RU EN ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ISSN 2079-3316
научная статья методы оптимизации и теория управления

УДК 517.977.5
10.25209/2079-3316-2023-14-1-125-148

Об одном классе дискретно-непрерывных систем с параметрами

Ирина Викторовна **Расина**[1✉], Ирина Сергеевна **Гусева**[2]
[1] Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Веськово, Россия
[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
[2] Бурятский государственный университет, Улан-Уде, Россия
[1✉] *irinarasina@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается частный случай гибридной системы: дискретно-непрерывные системы (ДНС) с параметрами и промежуточными критериями. Такая система является двухуровневой. Параметры входят лишь в непрерывные системы, действующие поочередно на нижнем уровне. Верхний уровень, описываемый дискретным процессом, играет связующую роль для всех систем нижнего, определяя политику их взаимодействия и обеспечивая минимизацию функционала. В работе выводится аналог достаточных условий оптимальности Кротова и строится метод улучшения управления и параметров. Приводится иллюстративный пример. На основе полученных общих условий исследуется частный случай: квазилинейные ДНС.

Ключевые слова и фразы: дискретно-непрерывные системы с параметрами, промежуточные критерии, оптимальное управление, квазилинейные дискретно-непрерывные системы

Благодарности: Работа поддержана грантом РНФ № 21-11-00202

Для цитирования: Расина И. В., Гусева И. С. *Об одном классе дискретно-непрерывных систем с параметрами* // Программные системы: теория и приложения. 2023. **Т. 14**. № 1(56). С. 125–148. https://psta.psiras.ru/read/psta2023_1_125-148.pdf

Введение

В 80-е годы прошлого столетия в теории оптимального управления появился новый класс управляемых систем, главная особенность которых заключалась в способности изменять структуру своего описания с течением времени. Также выяснилось, что существует не единственный вариант подобных неоднородных систем. Позже для них возникло общее название – гибридные системы. Наиболее распространенные и изученные различными научными школами представлены в публикациях [1–7].

Один из подходов, основанный на развитии и обобщении как абстрактной модели многошаговых управляемых процессов, предложенной Кротовым, так и его же достаточных условий оптимальности [8], позволил провести декомпозицию неоднородной системы на однородные подсистемы и построить двухуровневую иерархическую модель [2], получившую название дискретно-непрерывной системы (ДНС). Такая система является двухуровневой. Верхний уровень, описываемый дискретным процессом, играет связующую роль для всех систем нижнего, определяя политику их взаимодействия и обеспечивая минимизацию функционала. Далее естественным образом были построены аналоги достаточных условий оптимальности и алгоритмов оптимизации [2, 9–11], разработанные для однородных систем, под которыми понимаются системы с неизменной структурой, исследуемые в рамках классических представлений теории оптимального управления.

Заметим, что при таком подходе все однородные подсистемы связаны общей целью, представленной в модели функционалом. Однако это не исключает того факта, что каждая однородная подсистема может при этом иметь и свою собственную цель. Такое обобщение модели дано в [12].

В данной работе рассматриваются дискретно-непрерывные системы (ДНС) с параметрами, которые широко распространены на практике. Параметры входят лишь в непрерывные системы, действующие поочередно на нижнем уровне. К этому же классу систем приводят задачи идентификации моделей по серии экспериментов, когда требуется определить коэффициенты построенной модели, которые можно рассматривать как искомые параметры. Для рассматриваемой модели ДНС с параметрами приведен в форме теорем аналог достаточных условий оптимальности Кротова. На основе последних построен метод улучшения управления и параметров. Аналогичный подход к традиционным управляемым процессам с параметрами представлен в [13], там же рассмотрена задача идентификации по серии экспериментов.

В общем виде, когда параметры содержит и верхний уровень ДНС, достаточные условия оптимальности и метод улучшения получены в [14]. Поскольку, как показывает практика, а именно, те же задачи идентификации, часто параметры могут содержать лишь непрерывные процессы. В этом случае метод улучшения существенно упрощается. Эта ситуация и рассматривается далее.

Отдельный интерес представляют практически не изученные квазилинейные ДНС, в которых параметр входит лишь в одно слагаемое в непрерывных системах и представляет собой множитель при нелинейном по состоянию слагаемом. Этот вариант рассмотрен отдельно. Небольшой обзор [15] дает представление о квазилинейных системах, содержащих нелинейность с малым параметром.

Обе рассмотренные ситуации проиллюстрированы примерами.

1. Модель дискретно-непрерывной системы с параметрами

Пусть на некотором подмножестве $\mathbf{K}'$ множества $\mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, \ldots, k_F\}$, $\mathbf{K} \subset \mathbb{N}$, являющегося областью определения абстрактной дискретной управляемой системы:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \qquad k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, \ldots, k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k, x), \tag{1}$$

действует непрерывная система

$$\dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c\left(z, t, x^c, u^c, \epsilon^c\right), \qquad t \in \mathbf{T}\left(z\right) = [t_I(z), t_F(z)]. \tag{2}$$

В этих системах:

k – номер шага (этапа), не обязательно физическое время,
x, x^c и u, u^c – соответственно переменные состояния и управления,
f и f^c – операторы.

Все указанные объекты – произвольной природы (возможно различной) для различных k.

$\mathbf{U}(k, x)$ – заданное при каждом k и x множество,
k_I, k_F – начальный и конечный шаги соответственно,
$z = \left(k, x, u^d\right)$ – совокупность переменных верхнего уровня, играющих на нижнем уровне роль параметров,
ϵ^c – параметр,
u^d – переменная управления произвольной природы,
$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t, \epsilon^c) \subset \mathbb{R}^{n(k)}$,

$u^c \in \mathbf{U}^c\left(z, t, x^c, \epsilon^c\right) \subset \mathbb{R}^{p(k)}$,
$\epsilon^c \in \ \mathbf{E}^c(k) \subset \mathbb{R}^{(k)}$.

Система (1) имеет такую же структуру, как и система, предложенная Кротовым в [8].

Для системы (2) на отрезке $[t_I(z), t_F(z)]$ задана промежуточная цель в виде функционала:

$$I^k = \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} f^k\left(t, \epsilon^c, x^c(k,t), u^c(k,t)\right) dt \to \inf.$$

На множестве $\mathbf{K}'$ оператор правой части (1) имеет вид $f\left(k, x, u\right) = \theta\left(z, \gamma^c, \epsilon^c\right)$, где

$$\gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \ \mathbf{\Gamma}^c(z, \epsilon^c),$$

$$\mathbf{\Gamma}^c(z, \epsilon^c) = \{\gamma^c \ : \ t_I = \tau(z), \ x_I^c = \xi(z), \ (t_F, x_F^c) \in \ \mathbf{\Gamma}_F^c(z, \epsilon^c)\}.$$

Здесь $t_I = \tau(z), \ x_I^c = \xi(z)$ – заданные функции z, $\mathbf{\Gamma}^c(z, \epsilon^c)$ – заданное множество. Нетрудно видеть, что система (1) представляет верхний уровень рассматриваемой математической модели, тогда как система (2) – система нижнего уровня.

