ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №4(31), 2016, с. 161–176

УДК 517.977

А. Ю. Попов

Асимптотика сечения плоскостью субримановой сферы на группе Энгеля вблизи анормальной траектории

Аннотация. В работе найдена асимптотика кривой, являющейся пересечением единичной субримановой сферы на группе Энгеля с подпространством $\{x = z = 0\}$ вблизи анормальной траектории. Из найденной асимптотики видно, что эта кривая не является аналитической в точке $(1, 0, 0, 0)$.

Ключевые слова и фразы: субриманова структура, эллиптические интегралы, асимптотика.

1. Введение и постановка задачи

Задачи субримановой геометрии активно исследуются в течение последних 20 лет методами теории оптимального управления, дифференциальной геометрии, теории уравнений с частными производными [1–3]. С теоретической точки зрения субриманова геометрия является естественным обобщением римановой геометрии. С другой стороны, субримановы структуры возникают в разнообразных приложениях (классическая и квантовая механика, робототехника, обработка изображений).

Пусть имеется многообразие M, на котором задана система линейно независимых векторных полей $\{X_k\}_{k=1}^n$. Субриманова задача может быть локально поставлена как задача оптимального управления

$$(1)\qquad \dot q(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) X_k(q), \qquad q \in M, \qquad q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$

в которой требуется найти такой набор функций действительной переменной $\{u_k\}_{k=1}^n$ из пространства $L(0, t_1)$, чтобы величина

$$\int_0^{t_1} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt \tag{2}$$

принимала возможно меньшее значение. Точная нижняя грань величин (2) называется субримановым расстоянием между точками q_0 и q_1 многообразия M и обозначается $d(q_0, q_1)$, а субриманова сфера радиуса R с центром в точке $q_0 \in M$ определяется как множество

$$S_R(q_0) = \{q \in M \quad | \quad d(q_0, q) = R\}.$$

В работах [4–6] изучалась субриманова структура на группе Энгеля — пространстве $\mathbb{R}^4$, расстояние между точками которого порождается управляемой системой вида (1):

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad \dot{z} = \frac{u_2 x - u_1 y}{2}, \quad \dot{v} = \frac{x^2 + y^2}{2} u_2,$$
$$q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4.$$

Эта математическая модель оказывается плодотворной при нахождении оптимальных движений мобильного робота с прицепом.

В [4–6] была получена параметризация геодезических, исследована их оптимальность, описано время разреза. На основе этих результатов мы находим асимптотику кривой, являющейся пересечением единичной субримановой сферы S на группе Энгеля с центром в точке $q_0 = (0, 0, 0, 0)$ с подпространством $\{x = z = 0\}$ вблизи анормальной траектории $\{x = 0, y = -t, z = 0, v = -\frac{t^3}{6}\}$. Выяснилось, что второй член асимптотики столь быстро стремится к нулю при подходе кривой к точке $(0, -1, 0, -\frac{1}{6})$, что эта кривая не может быть в данной точке аналитичной, хотя и обладает бесконечной гладкостью. Отсюда, в частности, получаем несубаналитичность сферы S (это свойство сферы было впервые обнаружено в [7]).

Из результатов работ [4–6] следует, что

$$S \cap \{x = z = 0\} = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i \cup \{a_+, a_-, c_+, c_-\}$$

есть замкнутая кривая, охватывающая начало координат, γ_i — гладкие кривые, $c_\pm$ — сопряженные точки, $a_\pm$ — точки на анормальных траекториях. Нас будет интересовать асимптотика кривой γ_2 вблизи ее граничной точки a_-. В координатах (y,w) на плоскости $\{x=z=0\}$, где $w=v-y^3/6$, эти объекты задаются следующим образом:

$$a_- : y=-1,\quad w=0,\quad \gamma_2 : y=y_2(k),\quad w=w_2(k),\quad k\in(k_0,1),$$

$$y_2(k)=-1+\frac{2e(k)}{p(k)},$$

$$w_2(k)=-\frac{1}{6p^3(k)}\Big((1-2k^2)e(k)-(1-k^2)p(k)+g(k)\Big). \tag{3}$$

Функции e,p,g и число k_0 сейчас будут определены.

