ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 3(12), 2012, с. 71–78

УДК 52–323.8

М. Н. Бурдаев

Универсальное уравнение времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения

Аннотация. В статье изложен принципиально новый метод решения задачи расчета времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения по эллиптическим и гиперболическим орбитам. В нем в качестве независимой переменной вместо линейных элементов — большой полуоси или фокального параметра орбиты — использован угловой параметр — угол между радиусом-вектором начальной точки перелета и вектором начальной скорости перелета.

Ключевые слова и фразы: перелет, поле тяготения, годограф, гиперболическая орбита.

Введение

В работах [1], [2] и [3] приведены различные варианты универсальных уравнений для расчета времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам. На возможность разработки единого уравнения для всех типов орбит указывалось также в [4]. При этом в [4] и [2] упоминалась необходимость в таких уравнениях смены знака большой полуоси и использования мнимых величин при расчетах времени перелета по гиперболическим траекториям по уравнению для эллиптических орбит.

Разработанные в теории орбитальных годографов [5] обобщенное уравнение перелета и уравнения связей углов, определяющих условия перелета, позволили найти принципиально новый подход к решению задачи определения времени перелета между двумя точками

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 12–07–00205–а «Разработка новых способов решения задач управления движениями космических аппаратов на всех этапах полетов и оперативного отображения получаемых результатов на основе методов годографов и когнитивной графики».

центрального поля тяготения и к отысканию нового универсального уравнения для расчета времени перелета по эллиптическим и гиперболическим орбитам. Один из вариантов такого уравнения для эллиптических орбит был опубликован в [6]. Несколько соотношений, полученных в [6] в процессе вывода основного уравнения, являются общими для всех типов орбит. Далее предлагается применить подход, использованный в [6], для вывода уравнения времени перелета по гиперболическим орбитам.

Вывод универсального уравнения времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения

Уравнение Ламберта для гиперболических орбит имеет вид

$$t_N - t_M = \frac{|\alpha|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left[\varepsilon \left(\operatorname{sh} H_N - \operatorname{sh} H_M\right) - H_N + H_M\right], \tag{1}$$

где α — большая полуось гиперболической траектории перелета, ε — эксцентриситет траектории перелета, H — аналогичные эксцентрическим аномалиям эллиптических орбит величины.

В уравнении (1) и далее индексом $"M"$ отмечены параметры орбиты в начальной точке перелета, индексом $"N"$ — в его конечной точке.

Величина большой полуоси гиперболической траектории перелета вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{r_M}{2 - k_M}, \tag{2}$$

где r_M — радиус-вектор начальной точки перелета, а обобщенный параметр k_M представлен уравнением годографа начальных скоростей перелета [4, 5]:

$$k_M = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_M}{\operatorname{ctg} \psi_M - \operatorname{ctg} \Delta\psi_M} \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2}, \tag{3}$$

ψ_M — угол между r_M и вектором начальной скорости перелета, $\Delta\vartheta$ — угол между r_M и радиусом-вектором r_N конечной точки перелета, $\Delta\psi_M$ — угол между r_M и направлением из точки M на точку N.

Величина угла $\Delta\psi_M$ определяется из уравнения, приведенного в работе [5]:

$$\operatorname{ctg} \Delta\psi_M = \frac{\cos \Delta\vartheta - \frac{r_M}{r_N}}{\sin \Delta\vartheta}.$$

Значения H вычисляются по формуле

$$H = 2\,\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Используя это соотношение, вычисляем разность $H_N - H_M$:

$$\begin{aligned} H_N - H_M &= 2\left[\mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta_N}{2}\right) - \mathrm{arth}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta_M}{2}\right)\right] \\ &= 2\,\mathrm{arth}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\left(\mathrm{tg}\,\psi_M\,\mathrm{ctg}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}-1\right)\varepsilon\sin\vartheta_M}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Решив совместно уравнения конических сечений для граничных точек M и N перелета и выполнив некоторые преобразования, получим соотношение

$$\varepsilon\sin\vartheta_M = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}}{1-\mathrm{tg}\,\psi_M\,\mathrm{ctg}\,\Delta\psi_M}.$$

Подставив его в (4), находим:

$$\begin{aligned} H_N - H_M &= 2\,\mathrm{arth}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}\,(1-\mathrm{tg}\,\psi_M\,\mathrm{ctg}\,\Delta\psi)}{\left(\mathrm{tg}\,\psi_M\,\mathrm{ctg}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}-1\right)}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}\right) \\ &= 2\,\mathrm{arth}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}\,(\mathrm{ctg}\,\psi_M-\mathrm{ctg}\,\Delta\psi_M)}{\mathrm{ctg}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}-\mathrm{ctg}\,\psi_M}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\Delta\vartheta}{2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Чтобы вычислить гиперболический синус $\mathrm{sh}\,H$, представим величину H в новом виде. Для этого используем формулу гиперболического тангенса:

$$\mathrm{th}\,\frac{H}{2} = \frac{e^{\frac{H}{2}}-e^{-\frac{H}{2}}}{e^{\frac{H}{2}}+e^{-\frac{H}{2}}} = \frac{e^H-1}{e^H+1}.$$