Решением этой двухуровневой системы считается такой набор

$$m = (x(k), u(k)),$$

где при $k \in \ \mathbf{K}'$: $u(k) = (u^d(k), m^c(k))$, $m^c(k, \epsilon^c) \in \mathbf{D}^c(z(k), \epsilon^c)$, (называемый *дискретно-непрерывным процессом с параметрами*), где

$m^c(k, \epsilon^c)$ – непрерывный процесс $(x^c(k, t, \epsilon^c), \ u^c(k, t, \epsilon^c), \ \epsilon^c(k))$,
$t \in \ \mathbf{T}(z)$,
$\mathbf{D}^c(z, \epsilon^c)$ – множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (2) с дополнительными ограничениями при кусочно-непрерывных $u^c(k, t, \epsilon^c)$ и кусочно-гладких $x^c(k, t, \epsilon^c)$ (на каждом дискретном шаге k).

Подчеркнем, что на каждом дискретном шаге $k \in \ \mathbf{K}'$ модель рассматривает непрерывный процесс $m^c(k, \epsilon^c)$, управление которым состоит из фиксированной на шаге дискретной части u^d и непрерывно изменяемой части m^c.

Совокупность элементов m, удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям, обозначим через $\mathbf{D}$ и назовем множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов с параметрами.

Для модели (1), (2) рассматривается задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала $I = F\left(x\left(k_F\right)\right)$ при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x\left(k_I\right)$ и дополнительных ограничениях

$$x(k) \in \mathbf{X}(k), \quad x^c \in \mathbf{X}^c\left(z, t, \epsilon^c\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c\left(z, \epsilon^c\right)$ – заданные множества.

Очевидно, что на нижнем уровне модели (1), (2) представлены однородные процессы на отдельных этапах, а верхний процесс выполняет связующую для них роль и управляет функционированием всей системы в целом. Под однородными здесь и далее понимаются системы с постоянной структурой, исследуемые в традиционных задачах теории оптимального управления. Взаимодействие верхнего уровня с каждой подсистемой нижнего осуществляется через границу этой подсистемы и соответствующего непрерывного процесса γ^c.

2. Математический аппарат

Введем в рассмотрение функционалы $\varphi\left(k, x\right)$, $\varphi^c\left(z, t, x^c, \epsilon^c\right)$ и построим с их помощью ряд конструкций. Одна из основных конструкций – обобщенный лагранжиан – аналог лагранжианов Кротова для дискретных и непрерывных систем [**8**, **16**]:

$$\begin{gathered}
L = G\left(x\left(k_F\right)\right) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \\
+ \sum_{\mathbf{K}'} \Big(G^c(z, \gamma^c(z)) - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c(k, z, t, x^c(k, t), u^c(k, t), \epsilon^c) dt\Big),
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= F\left(x\right) + \varphi\left(k_F, x\right) - \varphi\left(k_I, x\left(k_I\right)\right), \\
R(k, x, u) &= \varphi\left(k+1, f\left(k, x, u\right)\right) - \varphi\left(k, x\right), \\
G^c(z, \gamma^c, \epsilon^c) &= -\varphi\left(k+1, \theta\left(z, \gamma^c, \epsilon^c\right)\right) + \varphi\left(k, x\right) + \\
&\quad + \varphi^c\left(z, t_F, x^c_F, \epsilon^c\right) - \varphi^c\left(z, t_I, x^c_I, \epsilon^c\right), \\
R^c\left(z, t, x^c, u^c, \epsilon^c\right) &= \varphi^{c\mathrm{T}}_{x^c} f^c\left(z, t, x^c, u^c, \epsilon^c\right) - \\
&\quad - f^k\left(t, z, \epsilon^c, x^c(k, t), u^c(k, t)\right) + \varphi^c_t\left(z, t, x^c, \epsilon^c\right), \\
\mu^c\left(z, t, \epsilon^c\right) &= \sup_{\substack{x^c \in \mathbf{X}^c(z, t, \epsilon^c), \\ u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c, \epsilon^c)}} R^c\left(z, t, x^c, u^c, \epsilon^c\right), \\
l^c\left(z, \epsilon^c\right) &= \inf_{\gamma^c \in \mathbf{\Gamma}(z, \epsilon^c)} G^c\left(z, \gamma^c, \epsilon^c\right),
\end{aligned}$$

$$\mu(k,\epsilon^c) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x\in \mathbf{X}(k),\\ u\in \mathbf{U}(k,x)}} R(k,x,u), & k \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K}',\\ -\inf\limits_{x\in\mathbf{X}(k)} l^c(z,\epsilon^c), & k\in \mathbf{K}', \end{cases}$$

$$l = \inf_{x\in\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{X}(k_F)} G(x),$$

$$\mu^*(k) = \sup_{\epsilon^c\in\mathbf{E}^c}\left\{\mu(k,\epsilon^c) - \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} \mu^c(z,t,\epsilon^c)dt\right\}.$$

Здесь $\varphi^c_{x^c}$ – градиент φ^c в пространстве (x^c), T – знак транспонирования.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого элемента* $m\in \mathbf{D}$ *и любых* φ, φ^c *имеет место оценка*

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \le \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса $m^{\mathrm{I}}\in \mathbf{D}$ *и* $m^{\mathrm{II}}\in \mathbf{E}$ *и функционалы* φ *и* φ^c, *такие что* $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$ *и* $m^{\mathrm{II}}\in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Теорема 2. *Пусть заданы: последовательность дискретно-непрерывных процессов с параметрами* $\{m_s\}\subset\mathbf{D}$ *и функционалы* φ, φ^c, *для которых справедливы следующие условия:*

1) $\mu^c(z,t,\epsilon^c)$ *– кусочно-непрерывна при каждом* z*;*
2) $R(k,x_s(k),u_s(k))\to\mu(k),\quad k\in \mathbf{K}$*;*
3) $\int\limits_{\mathbf{T}(z_s)} \left(R^c(z_s,t,x^c_s(t),u^c_s,\epsilon^c_s) - \mu^c(z_s,t,\epsilon^c_s)\right)dt\to 0$, $k\in\mathbf{K}'$, $t\in \mathbf{T}(z_s)$*;*
4) $G^c(z_s,\gamma^c_s,\epsilon^c_s) - l^c(z_s,\epsilon^c_s)\to 0,\quad k\in\mathbf{K}'$*;*
5) $G(x_s(t_F))\to l$*;*
6) $\mu(k,\epsilon^c_s) - \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} \mu^c(z,t,\epsilon^c_s)\,dt\to\mu^*(k)$.

Тогда последовательность $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *– минимизирующая для* I *на* $\mathbf{D}$.