Рассмотрим функцию двух действительных переменных

$$B(u,k)=\int\limits_0^u\left((1-k^2\sin^2(\phi))^{-\frac12}-2(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac12}\right)d\phi,$$

$$u>0,\quad 0<k<1. \tag{4}$$

Значению $u=\frac{\pi}{2}$ соответствует функция переменной k:

$$B_0(k)=B\Big(\frac{\pi}{2},k\Big)=K(k)-2E(k), \tag{5}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы I и II рода соответственно [8]. Функция B_0 возрастает на полуинтервале $[0,1)$, $B_0(0)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{k\to1-}B_0(k)=+\infty$. Через k_s обозначим корень уравнения $B_0(k)=s$. Имеем

$$k_0=0.908909\ldots,\quad k_1=0.982652\ldots,\quad k_2=0.997389\ldots.$$

Нас будут интересовать значения $u\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ и $k\in(k_0,1)$. При этих значениях переменных (u,k) функция $B(u,k)$ положительна:

$$B(u,k)\geq\frac{2uB_0(k)}{\pi}>0\qquad\forall u\in\Big[\frac{\pi}{2},\pi\Big]\quad\forall k\in(k_0,1). \tag{6}$$

(При $u=\frac{\pi}{2}$ и $u=\pi$ в (6) достигается равенство, а при $\frac{\pi}{2}<u<\pi$ имеет место строгое неравенство ввиду вогнутости $B(u,k)$ на отрезке $\frac{\pi}{2}\leq u\leq\pi$ при любом фиксированном k).

Определим функцию двух переменных

$$f(u,k)=\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}\,\sin(u)+B(u,k)\cos(u) \tag{7}$$

и рассмотрим уравнение

$$f(u,k)=0. \tag{8}$$

В §3 будет доказана

Лемма 1. *При любом $k \in (k_0, 1)$ уравнение* (8) *имеет единственный корень на интервале $\frac{\pi}{2} < u < \pi$, который обозначим $u(k)$. Функция $u\colon (k_0, 1) \to (\frac{\pi}{2}, \pi)$ имеет непрерывную отрицательную производную. При любом $k \in [k_1, 1)$ верно неравенство*

$$u(k) < \frac{\pi}{2} + \frac{k'}{B_0(k)}, \quad \text{где} \quad k' = \sqrt{1-k^2}. \tag{9}$$

Теперь мы можем определить все функции, участвующие в параметрическом представлении (3) исследуемой кривой:

$$e(k) = \int\limits_0^{u(k)} (1 - k^2 \sin^2(\phi))^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad p(k) = \int\limits_0^{u(k)} (1 - k^2 \sin^2(\phi))^{-\frac{1}{2}} d\phi, \tag{10}$$

$$g(k) = 3k^2 \cos^2\big(u(k)\big) B\big(u(k), k\big) + \\ + 4k^2 \cos\big(u(k)\big) \sin\big(u(k)\big) \sqrt{1 - k^2 \sin^2\big(u(k)\big)}. \tag{11}$$

Ввиду (4) и (10) верно тождество

$$B\big(u(k), k\big) = p(k) - 2e(k). \tag{12}$$

Заметим, что выражение (11) для функции g, а вместе с ним и формула (3) для $w_2(k)$ допускает упрощение, которое не было произведено в [**6**]. Действительно, из (11), (7), (8) и (12) находим

$$g(k) = 4k^2 \cos\big(u(k)\big) f\big(u(k), k\big) - k^2 \cos^2\big(u(k)\big) B\big(u(k), k\big) = \\ = -k^2 \cos^2\big(u(k)\big) B\big(u(k), k\big) = -k^2 \cos^2\big(u(k)\big)\big(p(k) - 2e(k)\big).$$

Отсюда и из (3) выводим представление

$$w_2(k) = \frac{1}{6p^3(k)}\Bigg(\Big(2k^2 - 1\Big)e(k) + (1-k^2)p(k) + \\ + k^2 \cos^2\big(u(k)\big)\Big(p(k) - 2e(k)\Big)\Bigg) = \frac{1}{6p^2(k)}\left(\Big(1 - 2k'^2\Big)\frac{e(k)}{p(k)} + \right. \\ \left. + k'^2 + k^2 \cos^2\big(u(k)\big)\Big(1 - \frac{2e(k)}{p(k)}\Big)\right), \quad \text{где} \quad k' = \sqrt{1-k^2}. \tag{13}$$

Наконец, надо представить исследуемую кривую как график функции в осях (y, w), но со сдвигом и сжатием, а именно рассмотреть $w_2(k)$ как функцию переменной $Y = \frac{y+1}{2} \equiv \frac{e(k)}{p(k)}$ и найти асимптотику этой функции, которую мы обозначим $W(Y)$ при $Y \to 0+$. Переход к новой переменной Y является корректным, поскольку функция $Y(k)$ монотонна на интервале $k_2 < k < 1$ — это будет доказано в §3.

