  $\frac{T_{si}}{T_i}$  постоянно и равно

$$(14) \quad m(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{T_j} < 1,$$

что соответствует принципам организации оптимального теплообмена, полученным в [8].

Найдем минимум  $\sigma$ , соответствующий условиям (12), (13). Для этого подставим в равенство (2)  $T_{si} = T_i m(\alpha)$ , получим

$$(15) \quad \sigma_{min} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} \left( \frac{1}{m(\alpha)} - 1 \right).$$

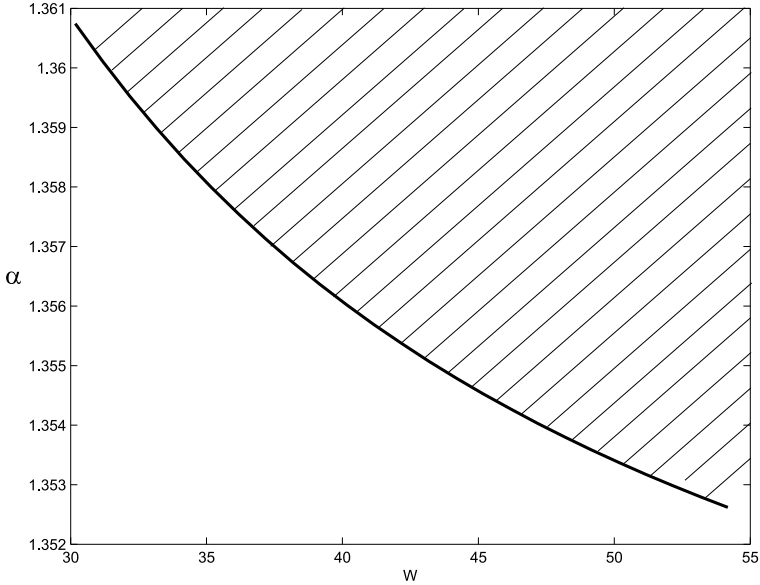


Рис. 1. Зависимость минимального коэффициента теплообмена от водяного эквивалента хладагента

Величины диссипации, меньшей чем  $\sigma_{min}$ , невозможно достичь, поэтому неравенство

$$(16) \quad W \ln \left( 1 + \frac{q}{T_0 W} \right) \geq \sigma_{min}.$$

выделяет реализуемые системы охлаждения. Граница множества реализуемости соответствует равенству в (16), которое с учетом вида  $m(\alpha)$ , примет форму

$$(17) \quad W \ln \left( 1 + \frac{q}{T_0 W} \right) = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} \right)^2}{\alpha - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i}}.$$

При фиксированных значениях  $q_i$  и  $T_i$  величина  $\alpha_{min}(W)$  равна

$$(18) \quad \alpha_{min}(W) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i}\right)^2}{W \ln\left(1 + \frac{q}{T_0 W}\right)}.$$

Отметим, что  $\alpha_{min}(W)$  при  $W \rightarrow \infty$  предел выражения (18) равен

$$(19) \quad \alpha_{min} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} + \frac{T_0}{q} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i}\right)^2.$$

На (рис.1) приведена зависимость  $\alpha_{min}(W)$  для следующих данных

$$q_1 = 200\text{Вт}, q_2 = 220\text{Вт}, T_0 = 293\text{К}, T_1 = 323\text{К}, T_2 = 310\text{К}, W = [30, 55]$$

Для реализуемых систем охлаждения значения  $\alpha$  лежат выше построенной кривой (заштрихованная область). В том частном случае, когда температуры охлаждаемых систем одинаковы ( $T_1 = T_2 = \dots = T_n = T$ ), температуры хладагента так же должны быть одинаковы и равны  $T_s = T_m(\alpha)$ .

Выясним, к чему приводят полученные условия для различных структур движения хладагента.