Доказательство обоих утверждений непосредственно следует из принципа расширения [16, 17] и проводится по аналогии с доказательством для ДНС без параметра [12].

3. Метод улучшения управления и параметра

Предположим, что $\mathbf{X}(k) = \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{X}^c(z,t,\epsilon^c) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $\mathbf{E}^c(k) = \mathbb{R}$, $x_I^c = \xi\left(z,\epsilon^c\right)$, k_I, x_I, k_F, $t_I(k)$, $t_F(k)$ – заданы, $x_F^c \in \mathbb{R}^{n(k)}$ и системы нижнего уровня не зависят от управления u^d. Как указано в [18], задача улучшения состоит, по существу, в построении оператора $\theta(m)$, $\theta : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, такого что $I(\theta(m)) \leq I(m)$. При некотором заданном начальном элементе такой оператор генерирует улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность $\{m_s\} : m_{s+1} = \theta(m_s)$.

Используем для построения метода принципы расширения [17] и локализации [19]. Из последнего следует, что задачу улучшения некоторого элемента m^{I} можно заменить задачей о минимуме вспомогательного функционала

$$I_\alpha(m) = \alpha I(m) + \frac{1}{2}(1-\alpha)J(m^{\mathrm{I}}, m), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{4}$$

Элемент, доставляющий минимум функционалу (4), обозначим через m_α. Во втором слагаемом $J(m^{\mathrm{I}}, m)$ – функционал типа метрики. Изменяя α от 0 к 1, можно достичь необходимой степени близости m_α к m^{I}, что позволяет получить алгоритм с параметром α. Выбор α определяется при конкретном применении. Задача этого параметра – обеспечить наибольшее значение разности $I(m^{\mathrm{I}}) - I(m_\alpha)$, тогда соответствующий элемент m_α принимается за m^{II}.

Вспомогательный функционал зададим в виде:

$$I_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}(1-\alpha)\Bigg(\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} |\Delta u(k)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'} \int\limits_{\mathbf{T}(z)} |\Delta u^c(k,t)|^2 dt\Bigg).$$

В представленном выше выражении $\alpha \in [0,1]$, $\Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^c = u^c - u^{c\mathrm{I}}$.

Согласно указанному принципу расширения по заданному элементу $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$, на котором $I_\alpha(m^{\mathrm{II}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) < I_\alpha(m^{\mathrm{I}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right)$ или $L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) - L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right) < 0$. Рассмотрим приращение функционала $L_\alpha(m)$. Имеем:

$$\Delta L_\alpha \approx G_{x_F}^{\mathrm{T}} \Delta x_F - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \left(R_x^{\mathrm{T}}\Delta x + R_u^{\mathrm{T}}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu} \Delta u\right) +$$
$$+ \sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F} \Big(G_{x_F^c}^{c\mathrm{T}} \Delta x_F^c + G_x^{c\mathrm{T}}\Delta x + G_{\epsilon^c}^{c\mathrm{T}}\Delta\epsilon^c -$$
$$- \int\limits_{\mathbf{T}(z)} \Big(R_{x^c}^{c\mathrm{T}}\Delta x^c + R_x^{c\mathrm{T}}\Delta x + R_{u^c}^{c\mathrm{T}}\Delta u^c +$$

$$+R^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c}\Delta\epsilon^c+\frac{1}{2}\Delta u^{c\mathrm{T}}R^c_{u^cu^c}\Delta u^c\Big)\,dt\Big)\,,$$

где $\Delta u=u-u^{\mathrm{I}}$, $\Delta x=x-x^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^c=u^c-u^{c\mathrm{I}}$, $\Delta x^c=x^c-x^{c\mathrm{I}}$, $\Delta x^c_F=x^c_F-x^{c\mathrm{I}}_F$, $\Delta\epsilon^c=\epsilon^c-\epsilon^{\ c\mathrm{I}}$, $x_F=x(k_F)$. Здесь функции R, G, R^c, G^c определены для функционала I_α, а их первые и вторые производные подсчитаны при $u=u^{\mathrm{I}}$, $x=x^{\mathrm{I}}$, $x^c=x^{c\mathrm{I}}$, $u^c=u^{c\mathrm{I}}$, $\epsilon^c=\epsilon^{\ c\mathrm{I}}$.

Предположим, что матрицы R_{uu} и $R^c_{u^cu^c}$ отрицательно определены (это всегда достижимо за счет выбора параметра α [19]). Найдем Δu, Δu^c, доставляющие максимум выражениям, стоящим под знаками сумм $\sum\limits_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}$ и $\sum\limits_{\mathbf{K}'\setminus t_F}$ соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\Delta u=-(R_{uu})^{-1}R_u,\quad \Delta u^c=-(R^c_{u^cu^c})^{-1}R^c_{u^c}.$$

Зададим функции $\varphi(k,x)$ и $\varphi^c\,(z,t,x,\epsilon^c)$ в виде:

$$\varphi=\psi^{\mathrm{T}}(k)x(k),\quad \varphi^c=\lambda^{\mathrm{T}}(k,t)x(k)+\psi^{c\mathrm{T}}(k,t)x^c(k,t),$$

где ψ,ψ^c,λ – вектор-функции. Для выполнения неравенства $\Delta L<0$ потребуем далее, чтобы остальные слагаемые под знаками вышеуказанных сумм не зависели от Δx, Δx^c_F, Δx^c. Это требование будет достигнуто, если:

$$G_{x_F}=0,\quad R_x=0,\quad G^c_{x^c_F}=0,\quad G^c_x=0,\quad R^c_{x^c}=0,\quad R^c_x=0.$$

Дополним указанные равенства условием стыковки уровней:

$$\frac{d}{dx}(\varphi(k+1,\theta(k,x,x^c_F,x^c_I))-\varphi^c(k,x,t_F,x^c_F))=0. \tag{5}$$

Расшифровка вышеприведенных равенств с учетом условия стыковки уровней приводит к задаче Коши для ДНС относительно ψ, ψ^c, λ с начальными условиями на правом конце:

$$\psi\,(k_F)=-\alpha F_{x(k_F)},\quad \psi\,(k)=H_x(\psi(k+1)), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
H(k,\psi,x,u)&=\psi^{\mathrm{T}}(k+1)f(k,x,u), && k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F,\\
\psi(k)&=H_x+(H_{x^c}\xi_x)^{\mathrm{T}}+\lambda(k,t_F)-\\
&\quad-\lambda(k,t_I)+\xi_x^{\mathrm{T}}\psi^c(t_I), && k\in\mathbf{K}'\setminus k_F,\\
H(k,\psi,x^c_I,x^c_F)&=\psi^{\mathrm{T}}(k+1)\theta(z,x^c_I,x^c_F), && k\in\mathbf{K}',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot\lambda&=-H^c_x, &\quad \lambda\,(k,t_F)&=H_x+\xi_x^{\mathrm{T}}H_{x^c_I},\\
\dot\psi^c&=-H^c_{x^c}, &\quad \psi^c(k,t_F)&=H_{x^c_F},
\end{aligned}$$

$$H^c(z,t,\psi^c,x^c,u^c,\epsilon^c) = \psi^{c\mathrm{T}} f^c(z,t,x^c,u^c,\epsilon^c(k)) - \\ - f^k(t,x^c(k,t),u^c(k,t),\epsilon^c(k)), \qquad k \in \mathbf{K}'.$$

Здесь для краткости в правых частях указаны лишь аргументы $\psi(k+1)$ и $\psi^c(k,t)$, необходимые для понимания соотношений. Отметим, что полученная система линейна, т.е. заведомо разрешается.