Согласно (13) имеем

$$W(Y) = \frac{1}{6p^2(k)}\Big(\Big(1-2{k'}^2\Big)Y + {k'}^2 + k^2\cos^2\big(u(k)\big)\Big(1-2Y\Big)\Big). \tag{14}$$

Из представления (14) видно, что для вывода асимптотики функции $W(Y)$ при $Y \to 0+$ осталось написать асимптотику функций $p(k)$, k', $\cos^2\big(u(k)\big)$ в терминах переменной Y при $Y \to 0+$ (тогда $k \to 1-$). Это и будет сделано в следующем параграфе. В §3 доказаны необходимые вспомогательные утверждения.

2. Вывод асимптотики функции $W(Y)$

Напомним асимптотики полных эллиптических интегралов [9]:

$$\begin{gathered} K(k) = \ln\Big(\frac{1}{k'}\Big) + \ln 4 + O\Big({k'}^2\ln\Big(\frac{1}{k'}\Big)\Big), \\ E(k) = 1 + \frac{{k'}^2}{2}\ln\Big(\frac{1}{k'}\Big) + \Big(\ln 2 - \frac{1}{4}\Big){k'}^2 + O\Big({k'}^4\ln\Big(\frac{1}{k'}\Big)\Big), \quad k \to 1-. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Поскольку $E(k) < e(k) < 2E(k)$, $\quad K(k) < p(k) < 2K(k)$, то из (2.1) находим

$$\begin{gathered} Y(k) \asymp \ln^{-1}\Big(\frac{1}{k'}\Big), \\ B_0(k) = \ln\Big(\frac{1}{k'}\Big) + (\ln 4 - 2) + O\Big({k'}^2\ln\Big(\frac{1}{k'}\Big)\Big), \quad k \to 1-. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Неравенство (9) показывает, что функция $u(k)$ стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $k \to 1-$ достаточно быстро, а значит $\cos^2\big(u(k)\big)$ весьма малая величина и функции $p(k)$ и $e(k)$ «мало отличаются» от $K(k)$ и $E(k)$ соответственно. Действительно, из (9), (2.1), (2.2) находим

$$\begin{aligned} \cos^2\big(u(k)\big) < \sin^2\Big(\frac{k'}{B_0(k)}\Big) < {k'}^2{B_0}^{-2}(k) = O\Big({k'}^2\ln^{-2}\Big(\frac{1}{k'}\Big)\Big) = \\ = O({k'}^2Y^2), \quad Y \to 0+, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$E(k) < e(k) =$$

$$= E(k) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{u(k)} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}\, d\phi = E(k) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{u(k)} \sqrt{{k'}^2 + k^2 \cos^2(\phi)}\, d\phi <$$

$$< E(k) + \Big(u(k) - \frac{\pi}{2}\Big)\sqrt{{k'}^2 + \cos^2\big(u(k)\big)} < E(k) +$$

$$+\frac{k'}{B_0(k)}\sqrt{{k'}^2 + \frac{{k'}^2}{{B_0}^2(k)}} = E(k) + O\Big(\frac{{k'}^2}{B_0(k)}\Big) = E(k) + O(Y{k'}^2), \tag{2.4}$$

$$K(k) < p(k) = K(k) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{u(k)} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}} < K(k) + \frac{u(k) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - k^2}} <$$

$$< K(k) + \frac{1}{B_0(k)} = K(k) + O(Y), \quad Y \to 0+. \tag{2.5}$$

Асимптотическая оценка (2.3) позволяет последнее слагаемое в скобках в правой части (14) считать остаточным членом и получить следующее асимптотическое представление функции W:

$$W(Y) = \frac{1}{6p^2(k)}\Big(Y + {k'}^2 - 2{k'}^2 Y + O\Big({k'}^2 Y^2\Big)\Big) =$$

$$= \frac{Y^2}{6}\Big(Y + {k'}^2 - 2{k'}^2 Y + O\Big({k'}^2 Y^2\Big)\Big)e^{-2}(k), \quad Y \to 0+. \tag{2.6}$$