**Последовательная структура (рис.2).** Условие реализуемости требований минимальной диссипации в предположении, что эффективная температура контакта  $T_{si}$  равна средней из входной и выходной температур хладагента, примет форму

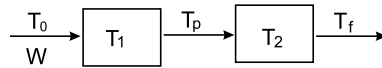


Рис. 2. Последовательная структура контакта охлаждаемых устройств с хладагентом

$$(20) \quad \frac{T_{s1}}{T_1} = \frac{T_{s2}}{T_2} = m(\alpha),$$

или

$$(21) \quad \frac{T_0 + \frac{q_1}{2W}}{T_1} = \frac{T_0 + \frac{q_1}{W} + \frac{q_2}{2W}}{T_2} = 1 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} \right).$$

Выразим  $T_0(W)$ ,  $\alpha(W)$  из равенства (21)

$$(22) \quad T_0(W) = \frac{T_1 T_2}{2(T_2 - T_1)W} \left( \frac{2q_1 + q_2}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} \right),$$

$$(23) \quad \alpha(W) = \frac{q_1 + T_1 \frac{q_2}{T_2}}{T_1 - T_0(W) - \frac{q_1}{2W}}.$$

При этом  $T_2 > T_1$ , и при их сближении  $W^* \rightarrow \infty$ . Значения  $\alpha_i^*$  выбирают по условию (12).

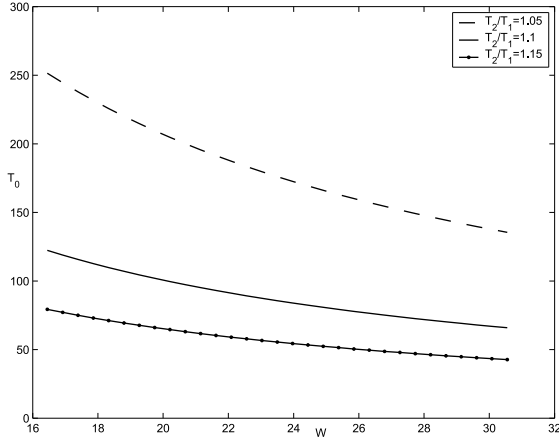


Рис. 3. Зависимость входной температуры хладагента от водного эквивалента потока

На (рис.3), (рис.4) приведен график зависимости  $T_0(W)$ ,  $\alpha(W)$  для следующих данных

$$q_1 = 200\text{Вт}, q_2 = 220\text{Вт}, T_1 = 323\text{К}.$$

В том случае, когда хладагент проходит последовательно  $k$  охлаждаемых устройств  $T_1 < T_2 < T_3 \dots$ , температуры контакта, соответствующие минимуму диссипации, должны иметь вид

$$(24) \quad T_{si} = \left( T_0 + \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) \left( 1 + \frac{q_i}{2W} \right), i = 1, 2, \dots, k,$$

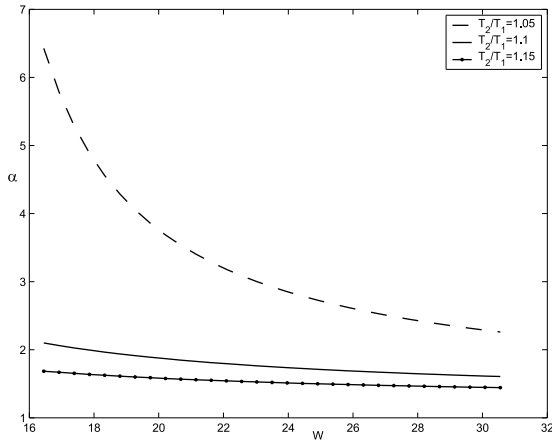


Рис. 4. Зависимость суммарного минимального коэффициента теплообмена от водяного эквивалента потока

а условия (21) примут форму  $k$  равенств

$$(25) \quad \frac{T_{s1}}{T_1} = \frac{T_{s2}}{T_2} = \dots = \frac{T_{sk}}{T_k} = m(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{T_j},$$

удовлетворить которым при  $k > 3$  в общем случае невозможно. Это означает, что нужно использовать параллельную схему контакта.

**Параллельная структура (рис.5).** Схема с параллельным контактом дает большие возможности удовлетворить требованиям минимальной диссипации, чем схема (рис.2), так как здесь можно выбирать каждый из водяных эквивалентов  $W_i$ .