При этом приращения управляющих воздействий имеют вид:

$$\Delta u = -(H_{uu} - (1-\alpha)E)^{-1} H_u, \\ \Delta u^c = -(H^c_{u^c u^c} - (1-\alpha)E)^{-1} H^c_{u^c}, \tag{7}$$

где E – единичные матрицы соответствующих размеров.

Запишем оставшиеся слагаемые в выражении для приращения функционала ΔL_α, учитывая подстановку в него формул для приращений управлений обоих уровней, и обозначив итог через ΔM_α. Имеем:

$$\Delta M_\alpha \approx -\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \left(-\frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu} \Delta u\right) + \\ + \sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F} \Big(G^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c}\Delta\epsilon^c - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} \Big(R^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c}\Delta\epsilon^c - \frac{1}{2}\Delta u^{c\mathrm{T}} R^c_{u^c u^c}\Delta u^c\Big)dt\Big).$$

В приведенном выражении при сделанных ранее предположениях квадратичные формы от Δu и Δu^c отрицательно определены.

Рассмотрим теперь слагаемые, зависящие от $\Delta\epsilon^c$. Выберем $\Delta\epsilon^c$ таким образом, чтобы рассматриваемое выражение обеспечивало выполнение неравенства $\Delta M_\alpha < 0$. Выбор становится очевидным, если прибегнуть к подробной записи скалярных произведений, входящих в выражение для ΔM_α. Итак:

$$\Delta M_\alpha \approx \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} \Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta u + \sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\sum_{i=1}^{b(k)} \Big(G^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c_i}\Delta\epsilon^c_i - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c_i}\Delta\epsilon^c_i dt\Big) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\int\limits_{\mathbf{T}(z)} \Delta u^{c\mathrm{T}} R^c_{u^c u^c}\Delta u^c dt.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\epsilon^c_i(k) = \beta^c\Big(G^c_{\epsilon^c_i} - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c_{\epsilon^c_i} dt\Big), \quad k \in \mathbf{K}'\setminus k_F, \quad i = 1,2,\ldots,b(k),$$

где β^c – коэффициент, $\beta^c < 0$.

4. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру.

1. Задаются α и $\beta^c(k)$. «Слева направо» просчитывается ДНС (1), (2) при $u = u_s(k)$, $u^c = u^c_s(k,t)$, ϵ^c_s, заданных начальных условиях, получаются соответствующие траектории $(x_s(k),\ x^c_s(k,t))$.
2. «Справа налево» разрешается ДНС относительно $\psi(k)$, $\psi^c(k,t)$ и $\lambda(k,t)$.
3. Находятся $\Delta u,\ \Delta u^c$, новые управления $u = u_s(k) + \Delta u$, $u^c = u^c_s(k,t) + \Delta u^c$ и новое значение параметра ϵ^c при каждом k.
4. При найденных управлениях, параметре и начальном условии $x(k_I) = x_I$ просчитывается «слева направо» исходная ДНС (1), (2). Тем самым определяется новый элемент m_{s+1}.

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

Теорема 3. *Предположим, что функционал I ограничен снизу и для ДНС (1), (2) построена указанная итерационная процедура. Тогда последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$ сходится по функционалу, т.е. существует число I^*, такое что $I^* \le I(m_s),\ I(m_s) \to I^*$.*

Доказательство. Очевидно, что рассмотренный оператор улучшения обеспечивает монотонность построенной последовательности $\{m_s\}$ (по функционалу). Таким образом, получается монотонная числовая последовательность

$$\{I_s\} = \{I(m_s)\}, \quad I_{s+1} \le I_s,$$

ограниченная снизу, которая по известной теореме анализа сходится к некоторому пределу: $I_s \to I^*$. $\square$

Продемонстрируем работу предложенного алгоритма на примере.

5. Пример 1

Рассмотрим работу метода на примере системы, динамика которой включает в себя два этапа.

1-ый этап:

$$\dot{x}^c_1 = \epsilon^c (x^c_1)^2 + u^c, \qquad \dot{x}^c_2 = (\epsilon^c)^2 x^c_1 x^c_2 + \frac{1}{2}(u^c)^2,$$

$$x^c_1(0) = 0.3, \qquad x^c_2(0) = 1,$$

$$t \in [0,1], \quad I^0 = \int\limits_0^1 \big((x_1^c)^2 - x_2^c u^c\big) dt.$$

2-ой этап:

$$\dot{x}_1^c = x_2^c u^c, \qquad \dot{x}_2^c = -\epsilon^c (x_1^c)^2 + (u^c)^2,$$

$$t \in [1,3], \quad I^1 = \int\limits_1^3 x_1^c (u^c)^2 dt.$$

Функционал в примере: $I = x_1^c(3) \to \min$. Построим ДНС. Нетрудно видеть, что $\mathbf{K} = 0,1,2$; $\mathbf{K}' = 1$. Поскольку оба этапа связаны через переменную x_1^c, то она и играет роль x, а дискретный процесс верхнего уровня принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^c(0,0) = 0.3, & x_2(0) &= x_2^c(0,0) = 1, \\ x(1) &= x^c(0,1), & x(2) &= x^c(1,3), \\ I &= x(2), & x^c(1,1) &= x(1), \\ \xi &= x(1), & \theta(1) &= x^c(0,1). \end{aligned}$$

Модель ДНС может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передачи информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда $x(3) = x(2) = x^c(1,3)$.