Из (2.1), (2.4), (2.5) выводим асимптотики

$$\frac{1}{Y} = \frac{P(k)}{e(k)} = \frac{K(k) + O(Y)}{E(k) + O(Y){k'}^2} = \frac{\ln(\frac{1}{k'}) + \ln 4 + O(Y)}{1 + O\Big(\frac{{k'}^2}{Y}\Big)} =$$

$$= \ln\Big(\frac{1}{k'}\Big) + \ln 4 + O(Y), \tag{2.7}$$

$$e(k) = E(k) + O(Y{k'}^2) = 1 + \frac{{k'}^2}{2}\ln\Big(\frac{1}{k'}\Big) + \Big(\ln 2 - \frac{1}{4}\Big){k'}^2 +$$

$$+O\Big({k'}^4 \ln\Big(\frac{1}{k'}\Big) + {k'}^2 Y\Big) = 1 + \frac{{k'}^2}{2}\Big(\frac{1}{Y} - \ln 4 + O(Y)\Big) +$$

$$+\Big(\ln 2 - \frac{1}{4}\Big){k'}^2 + O({k'}^2 Y) = 1 + \frac{{k'}^2}{2Y} - \frac{{k'}^2}{4} + O({k'}^2 Y),$$

$$e^{-2}(k) = 1 - \frac{{k'}^2}{Y} + \frac{{k'}^2}{2} + O({k'}^2 Y), \quad Y \to 0+. \tag{2.8}$$

Из (2.6), (2.8) при $Y \to 0+$ находим

$$W(Y) = \frac{Y^2}{6}\Big(Y + k'^2 - 2k'^2 Y + O(k'^2 Y^2)\Big)\bigg(1 - \frac{k'^2}{Y} + \frac{k'^2}{2} + \tag{2.9}$$

$$+O(k'^2 Y)\bigg) = \frac{Y^2}{6}\Big(Y - \frac{3}{2}k'^2 Y + O(k'^2 Y^2)\Big) = \frac{Y^3}{6} - \frac{k'^2 Y^3}{4} + O(k'^2 Y^4).$$

Потенциируя соотношение (2.7), получаем асимптотику величины k'^2 в терминах переменной Y:

$$\exp\Big(\frac{1}{Y}\Big) = \frac{4}{k'}\exp\Big(O(Y)\Big) \Rightarrow \exp\Big(-\frac{2}{Y}\Big) = \frac{k'^2}{16}\exp\Big(O(Y)\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k'^2 = 16\exp\Big(-\frac{2}{Y}\Big)\Big(1 + O(Y)\Big), \quad Y \to 0+\,. \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) выводим итоговый результат работы:

$$W(Y) = \frac{Y^3}{6} - 4Y^3\exp\Big(-\frac{2}{Y}\Big) + O\bigg(Y^4\exp\Big(-\frac{2}{Y}\Big)\bigg), \quad Y \to 0+\,.$$

3. Вспомогательные утверждения

Доказательство леммы 1. Согласно (7) при любом $k \in (k_0, 1)$ имеем

$$f\Big(\frac{\pi}{2}, k\Big) = k' > 0, \quad f(\pi, k) = -B(\pi, k) = -2B_0(k) < 0. \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}\cos(u) - \frac{k^2\sin^2(u)\cos(u)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}} + \tag{3.2}$$

$$+\bigg(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}} - 2\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}\bigg)\cos(u) - B(u,k)\sin(u) =$$

$$= \cos(u)\bigg(\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)} - \frac{k^2\sin^2(u)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}} -$$

$$-2\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}\bigg) - B(u,k)\sin(u) = \bigg(\frac{1 - k^2\sin^2(u)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}} -$$

$$-\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}\bigg)\cos(u) - B(u,k)\sin(u) = -B(u,k)\sin(u).$$