Решим это уравнение относительно e^H:

$$e^H = \frac{1+\mathrm{th}\,\frac{H}{2}}{1-\mathrm{th}\,\frac{H}{2}}.$$

Возьмем логарифм от этого выражения и подставим в него величину $\mathrm{th}\,\frac{H}{2}$:

$$H = \ln\frac{1+\mathrm{th}\,\frac{H}{2}}{1-\mathrm{th}\,\frac{H}{2}} = \ln\frac{1+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}}{1-\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}} = \ln\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}+\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}-\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}}.$$

Подставим полученные выражения для e^H и H в уравнение гиперболического синуса:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} H &= \frac{e^H - e^{-H}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\operatorname{th}\frac{H}{2}}{1-\operatorname{th}\frac{H}{2}} - \frac{1-\operatorname{th}\frac{H}{2}}{1+\operatorname{th}\frac{H}{2}}\right) \\
&= \frac{2\operatorname{th}\frac{H}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{H}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{1-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{(\varepsilon+1)\cos^2\frac{\vartheta}{2}-(\varepsilon-1)\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\vartheta}{\varepsilon\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)+\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\vartheta}{1+\varepsilon\cos\vartheta} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}\varepsilon\sin\vartheta}{\varepsilon\left(1+\varepsilon\cos\vartheta\right)} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{ctg}\psi,
\end{aligned}$$

откуда следует

$$\varepsilon\operatorname{sh} H = \sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{ctg}\psi$$

и

$$\varepsilon\operatorname{sh} H_N - \varepsilon\operatorname{sh} H_M = \sqrt{\varepsilon^2-1}\left(\operatorname{ctg}\psi_N - \operatorname{ctg}\psi_M\right). \tag{6}$$

Величина $\operatorname{ctg}\psi_N$ определяется из соотношения [5]:

$$\operatorname{ctg}\psi_N - \operatorname{ctg}\psi_M = \left(\frac{r_N}{r_M}+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M\right) - 2\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}.$$

С этой подстановкой соотношение (6) принимает вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\operatorname{sh} H_N - \operatorname{sh} H_M\right) = {}& \sqrt{\varepsilon^2-1}\times \\
&\times\left[\left(\frac{r_N}{r_M}+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M\right) - 2\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя (2), (3), (5) и (7) в (1), получаем

$$(8)\quad t_N - t_M = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{r_M}{\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\psi_M)\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg}\psi_M-\operatorname{ctg}\Delta\psi_M}-2}\right)^{\frac{3}{2}}\times$$
$$\times\left\{\sqrt{\varepsilon^2-1}\left[\left(\frac{r_N}{r_M}+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}-\operatorname{ctg}\psi_M\right)-2\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right]-\right.$$
$$\left.-2\operatorname{arth}\left(\sqrt{\varepsilon^2-1}\frac{\operatorname{ctg}\psi_M-\operatorname{ctg}\Delta\psi_M}{\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}-\operatorname{ctg}\psi_M}\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)\right\}.$$

Границы ψ_M^*, разделяющие диапазоны углов ψ_M для эллиптических и гиперболических траекторий перелетов, определяются из уравнения (3) для условия $k_M = 2$. Решив его относительно ψ_M, получаем

$$\psi^*_{M_{1,2}} = \operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\pm\sqrt{\frac{r_M}{r_N}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}\right].$$

Углы ψ_M соответствуют параболическим траекториям перелетов.

Между двумя значениями ψ_M^* решений этого уравнения заключен диапазон величин углов ψ_M для эллиптических траекторий перелетов. Меньшие значения углов ψ_M свойственны гиперболическим траекториям, не приходящим в заданную конечную точку N перелета. Большие значения углов ψ_M соответствуют гиперболическим траекториям, по которым перелеты в заданную конечную точку возможны.

Максимальное значение угла ψ_M для гиперболических траекторий теоретически равно величине угла $\Delta\psi_M$. Этому случаю при конечных значениях величин начальных радиусов r_M перелетов соответствуют бесконечные величины k_M и начальных скоростей перелетов, что противоречит действующим законам физики. Поэтому максимальный возможный угол ψ_M для перелетов по гиперболическим траекториям ограничен максимальной предельной скоростью перелета, равной скорости света.

В статье [6] приведено в сокращенном виде аналогичное уравнение времени перелета для эллиптических орбит: используя формулы

(7) , (10) , (12) , (13) , (17) и (18) статьи [6], это уравнение можно представить в виде

$$
(9)\quad t_N - t_M = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{r_M}{2 - \frac{(1+\operatorname{ctg}^2 \psi_M)\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}} \right]^{\frac{3}{2}} \times
$$

$$
\times \left\{ 2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}{\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M}\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right] - \right.
$$

$$
\left. -\sqrt{1-\varepsilon^2}\left[\left(\frac{r_N}{r_M}+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M\right) - 2\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2}\right]\right\}.
$$

Сопоставление уравнений (8) и (9) обнаруживает, что они, как и указывалось в [2, 4], различаются знаками больших полуосей и выражения $(1-\varepsilon^2)$, а также присутствием функции arctg в формуле для эллиптических орбит и функции arth в формуле для орбит гиперболических.