Основные конструкции имеют вид:

$$\begin{aligned} H^c(0,t,x_1^c,x_2^c,u^c,\psi_1^c,\psi_2^c,\epsilon^c) &= \psi_1^c \left(\epsilon^c (x_1^c)^2 + u^c\right) + \\ &+ \psi_2^c \left((\epsilon^c)^2 x_1^c x_2^c + \frac{1}{2}(u^c)^2 \right) - (x_1^c)^2 + x_2^c u^c, \\ H^c(1,t,x_1^c,x_2^c,u^c,\psi_1^c,\psi_2^c,\epsilon^c) &= \psi_1^c x_2^c u^c + \psi_2^c(-\epsilon^c (x_1^c)^2 + (u^c)^2) - x_1^c (u^c)^2. \end{aligned}$$

Поскольку процессы нижнего уровня не зависят от x, то на обоих этапах $\lambda = 0$. На первом этапе при $k = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1^c &= -2\psi_1^c \epsilon^c x_1^c - \psi_2^c (\epsilon^c)^2 x_2^c + 2x_1^c, \\ \dot{\psi}_2^c &= -\psi_2^c (\epsilon^c)^2 x_1^c - u^c, \\ H_{u^c}^c &= \psi_1^c + \psi_2^c u^c + x_2^c, \\ H_{u^c u^c}^c &= \psi_2^c, \\ H_{\epsilon^c}^c &= \psi_1^c (x_1^c)^2 + 2\psi_2^c \epsilon^c x_1^c x_2^c. \end{aligned}$$

На втором этапе при $k=1$ конструкции принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot\psi_1^c &= 2\psi_2^c\epsilon^c x_1^c + (u^c)^2,\\ \dot\psi_2^c &= -\psi_1^c u^c,\\ H_{u^c}^c &= \psi_1^c x_2^c + 2u^c(\psi_2^c - x_1^c),\\ H_{u^c u^c}^c &= 2(\psi_2^c - x_1^c),\\ H_{\epsilon^c}^c &= -\psi_2^c (x_1^c)^2.\end{aligned}$$

Выпишем остальные конструкции. Поскольку $\mathbf{K}'=1$, то

$$\begin{aligned}G^c =&-\psi_1(1)x_1^c(0,1) - \psi_2(1)x_2^c(0,1) + \psi_1(0)x_1^c(0,0) +\\ &+\psi_2(0)x_2^c(0,0) + \psi_1^c(1,3)x_1^c(1,3) + \psi_2^c(1,3)x_2^c(1,3) -\\ &-\psi_1^c(0,0)x_1^c(0,0) - \psi_2^c(0,0)x_2^c(0,0),\\ H(1,\,&\psi_1,\psi_2,x_1^c(0,1),x_2^c(0,1)) = \psi_1(2)x_1^c(0,1) + \psi_2(2)x_2^c(0,1),\\ G =&\ x_1(2) + \psi_1(2)x_1(2) + \psi_2(2)x_2(2) - \psi_1(0)x_1(0) - \psi_2(0)x_2(0),\\ &\psi_1(2) = -\alpha, \quad \psi_1^c(0,1) = \psi_1^c(1,3) = \psi_1(2),\\ &\psi_2(2) = 0, \qquad \psi_2^c(0,1) = \psi_2^c(1,3) = \psi_2(2).\end{aligned}$$

Формулы для приращений управления и параметра на этапах имеют следующий вид. На первом этапе:

$$\Delta u^c(0,t) = -\frac{\psi_1^c + \psi_2^c u^c + x_2^c}{\alpha - 1 + \psi_2^c},$$

$$\Delta\epsilon^c(0) = -\beta^c(0)\int_0^1 \Big(\psi_1^c (x_1^c)^2 + 2\psi_2^c\epsilon^c x_1^c x_2^c\Big)dt.$$

На втором этапе:

$$\Delta u^c(1,t) = -\frac{\psi_1^c x_2^c + 2u^c(\psi_2^c - x_1^c)}{\alpha - 1 + 2(\psi_2^c - x_1^c)},$$

$$\Delta\epsilon^c(1) = \beta^c(1)\int_1^3 \psi_2^c (x_1^c)^2 dt.$$

На решение примера потребовалось 2 итерации. При этом значение функционала с $I^0 = 0.8976$ уменьшилось до $I^2 = 0.7043$. Изменение функционала по итерациям представлено в таблице 1. Графики управляющих

Таблица 1. Изменение значений функционала по итерациям

k	$\beta^c(0)$	$\beta^c(1)$	$\epsilon^c(0)$	$\epsilon^c(1)$	I^k	$\lvert I^k - I^{k-1}\rvert$
0			0.3	0.5	0.8976	
1	-0.6	-1	0.2327	0.5590	0.7053	0.1923
2	-0.4	-0.5	0.2076	0.5510	0.7043	0.001

воздействий и состояний процесса на первой и последней итерациях даны на рисунках 1, 2. При расчетах параметр $\alpha = 0.3$.

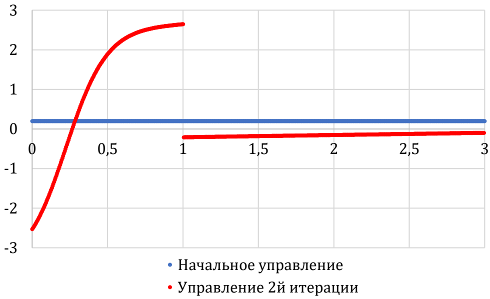


Рисунок 1. График управляющих воздействий по итерациям

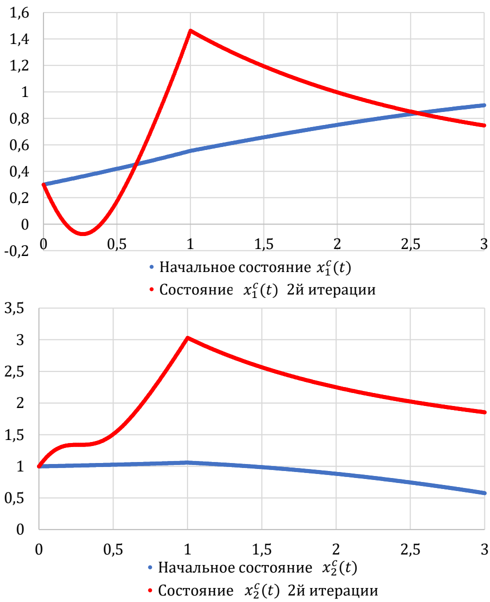


Рисунок 2. Графики состояний $x_1^c(t)$ и $x_2^c(t)$ процесса по итерациям

Рассмотрим далее частный случай приведенной выше модели.

6. Квазилинейные дискретно-непрерывные системы

В данном случае система верхнего уровня имеет вид:

$$x(k+1) = A(k, x(k))x(k) + B(k, x(k))u(k), \tag{8}$$

а на нижнем уровне действуют непрерывные управляемые системы:

$$\dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = A^c(k,t,x^c)x^c + B^c(k,t,x^c)u^c + \epsilon^c f(k,x^c), \tag{9}$$
$$t \in \mathbf{T}\,(k) = [t_I(k), t_F(k)].$$

Здесь

A, B, A^c, B^c – матрицы размеров $m(k)\times m(k)$, $m(k)\times p(k)$, $n(k)\times n(k)$, $n(k)\times r(k)$ соответственно,

$f(k,x^c)$ – заданная при каждом k функция,

ϵ^c – параметр.