Из (4) и (5) видно, что $B(u,k) > 0$ при любых $u \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $k \in (k_0, 1)$. Поэтому верно неравенство

$$\frac{\partial f(u,k)}{\partial u} < 0 \quad \forall u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \forall k \in (k_0, 1).$$

Отсюда заключаем, что функция $f(u,k)$ убывает по переменной $u \in$ $\in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ при любом $k \in (k_0, 1)$, а в точках $(\frac{\pi}{2}, k)$ и (π, k) согласно (3.1) принимает значения разных знаков. Следовательно, уравнение (8) при любом $k \in (k_0, 1)$ имеет на отрезке $\frac{\pi}{2} \le u \le \pi$ единственный корень $u(k) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Вычислим $\frac{\partial f}{\partial k}$, а потом по теореме о производной неявной функции выразим $u'(k)$ через k и $u(k)$, воспользовавшись тождеством (3.2):

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{-k\sin^3(u)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}} +$$

$$+k\cos(u)\int\limits_0^u \left(\frac{\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac{1}{2}}}\right) d\phi,$$

$$u'(k) = -\frac{\partial f/\partial k}{\partial f/\partial u}\bigg|_{u=u(k)} = \frac{\partial f/\partial k}{B(u,k)\sin(u)}\bigg|_{u=u(k)} =$$

$$= -\frac{k}{B(u(k),k)}\left[\frac{\sin^2(u(k))}{\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}} + \right.$$

$$\left. + |\operatorname{ctg}(u(k))| \int\limits_0^{u(k)} \left(\frac{\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac{1}{2}}}\right) d\phi\right]. \tag{3.3}$$

Из (3.3) сразу же следует отрицательность $u'(k)$ на интервале $k_0 <$ $< k < 1$.

Докажем неравенство (9). В силу положительности $f(\frac{\pi}{2}, k)$ и убывания функции f по переменной u достаточно проверить справедливость неравенства

$$f\left(\frac{\pi}{2} + v(k), k\right) < 0 \quad \forall k \in [k_1, 1), \quad \text{где} \quad v(k) = \frac{k'}{B_0(k)}.$$

Поскольку $k \in [k_1, 1)$, то $B_0(k) \geq 1$ и $v(k) \leq k' < 1 < \frac{\pi}{2}$. Вследствие (7) это неравенство принимает вид

$$\sqrt{1-k^2\cos^2\big(v(k)\big)}\cos\big(v(k)\big) - B\Big(\frac{\pi}{2}+v(k),k\Big)\sin\big(v(k)\big) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{{k'}^2+k^2\sin^2\big(v(k)\big)}\operatorname{ctg}\big(v(k)\big) < B_0(k)+I(k) \quad \forall k \in [k_1,1), \tag{3.4}$$

где

$$I(k) = \int\limits_0^{v(k)} \Big[(1-k^2\cos^2(\phi))^{-\frac{1}{2}} - 2(1-k^2\cos^2(\phi))^{\frac{1}{2}}\Big]\,d\phi. \tag{3.5}$$

Заметим, что благодаря условию $k \in [k_1, 1)$ подынтегральная функция в (3.5) положительна. Действительно, неравенство $b^{-\frac{1}{2}} - -2b^{\frac{1}{2}} > 0$ равносильно включению $b \in (0, \frac{1}{2})$. Поэтому положительность подынтегральной функции в (3.5) гарантируется неравенством $1 - k^2\cos^2(\phi) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k^2\cos^2(\phi) > 1$. Ввиду включения $k \in [k_1, 1)$ имеем $B_0(k) \geq 1$. Следовательно,

$$0 < v(k) \leq k',$$

$$\cos^2(\phi) \geq \cos^2\big(v(k)\big) = 1-\sin^2\big(v(k)\big) > 1-v^2(k) \geq 1-{k'}^2 = k^2. \tag{3.6}$$

Таким образом, для положительности подынтегральной функции в (3.5) достаточно справедливости неравенства $k^4 > 0.5$. Оно верно, поскольку $k > k_0 > 0.9$.