Для  $k$  параллельных охлаждаемых устройств аналог условий (25) имеет вид

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{T_0}{T_1} \left(1 + \frac{q_1}{2W_1}\right) = \dots = \frac{T_0}{T_k} \left(1 + \frac{q_k}{2W_k}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{T_i}, \\ \sum_{i=1}^k W_i = W. \end{cases}$$



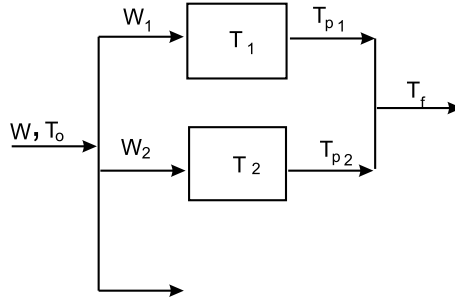


Рис. 5. Параллельная структура контакта охлаждаемых устройств с хладагентом

Таким образом  $(k + 3)$  искоемых переменных связаны друг с другом  $(k + 1)$ -м уравнением, число степеней свободы равно двум. В случае, когда любые две температуры охлаждаемых устройств одинаковы ( $T_1 = T_2$ ), единственным способом удовлетворить условия минимальной диссипации является использование параллельной структуры контакта. При этом

$$(27) \quad 1 + \frac{q_1}{2W_1} = 1 + \frac{q_2}{2W_2} = \frac{T}{T_0} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{T_i} \right).$$

Откуда следует, что нужно выбирать водяной эквивалент пропорциональным водяному потоку

$$W_i = r q_i.$$

Коэффициент пропорциональности  $r$  легко находят из (27).

Отметим, что из условий (26) следует, что все температуры хладагента на выходе из зон контакта  $T_{pi}$  должны быть одинаковы и равны  $T_f$ , что так же соответствует принципам организации оптимального теплообмена [8].

**Общий случай.** В общем случае система охлаждения может состоять из узлов параллельной и последовательной структуры, каждый из которых может состоять из нескольких охлаждаемых устройств. Для каждого узла последовательной структуры выполнение условий минимальной диссипации приводит к требованиям типа (21), в которых вместо температуры  $T_0$  стоит температура хладагента на входе узла  $T_{u0}(T_0, W)$ . При этом в правой части стоит величина  $m(\alpha)$

одна и та же для каждого охлаждаемого устройства в каждом из узлов. Переменные  $T_0, \alpha$  входят в условия минимальной диссипации для каждого узла, и реализовать эти условия в узле последовательной структуры можно лишь в случае, когда в нем число устройств либо узлов параллельной структуры равно двум (рис.6). Условия ми-

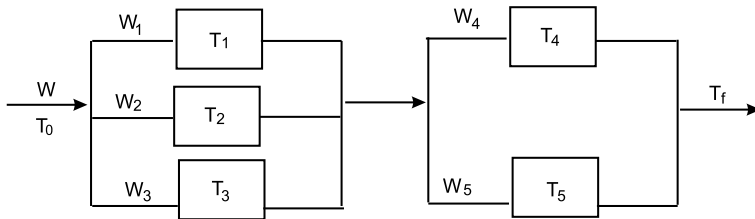


Рис. 6. Узлы охлаждения с параллельной и последовательной структурой

нимальной диссипации приводят к уравнениям, общее число которых равно числу охлаждаемых устройств. Число же переменных, подлежащих выбору, равно числу параллельных ветвей на (рис.6) (этих ветвей пять) минус число последовательно соединенных узлов на (рис.6) (их два) и плюс три переменных ( $\alpha, W, T_0$ ) общих для всей системы. Так что для схемы (рис.6) число степеней свободы равно  $(5+3)-5-2=1$ .

### 3. Алгоритм расчета системы охлаждения платы суперкомпьютера

В качестве иллюстративного примера использования полученных условий приведем расчет системы охлаждения платы суперкомпьютера. На плате имеется множество тепловыделяющих устройств, которые делятся на три группы:

- (1) процессоры — элементы с тепловыделением  $q_2=95$  Вт, работающие при номинальной температуре  $T_2=323$  К;
- (2) модуль памяти — элементы с тепловыделением  $q_1=70$  Вт и номинальной температурой  $T_1=313$  К;
- (3) модули питания и вспомогательные устройства — множество элементов с малым тепловыделением от 2 до 30 Вт, с сумарной тепловой нагрузкой 100 Вт.