Кроме того, при каждом $k \in \mathbf{K}'$ оператор правой части (8) имеет вид

$$x(k+1) = \theta(k)x_F^c,$$

где $\theta(k)$ – матрица размера $m(k)\times n(k)$,

$$x(k) \in \mathbb{R}^{m(k)}, \quad u(k) \in \mathbb{R}^{p(k)},$$
$$x^c \in \mathbf{X}^c(z,t,\epsilon^c) \subset \mathbb{R}^{n(k)},$$
$$u^c \in \mathbf{U}^c\,(z,t,x^c,\epsilon^c) \subset \mathbb{R}^{p(k)},$$
$$\epsilon^c \in \mathbf{E}^c(k) \subset \mathbb{R}^{(k)}, \quad z = (k,x).$$

Для системы (9) на отрезке $[t_I(k), t_F(k)]$ задана промежуточная цель в виде функционала:

$$I^k = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{T}(k)} \left(x^{c\mathrm{T}} S^c(t,k,x^c)x^c + u^{c\mathrm{T}} Q^c(k,t,x^c)u^c\right)dt +$$
$$+\lambda^c(k,x_F^c)x_F^c + \frac{1}{2}(x_F^c)^{\mathrm{T}}\Lambda^c(k,x_F^c)x_F^c \to \inf.$$

Здесь

S^c, Q^c, Λ^c – матрицы размеров $n(k)\times n(k)$, $r(k)\times r(k)$, $n(k)\times n(k)$ соответственно,

λ^c – вектор размера $n(k)$;

как и ранее,

$z = (k,x)$ – совокупность переменных верхнего уровня, играющих на нижнем уровне роль параметров,

$t_I = \tau(z)$, $x_I^c = \xi(z)$ – заданные функции z.

Решением этой двухуровневой системы считается набор

$$m = (x(k), u(k)),$$

где при $k \in \mathbf{K}'$:

$$u(k) = (m^c(k, \epsilon^c)), \quad m^c(k, \epsilon^c) \in \mathbf{D}^c(z, \epsilon^c)$$

(называемый *квазилинейным дискретно-непрерывным процессом*). Как и ранее,

$m^c(k, \epsilon^c)$ – непрерывный процесс $(x^c(k,t,\epsilon^c), u^c(k,t,\epsilon^c), \epsilon^c(k))$,
$t \in \mathbf{T}(z)$,
$\mathbf{D}^c(z, \epsilon^c)$ – множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (9) с дополнительными ограничениями при кусочно-непрерывных $u^c(k,t,\epsilon^c)$ и кусочно-гладких $x^c(k,t,\epsilon^c)$ (на каждом дискретном шаге k).

Совокупность элементов m, удовлетворяющих всем указанным условиям, обозначим через $\mathbf{D}$ и назовем множеством допустимых квазилинейных дискретно-непрерывных процессов. Минимизируемый функционал: $I = F(x(k_F))$.

Поскольку приведенная модель является частным случаем уже рассмотренной модели, то для нее справедливы теоремы 1 и 2. Для удобства изложения приведем основные конструкции достаточных условий оптимальности.

7. Основные конструкции и уравнения метода улучшения

Имеем:

$$L = G(x(k_F)) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) +$$
$$+ \sum_{\mathbf{K}'} \Big(G^c(z, \gamma^c(z)) - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c(k, z, t, x^c(k,t), u^c(k,t), \epsilon^c) dt \Big),$$

$$G(x) = F(x) + \varphi(k_F, x) - \varphi(k_I, x(k_I)),$$

$$R(k, x, u) = \varphi(k+1, A(k, x(k))x(k) + B(k, x(k))u(k)) - \varphi(k, x),$$

$$G^c(z, \gamma^c, \epsilon^c) = -\varphi(k+1, \theta(k)x^c_F) + \varphi(k, x) +$$
$$+ \varphi^c(z, t_F, x^c_F, \epsilon^c) - \varphi^c(z, t_I, x^c_I, \epsilon^c),$$

$$R^c(z, t, x^c, u^c, \epsilon^c) = \varphi^{c\mathrm{T}}_{x^c}(A^c(k,t,x^c)x^c + B^c(k,t,x^c)u^c + \epsilon^c f(k, x^c)) -$$
$$- f^k(t, z, x^c(k,t), u^c(k,t)) + \varphi^c_t(z, t, x^c, \epsilon^c),$$

$$\mu^c(z, t, \epsilon^c) = \sup_{\substack{x^c \in \mathbf{X}^c(z,t), \\ u^c \in \mathbf{U}^c(z,t,x^c)}} R^c(z, t, x^c, u^c, \epsilon^c),$$

$$l^c\left(z,\epsilon^c\right) = \inf_{\gamma^c\in\mathbf{\Gamma}(z)} G^c\left(z,\gamma^c,\epsilon^c\right),$$

$$\mu(k) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x\in\ \mathbf{X}(k),\\ u\in\ \mathbf{U}(k,x)}} R(k,x,u), & k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}',\\ -\inf\limits_{x\in\mathbf{X}(k)} l^c(z,\epsilon^c), & k\in\ \mathbf{K}', \end{cases}$$

$$l = \inf_{x\in\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{X}(k_F)} G(x),$$

$$\mu^*(k) = \sup_{\epsilon^c\in\ \mathbf{E}^c}\left\{\mu\left(k,\epsilon^c\right) - \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} \mu^c\left(z,t,\epsilon^c\right)dt\right\}.$$

Выпишем теперь уравнения метода улучшения.

$$\psi\left(k_F\right) = -\alpha F_{x(k_F)},\quad \psi\left(k\right) = H_x(\psi(k+1)), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} H(k,\psi,x,u) &= \psi^{\mathrm{T}}(k+1)(A(k,x(k))x(k)+\\ &\quad + B(k,x(k))u(k)), && k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F,\\ \psi\left(k\right) &= H_x + (H_{x^c}\xi_x)^{\mathrm{T}} + \xi_x^{\mathrm{T}}\psi^c(t_I), && k\in\mathbf{K}'\setminus k_F,\\ H(k,\psi,x_I^c,x_F^c) &= \psi^{\mathrm{T}}(k+1)\theta x_F^c, && k\in\mathbf{K}',\\ \dot{\psi}^c &= -H^c_{x^c}, && \psi^c(k,t_F) = H_{x_F^c}, \end{aligned}$$

$$H^c(z,t,\psi^c,x^c,u^c,\epsilon^c) = \psi^{c\mathrm{T}}\left(A^c(k,t,x^c)x^c + B^c(k,t,x^c)u^c + \epsilon^c f(k,x^c)\right) - \\ -\frac{1}{2}\left(x^{c\mathrm{T}}S^c(t,k,x^c)x^c + u^{c\mathrm{T}}Q^c(k,t,x^c)u^c\right),\quad k\in\mathbf{K}'.$$

Здесь для краткости в правых частях указаны лишь аргументы $\psi(k+1)$ и $\psi^c(k,t)$, необходимые для понимания соотношений. Отметим, что полученная система линейна, т.е. заведомо разрешается.