Займемся доказательством неравенства (3.4). Ввиду положительности обеих его частей возведение их в квадрат является равносильным преобразованием. Осуществив его, придем к задаче доказательства неравенства

$${k'}^2\operatorname{ctg}^2\big(v(k)\big) + k^2\cos^2\big(v(k)\big) < {B_0}^2(k) + 2I(k)B_0(k) + I^2(k). \tag{3.7}$$

Имеем $\operatorname{ctg}^2\big(v(k)\big) < v^{-2}(k) = {B_0}^2(k){k'}^{-2}$. Следовательно, первое слагаемое в левой части меньше первого слагаемого в правой части, и достаточно доказать неравенство

$$k^2\cos^2\big(v(k)\big) < 2I(k)B_0(k). \tag{3.8}$$

Поскольку подынтегральная функция в (3.5) убывает по переменной ϕ на отрезке $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ при любом $k \in (0,1)$, то верна оценка снизу

$$I(k) > v(k)\left[\Big(1-k^2\cos^2\big(v(k)\big)\Big)^{-\frac{1}{2}} - 2\Big(1-k^2\cos^2\big(v(k)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

(3.9)
$$= \frac{v(k)\Big(1-2\Big(1-k^2\cos^2\big(v(k)\big)\Big)\Big)}{\sqrt{1-k^2\cos^2\big(v(k)\big)}} = \frac{k'\Big(2k^2\cos^2\big(v(k)\big)-1\Big)}{B_0(k)\sqrt{k'^2+k^2\sin^2\big(v(k)\big)}},$$

причем ввиду (3.6) последнее выражение положительно. Из (3.9) видно, что неравенство (3.8) является следствием такого:

$$k^2\cos^2\big(v(k)\big) < \frac{2k'\Big(2k^2\cos^2\big(v(k)\big)-1\Big)}{\sqrt{k'^2+k^2\sin^2\big(v(k)\big)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k'^2+k^2\sin^2\big(v(k)\big)} < 2k'\left(2-\frac{1}{k^2\cos^2\big(v(k)\big)}\right).$$

Из (3.6) находим

$$2-\frac{1}{k^2\cos^2\big(v(k)\big)} > 2-\frac{1}{k^4} \ge 2-\frac{1}{{k_1}^4} > 2-\frac{1}{0.98^4} > 2-\frac{1}{0.92} = \frac{21}{23}.$$

Отсюда заключаем, что достаточно установить справедливость неравенства

(3.10)
$$\sqrt{k'^2+k^2\sin^2\big(v(k)\big)} < \frac{42}{23}k' \Leftrightarrow k'^2+k^2\sin^2\big(v(k)\big) < \frac{1764}{529}k'^2.$$

Имеем далее $k^2\sin^2\big(v(k)\big) < \sin^2\big(v(k)\big) < v^2(k) = {k'}^2{B_0}^{-2}(k) \le {k'}^2$. Следовательно, ${k'}^2 + k^2\sin^2\big(v(k)\big) < 2{k'}^2$ и последнее неравенство в (3.10) выполняется. Доказательство неравенства (9) завершено, и лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Функция $Y(k) = \frac{e(k)}{p(k)}$ имеет отрицательную производную на полуинтервале $k_2 \le k < 1$.*

Доказательство. Введем функцию

(3.11)
$$p_1(k) = \int\limits_0^{u(k)} (1-k^2\sin^2(\phi))^{-\frac{3}{2}}\,d\phi.$$

Согласно теореме о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом по параметру имеем

$$e'(k) = u'(k)\sqrt{1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)} + \int\limits_0^{u(k)} \frac{-k\sin^2(\phi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}}d\phi,$$

$$p'(k) = \frac{u'(k)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)}} + \int\limits_0^{u(k)} \frac{k\sin^2(\phi)d\phi}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.12}$$

Из (3.11), (3.12) и (10) выводим тождества

$$ke'(k) = ku'(k)\Big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} + e(k) - p(k),$$

$$kp'(k) = ku'(k)\Big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\Big)^{-\frac{1}{2}} + p_1(k) - p(k). \tag{3.13}$$

Из (3.13) находим

$$kY'(k)p^2(k) = ke'(k)p(k) - kp'(k)e(k) =$$

$$= ku'(k)\bigg(p(k)\Big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} - e(k)\Big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\Big)^{-\frac{1}{2}}\bigg) -$$

$$-e(k)p_1(k) - p^2(k) + 2e(k)p(k). \tag{3.14}$$

Обозначив для краткости $B(k) = B\big(u(k),k\big) = p(k) - 2e(k)$ (см. выше (12)), перепишем (3.14) в следующей эквивалентной форме:

$$kY'(k)p^2(k) = k\big(-u'(k)\big)\big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\big)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big(e(k) - \big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\big)p(k)\Big) - p_1(k)e(k) - p(k)B(k).$$