Необходимость смены знаков в выражениях для большой полуоси, для разности $(1-\varepsilon^2)$ под корнями в правой части уравнений (8) и (9) и смены знака правой части уравнений при переходе от расчетов для эллиптических орбит к расчетам для гипербол легко устраняется введением операции вычисления модуля для указанных элементов уравнений. После этого различие между уравнениями (8) и (9) остается только в обратных функциях в их правых частях.

Величина эксцентриситета ε траектории перелета вычисляется для обоих уравнений по единой формуле, приведенной в работе [7]:

$$
\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{k_M\,(k_M-2)}{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}},
$$

откуда

$$
\sqrt{|e^2-1|} = \left|\frac{k_M\,(k_M-2)}{1+\operatorname{ctg}^2\psi_M}\right|.
$$

В итоге универсальная формула получает вид

$$(10)\quad t_N - t_M = \left| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\left| \frac{r_M}{\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\psi_M)\operatorname{tg}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M} - 2} \right| \right]^{\frac{3}{2}} \times \right.$$
$$\times \left\{ \sqrt{|1-\varepsilon^2|} \left(\left(\frac{r_N}{r_M} + 1 \right) \left(\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M \right) - 2\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} \right) - \right.$$
$$\left. \left. -2\operatorname{ar}\begin{pmatrix}\operatorname{ctg}\\ \operatorname{th}\end{pmatrix} \left[\sqrt{|1-\varepsilon^2|} \frac{\operatorname{ctg}\psi_M - \operatorname{ctg}\Delta\psi_M}{\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M} \operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} \right] \right\} \right|,$$

где в символе обратной функции в правой части уравнения верхнее сочетание букв выбирается для эллиптических орбит, нижнее — для гиперболических орбит.

При выполнении расчетов на современных электронных вычислительных машинах в универсальном уравнении действует для эллиптических орбит условие проверки и коррекции алгоритма расчетов, отмеченное в статье [6]: если при вычислениях появляется величина $E_N - E_M$, меньшая нуля, то в правую часть уравнений (8)–(10) следует добавить 2π. В уравнениях (8) и (9) знак этой разности определяется и совпадает со знаком разности $\operatorname{ctg}\frac{\Delta\vartheta}{2} - \operatorname{ctg}\psi_M$.

Заключение

Материал статьи является продолжением исследований, начатых автором в работе [6]. Полученные результаты используются в ФГБУ «Научно-исследовательский испытательный Центр подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина» для обучения космонавтов теории перелетов.

Список литературы

[1] Субботин М. Ф. Курс небесной механики, Т. **1**. М. : Гостехиздат, 1933. — 323 с. ↑[]

[2] Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М. : Наука, 1968. — 800 с. ↑[]

[3] Херрик С. Астродинамика, Т. **1**. М. : Мир, 1976. — 319 с. ↑[]

[4] Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М. : Наука, 1965. — 537 с. ↑[]

[5] Бурдаев М. Н. Теория годографов в механике космического полета. М. : Машиностроение, 1975. — 151 с. ↑[]

[6] Бурдаев М. Н. *Применение метода годографов к расчету времени перелета в центральном поле тяготения* // Космические исследования, 2009. **Т. 47**, № 2, с. 204–208 ↑[]

[7] Беляков А. И. Графо-аналитический метод исследования движения космических аппаратов. М. : Машиностроение, 1973.— 148 с. ↑[]

Рекомендовал к публикации *д.т.н. В. М. Хачумов*

Об авторе:

Михаил Николаевич Бурдаев

Доктор технических наук, профессор, академик Академии космонавтики, космонавт-испытатель, главный научный сотрудник 57 отдела 5-го Научного управления ФГБУ «Научно-исследовательский испытательный Центр подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина».

e-mail: bmn@starcity.ru

Образец ссылки на эту публикацию:

М. Н. Бурдаев. *Универсальное уравнение времени перелета между двумя точками центрального поля тяготения* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2012. Т. 3, № 3(12), с. 71–78.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2012_3_71-78.pdf

M. N. Burdayev. *The repositioning maneuver of artificial Earth satellite in a circular orbit with the phasing coils trajectory.*

Abstract. The article describes a fundamentally new method for solving the problem of calculating the flight time between two points of the central gravitational field of elliptic and hyperbolic orbits. It as an independent variable instead of the linear elements— semi-major axis or the focal parameter of the orbit — the angular parameter used (the angle between the starting point radius vector between and initial velocity vector of the trip). (*In Russian*).

Key Words and Phrases: flight, gravitational field, hodograph, hyperbolic orbit.