При этом приращения управляющих воздействий имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -(H_{uu} - (1-\alpha E))^{-1}H_u,\\ \Delta u^c &= -(H^c_{u^cu^c} - (1-\alpha E))^{-1}H^c_{u^c}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $E-$единичные матрицы соответствующих размеров. Иначе:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -(Q-(1-\alpha)E)^{-1}(B^{\mathrm{T}}\psi),\\ \Delta u^c &= -(Q^c-(1-\alpha)E)^{-1}(B^{c\mathrm{T}}\psi^c - Q^c u^c),\\ \Delta\epsilon^c &= \beta^c\Big(\int\limits_{\mathbf{T}(z)} f^{\mathrm{T}}\psi^c dt\Big),\quad k\in\ \mathbf{K}'\setminus k_F. \end{aligned} \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что алгоритм метода состоит из тех же пунктов, что и ранее. Он был реализован на следующем примере.

8. Пример 2

Задана состоящая из двух этапов квазилинейная ДНС с коэффициентами, которые зависят от состояния:

1-ый этап:

$$\dot{x}_1^c = (x_1^c)^2(x_1^c - u_1^c) + \epsilon^c (x_1^c)^3,$$
$$x_1^c(0) = 0.3,$$
$$t \in [0,2], \quad I^0 = \int\limits_0^2 (x_1^c - 1)^2 (u_1^c)^2 dt.$$

2-ой этап:

$$\dot{x}_1^c = x_1^c \exp(-x_1^c) - 2x_1^c u_1^c + \epsilon^c \sqrt{x_1^c},$$
$$t \in [2,3], \quad I^1 = \int\limits_2^3 (u_1^c x_1^c)^2 dt,$$
$$I = (x_1^c(3))^3 - 3x_1^c(3) \to \min.$$

Приведем задачу к стандартному виду. Очевидно, что $\mathbf{K} = \{0,1,2\}$. При $k = 0$ $n = r = 1$, а матрицы нижнего уровня имеют вид:

$$A^c(0) = (x_1^c)^2, \qquad B^c(0) = -(x_1^c)^2, \qquad Q^c(0) = 2(x_1^c - 1)^2,$$
$$S^c(0) = 0, \qquad f(0, x_1^c) = (x_1^c)^3.$$

На следующем этапе при $k = 1$ также $n = r = 1$, а матрицы нижнего уровня выглядят следующим образом:

$$A^c(1) = \exp(-x_1^c), \qquad B^c(1) = -2x_1^c, \qquad Q^c(1) = 2(x_1^c)^2,$$
$$S^c(1) = 0, \qquad f(1, x_1^c) = \sqrt{x_1^c}.$$

Нетрудно видеть, что на верхнем уровне за x имеет смысл взять x_1^c, поскольку эта переменная проходит через оба этапа и через нее же определен общий функционал. Имеем

$$I = (x(2))^3 - 3x(2),$$
$$\lambda = -3, \quad \Lambda = (x(2))^2,$$
$$x(1) = x_1^c(0,2), \quad x_1^c(1,2) = x(1),$$
$$\theta = 1, \quad \theta^0 = 0, \quad \xi = 1.$$

Выпишем основные конструкции, необходимые для расчетов. Имеем:

$$H^c(0, t, \psi_1^c, \psi_2^c, x_1^c, x_2^c, u_1^c, u_2^c) = \psi_1^c \left((x_1^c)^3(\epsilon^c + 1) - (x_1^c)^2 u_1^c\right) - \\ - (x_1^c - 1)^2 (u_1^c)^2,$$

$$H^c(1,t,\psi_1^c,x_1^c,u_1^c) = \psi_1^c\left(x_1^c\exp(-x_1^c) - 2x_1^c u_1^c + \epsilon^c\sqrt{x_1^c}\right) - (x_1^c u_1^c)^2,$$

На первом этапе:

$$\dot\psi_1^c = -\psi_1^c\left(3(x_1^c)^2(\epsilon^c+1) - 2x_1^c u_1^c\right) + 2(x_1^c-1)(u_1^c)^2,$$

$$\begin{aligned}
&H^c_{u_1^c} = -\psi_1^c(x_1^c)^2 - 2(x_1^c-1)^2u_1^c,\\
&H^c_{u_1^c u_1^c} = -2(x_1^c-1)^2,\\
&\Delta u_1^c(0) = \frac{\psi_1^c(x_1^c)^2 + 2(x_1^c-1)^2u_1^c}{\alpha - 1 - 2(x_1^c-1)^2},\\
&\Delta\epsilon^c = \beta^c\int\limits_0^2 \psi_1^c(x_1^c)^3dt.
\end{aligned}$$

На втором этапе:

$$\dot\psi_1^c = -\psi_1^c\Big(\exp(-x_1^c) - x_1^c\exp(-x_1^c) - 2u_1^c + \frac{\epsilon^c}{2\sqrt{x_1^c}}\Big) + 2(u_1^c)^2x_1^c,$$

$$\begin{aligned}
&H^c_{u_1^c} = -2\psi_1^c x_1^c - 2u_1^c(x_1^c)^2,\\
&H^c_{u_1^c u_1^c} = -2(x_1^c)^2,\\
&\Delta u_1^c(1) = \frac{2\psi_1^c x_1^c + 2u_1^c(x_1^c)^2}{\alpha - 1 - 2(x_1^c)^2},\\
&\Delta\epsilon^c = \beta^c\int\limits_2^3 \psi_1^c\sqrt{x_1^c}dt.
\end{aligned}$$

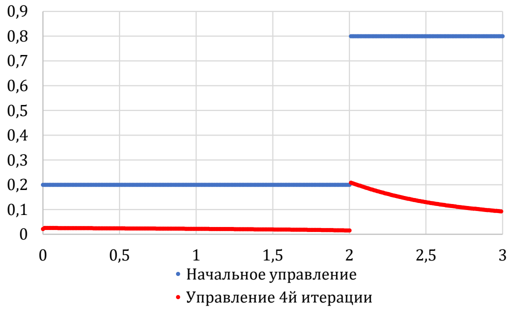
Модель ДНС может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передачи информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда

$$\begin{aligned}
&x(3) = x(2) = x^c(1,3),\\
&\psi(3) = \psi(2) = -3\alpha((x(2)^2 - 1),\\
&\psi_1^c(0,2) = \psi_1^c(1,3) = \psi(2).
\end{aligned}$$

На решение примера потребовалось 4 итерации. При этом значение функционала с $I^0 = -1.05313$ уменьшилось до $I^4 = -1.99979$. Изменение функционала по итерациям представлено в таблице 2. Графики управляющих воздействий и состояний процесса на первой и последней итерациях даны на рисунке 3. При расчетах параметр $\alpha = 0.4$.