Отсюда, пользуясь доказанной в лемме 1 отрицательностью производной $u'(k)$, выводим неравенство

$$kY'(k)p^2(k) < \tag{3.15}$$

$$< k\big(-u'(k)\big)\big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\big)^{-\frac{1}{2}}e(k) - p_1(k)e(k) - p(k)B(k).$$

Теперь преобразуем функцию $-ku'(k)\big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\big)^{-\frac{1}{2}}$, воспользовавшись формулой (3.3) и тождеством

$$\big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\big)^{\frac{1}{2}} = B(k)|\operatorname{ctg}\big(u(k)\big)|.$$

Получим

$$\frac{-ku'(k)}{1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)}=\frac{k^2\sin^2\big(u(k)\big)}{B(k)(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big))}+$$

$$(3.16)\qquad +\frac{1}{B^2(k)}\int\limits_0^{u(k)}\left(\frac{k^2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac32}}+2\frac{k^2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac12}}\right)d\phi.$$

Ввиду тождества

$$\frac{k^2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac32}}+2\frac{k^2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac12}}=$$
$$=\frac{1}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac32}}+\frac{1}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac12}}-2(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac12}$$

получаем представление

(3.17)
$$\int\limits_0^{u(k)}\left(\frac{k^2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac32}}+2\frac{k^2\sin^2(\phi)}{(1-k^2\sin^2(\phi))^{\frac12}}\right)d\phi=p_1(k)+B(k).$$

Из (3.15) – (3.17) заключаем, что для доказательства отрицательности производной $Y'(k)$ при $k_2\le k<1$ достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{k^2\sin^2\big(u(k)\big)}{B(k)\Big(1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)\Big)}+\frac{p_1(k)+B(k)}{B^2(k)}<p_1(k)+\frac{p(k)B(k)}{e(k)},$$
$$k\in[k_2,1),$$

которое после умножения обеих его частей на $B(k)$ и переноса в правую часть слагаемого $\frac{p_1(k)}{B(k)}$ приобретает вид

$$\frac{1}{1-k^2\sin^2\big(u(k)\big)}<p_1(k)\left(B(k)-\frac{1}{B(k)}\right)+\frac{p(k)B^2(k)}{e(k)},\quad k\in[k_2,1).$$

Правая часть последнего неравенства заведомо превосходит $p_1(k)$: $\left(B(k)-\frac{1}{B(k)}\right)>1.5p_1(k)$ при $k\in[k_2,1)$, поскольку $B(k)>B_0(k)\ge 2$ при $k\in[k_2,1)$. Левая же часть этого неравенства всегда меньше k'^{-2}. Поэтому достаточно доказать, что $k'^{-2}<p_1(k)$. На самом деле верно

даже более сильное неравенство

$$k'^{-2} < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2(\phi))^{-\frac{3}{2}} d\phi \quad \forall k \in [0, 1). \tag{3.18}$$

Докажем его. С этой целью разложим в степенной ряд функцию $K_1(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2(\phi))^{-\frac{3}{2}} d\phi$. Обозначим $c_n = 4^{-n}(2n)!(n!)^{-2}$. Имеем

$$(1 - t)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2n + 1) t^n, \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\phi)\ d\phi = \frac{\pi}{2} c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда находим

$$K_1(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2n + 1)(k^2 \sin^2(\phi))^n\right) d\phi =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2n + 1) k^{2n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\phi)\ d\phi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} (2n + 1) {c_n}^2 k^{2n}.$$

А так как $k'^{-2} = (1 - k^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n}$, то для доказательства неравенства (3.18) достаточно проверить, что

$$\pi(n + 0.5){c_n}^2 > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Из асимптотической формулы Стирлинга для факториала следует равенство

$$\lim_{n \to \infty} \pi(n + 0.5){c_n}^2 = 1.$$

Поэтому для доказательства неравенства (3.19) достаточно убедиться в убывании последовательности $b_n = (n + 0.5){c_n}^2$. Имеем

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n + 1.5}{n + 0.5} \times \left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^2 = \frac{n + 1.5}{n + 0.5} \left(\frac{2n + 1}{2n + 2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(n + 1.5)(n + 0.5)}{(n + 1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 0.75}{n^2 + 2n + 1} < 1.$$

Отсюда видно, что $b_{n+1} < b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, а это и требовалось доказать. Неравенство (3.19), а вместе с ним и (3.18) доказано, и этим доказательство леммы 2 завершено.