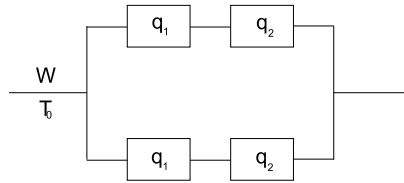


Рис. 7. Структура потоков системы охлаждения платы суперкомпьютера

На плате суперкомпьютера находятся два процессора и два модуля памяти — основные источники теплоты. Модули питания распределены по всей плате. Поскольку данные устройства невозможно выделить в одну группу для организации охлаждения, считаем, что их тепловая нагрузка равномерно распределена между процессорами и модулями памяти. Система охлаждения в этом случае состоит из двух параллельных ветвей, на каждой из которой последовательно расположен модуль памяти и процессор (рис.7). Поскольку тепловые нагрузки и температуры модулей равны, то поток хладагента между параллельными ветвями делится поровну  $W_1 = W_2 = 0.5W$ , температуры на выходе параллельных ветвей одинаковы. Найдем оптимальное значение температуры хладагента и коэффициента теплопередачи, для одной ветви теплообмена по формуле (22), (23)

$$W_1 = 14.8 \text{ Вт/К}, \quad T_0^* = 288,85 \text{ К},$$

$$\alpha^* = 8.47 \text{ Вт/К}, \quad \alpha_1^* = 3.9 \text{ Вт/К}, \quad \alpha_2^* = 4.57 \text{ Вт/К}.$$

Знание удельных коэффициентов теплопереноса позволяет найти оптимальные площади контакта каждого из охлаждаемых устройств с хладагентом, пропорциональные отношению мощности охлаждаемого устройства к его температуре по Кельвину.

#### 4. Заключение

При проектировании термодинамически-оптимальных систем охлаждения, следует выбирать поверхности охлаждения и структуру потоков хладагента, руководствуясь теми же двумя принципами, которые справедливы в системах многопоточного теплообмена:

- отношение абсолютных температур охлаждаемых устройств и хладагента должно быть одинаково для каждого из устройств;
- температуры потоков хладагента в точке их слияния должны быть одинаковы.

Если эти условия выполнены, то увеличить поток отбираемой теплоты можно лишь за счет увеличения общей поверхности контакта (коэффициента теплообмена), снижения температуры хладагента на входе в систему либо за счет увеличения его водяного эквивалента.

### Обозначения

- $q$  – поток теплоты, Вт;  
 $T$  – температура, К;  
 $g$  – расход хладагента, л/с;  
 $\sigma$  – производство энтропии, Дж/К;  
 $W$  – водяной эквивалент, Вт/К;  
 $\alpha$  – коэффициент теплообмена, Вт/К;  
 $s$  – площадь контакта, м<sup>2</sup>;

### Список литературы

- [1] Кафаров В. В., Мешалкин В. П., Перов В. Л. Математические основы автоматизированного проектирования химических производств. Москва : Химия, 1979. ↑
- [2] Каневец Г. Е. Проектирование и оптимизация теплообменных аппаратов на ЭЦВМ. Киев : АНУССР, 1970. ↑
- [3] Мухленов И. П. Химико-технологические системы. Ленинград : Химия, 1986. — 424 с. ↑
- [4] Bosnjakovic F. Technical Thermodynamics. New York : Holt R&W, 1965. ↑
- [5] Sieniutycz S., Jezowski J. Energy Optimization in Process Systems. UK : Elsevier LTD, 2009. ↑
- [6] Hartmann K., Hacker I., Rockstroh L. Modellierung und Optimierung verfahrenstechnischer Systeme. Berlin : Akademie-Verlag, 1978. ↑
- [7] Цирлин А. М. *Оптимальное управление необратимыми процессами тепло и массопереноса* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1991. **2**, с. 171–179. ↑
- [8] Цирлин А. М., Ахременков А. А., Григорьевский И. Н. *Минимальная необратимость, оптимальное распределение поверхности и тепловой нагрузки теплообменных систем* // Теоретические основы химической технологии, 2008. **42**, с. 1–8. ↑, **2**, **2**
- [9] Berry R. S., Kasakov V. A., Sieniutycz S., Szwast Z., Tsirlin A. M. Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes. Chichester : Wiley, 1999. ↑

A. M. Tsirlin, A. A. Akhremenkov. *About optimal organization of cooling system.*

АБСТРАКТ. Thermodynamical analyze of cooling system is considering in this paper. We get minimal entropy production for these systems and get conditions to rich this bound.

*Key Words and Phrases:* cooling system, entropy production, optimization.

*Образец ссылки на статью:*

A. M. Цирлин, А. А. Ахременков. *Об оптимальной организации систем охлаждения на примере платы суперкомпьютера* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2010. № 1(1), с. 61–73. URL: [http://psta.psir.ru/read/psta2010\\_1\\_61-73.pdf](http://psta.psir.ru/read/psta2010_1_61-73.pdf)