Список литературы

[1] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **91**, AMS, 2002. ↑ 161

[2] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков. *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004. ↑ 161

[3] A. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian Geometry*, Preprint SISSA 09/2012/M, https://webusers.imj-prg.fr/~davide.barilari/ABB-SRnotes-110715.pdf, 2015, 341 p. ↑ 161

[4] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков. «Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля», *Матем. сборник*, **202**:11 (2011), с. 31–54. ↑ 162

[5] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. "Conjugate Points in Nilpotent Sub-Riemannian Problem on the Engel Group", *Journal of Mathematical Sciences*, **195**:3 (2013), pp. 369–390. ↑ 162

[6] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. "Cut Time in Sub-Riemannian Problem on Engel Group", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **21**:4 (2015), pp. 958–988. ↑ 162,164

[7] E. Trélat. "Non-Subanalyticity of Sub-Riemannian Martinet Spheres", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Series I - Mathematics*, **332**:6. ↑ 162 2001, pp. 527–532. ↑ 162

[8] Ю. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002. ↑ 163

[9] P. F. Byrd, M. D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer, 1954. ↑ 165

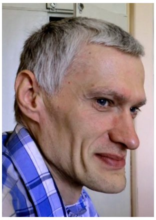
Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. Ю. Л. Сачков*

Пример ссылки на эту публикацию:

А. Ю. Попов. «Асимптотика сечения плоскостью субримановой сферы на группе Энгеля вблизи анормальной траектории», *Программные системы: теория и приложения*, 2016, **7**:4(31), с. 161–176.

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_4_161-176.pdf

Об авторе:



Антон Юрьевич Попов

д.ф-м.н., ведущий научный сотрудник механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, ведущий научный сотрудник ИЦПУ ИПС РАН. Основные научные интересы: теория функций.

e-mail: superchuchundra2015@yandex.ru

Anton Popov. *Asymptotics of a section by a plane of the sub-Riemannian sphere on the Engel group near abnormal trajectory.*

Abstract. In this paper we compute an asymptotics of the curve that is the intersection of the unit sub-Riemannian sphere on the Engel group with the subspace $\{x = z = 0\}$ near the abnormal trajectory. It follows from the asymptotics that this curve is not analytic at the point $(1, 0, 0, 0)$. (*In Russian*).

Key words and phrases: sub-Riemannian structure, elliptic integrals, asymptotics.

References

[1] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **91**, AMS, 2002.

[2] A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov. *Geometric Control Theory*, Fizmatlit, M., 2004 (in Russian).

[3] A. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian Geometry*, Preprint SISSA 09/2012/M, https://web-users.imj-prg.fr/~davide.barilari/ABB-SRnotes-110715.pdf, 2015, 341 p.

[4] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Extremal Trajectories in a Nilpotent Sub-Riemannian Problem on the Engel Group”, *Sb. Math.*, **202**:11 (2011), pp. 1593–1615.

[5] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Conjugate Points in Nilpotent Sub-Riemannian Problem on the Engel Group”, *Journal of Mathematical Sciences*, **195**:3 (2013), pp. 369–390.

[6] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. “Cut Time in Sub-Riemannian Problem on Engel Group”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **21**:4 (2015), pp. 958–988.

[7] E. Trélat. “Non-subanalyticity of Sub-Riemannian Martinet Spheres”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Series I - Mathematics*, **332**:6 (2001), pp. 527–532.

[8] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Mathematical Library, 4th Edition, University Press, Cambridge, 1996.

[9] P. F. Byrd, M. D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer, 1954.

Sample citation of this publication:

Anton Popov. "Asymptotics of a section by a plane of the sub-Riemannian sphere on the Engel group near abnormal trajectory", *Program systems: Theory and applications*, 2016, **7**:4(31), pp. 161–176. (*In Russian*).

URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2016_4_161-176.pdf