Таблица 2. Изменение значений функционала по итерациям

k	$\beta^c(0)$	$\beta^c(1)$	$\epsilon^c(0)$	$\epsilon^c(1)$	I^k	$\lvert I^k - I^{k-1}\rvert$
0			0.9	0.5	−1.05313	
1	−0.8	−1	0.7689	0.1744	−1.99881	0.94568
2	−0.8	−1	0.7553	0.1514	−1.99974	0.00093
3	−0.8	−0.3	0.7498	0.1464	−1.99978	0.00004
4	−0.4	−0.5	0.7476	0.1373	−1.99979	0.00001



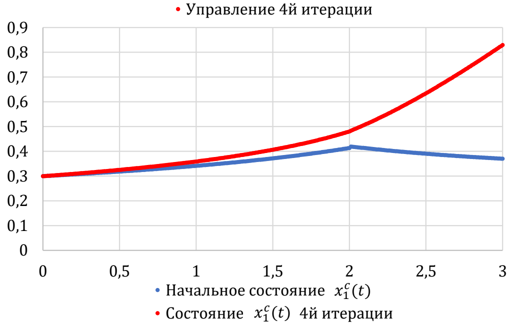


Рисунок 3. Графики управляющих воздействий и состояния $x_1^c(t)$ процесса по итерациям

9. Заключение

В работе рассмотрена одна из гибридных систем: дискретно-непрерывная система (ДНС) с параметрами и промежуточными критериями. Для решения поставленной для нее задачи оптимального управления приведен аналог достаточных условий оптимальности Кротова в виде двух теорем. Этот аналог далее использован для построения метода улучшения управления и параметров. Сформулирован алгоритм. Отдельно приведены уравнения метода для частного случая: квазилинейных ДНС с параметром. Алгоритм апробирован на иллюстративных примерах, приведены результаты расчетов и графики.

Список литературы

[1] Емельянов С. В. (ред.) *Теория систем с переменной структурой.*– М.: Наука.– 1970.– 592 с. ↑126

[2] Гурман В. И. *К теории оптимальных дискретных процессов* // Автоматика и телемеханика.– 1973.– № 6.– С. 53–58. ↑126

[3] Васильев С. Н. *Теория и применение логико-управляемых систем* // *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (Москва, 29–31 января 2003), М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.– 2003.– С. 23–52. ↑126

[4] Бортаковский А. С. *Достаточные условия оптимальности детерминированными логико-динамическими системами*, Информатика. Сер. Автоматизация проектирования.– т. **2–3**, М.: ВИМИ.– 1992.– С. 72–79. ↑126

[5] Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями.*– М.: Наука.– 2005.– ISBN 978-5-9710-5725-3.– 429 с. ↑126

[6] Lygeros J. *Lecture Notes on Hybrid Systems*, Notes for an ENSIETA short course, No 2-6/2/2004.– Rio, Patras: University of Patras.– 2004.– 82 pp. URL ↑126

[7] Van der Shaft A. J., Schumacher H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences.– Vol. **251**.– London: Springer-Verlag.– 2000.– ISBN 978-1-4471-3916-4.– 176 pp. doi ↑126

[8] Кротов В. Ф. *Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем* // Докл. АН СССР.– 1967.– Т. **172**.– № 1.– С. 18–21. ↑126, 128, 129

[9] Гурман В. И., Расина И. В. *Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах* // Автомат. и телемех..– 2012.– № 8.– С. 16–29. ↑126

[10] Расина И. В. *Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов* // Автомат. и телемех..– 2012.– № 10.– С. 3–17. ↑126

[11] Расина И. В. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры.*– М.: Физматлит.– 2014.– ISBN 978-5-94052-238-6.– 160 с. ↑126

[12] Расина И. В. *Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями* // *Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам*, ВМСППС'2017 (24–31 мая 2017 г., Алушта, Россия), М.: Изд-во МАИ.– 2017.– ISBN 978-5-4316-0401-0.– С. 699–701. ↑126, 130

[13] Батурин В. А., Урбанович Д. Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.*– Новосибирск: Наука.– 1997.– ISBN 5-02-031440-2.– 175 с. ↑126

[14] Расина И. В., Гусева И. С. *Дискретно-непрерывные системы с параметрами: метод улучшения управления и параметров* // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.– 2022.– Т. **39**.– С. 34–50. doi ↑127

[15] Габасов Р., Калинин А. И., Кириллова Ф. М., Лавринович Л. И. *К асимптотическим методам оптимизации квазилинейных систем управления* // Тр. ИММ УрО РАН.– 2019.– Т. **25**.– № 3.– С. 62–72. ↑127
[16] Кротов В. Ф., Гурман В. И. *Методы и задачи оптимального управления*.– М.: Наука.– 1973.– 448 с. ↑129, 130
[17] Гурман В. И. *Принцип расширения в задачах управления*.– М.: Наука.– 1985.– 228 с. ↑130, 131
[18] Гурман В. И. *Абстрактные задачи оптимизации и улучшения* // Программные системы: теория и приложения.– 2011.– № 5(9).– С. 21–29. ↑131
[19] Гурман В. И., Расина И. В. *О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума* // Автомат. и телемех..– 1979.– № 10.– С. 12–18. ↑131, 132

Поступила в редакцию	27.01.2022;
одобрена после рецензирования	16.03.2023;
принята к публикации	17.03.2023;
опубликована онлайн	20.03.2023.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Информация об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., гл. научн. сотр. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН и Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН. Специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 130 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968

e-mail: *irinarasina@gmail.com*

Ирина Сергеевна Гусева

к.ф.-м.н., ст.преп. Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, РФ, респ. Бурятия, г. Улан-Удэ; автор и соавтор более 20 публикаций; область интересов – оптимальное управление, численные методы

0000-0001-8720-3676

e-mail: *gulina.ig@gmail.com*

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS ISSN 2079-3316
Research Article OPTIMIZATION METHODS AND CONTROL THEORY

UDC 517.977.5
10.25209/2079-3316-2023-14-1-125-148

About One Class of Discrete-Continuous Systems with Parameters

Irina Viktorovna **Rasina**[1], Irina Sergeevna **Guseva**[2]

[1] Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia
[1] Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia
[2] Buryat State University, Ulan-Ude, Russia
[1]✉ *irinarasina@gmail.com*

Abstract. The study focuses on a special case of a hybrid system: discrete-continuous systems (DCS) with parameters and intermediate criteria. Such systems are two-level. The parameters are included only in continuous systems operating alternately at the lower level. The upper level is described by a discrete process and plays a connecting role for all the lower-level systems. The upper level also determines the policy of interaction of lower-level systems and provides minimization of functionality. The authors formulate an analogue of sufficient Krotov optimality conditions and construct a method for improving control and parameters. The paper contains an illustrative example. Based on the general conditions obtained, we have researched a special case: quasilinear DNS. (*In Russian*).

Key words and phrases: discrete-continuous systems with parameters, intermediate criteria, optimal control, quasilinear discrete-continuous systems

2020 *Mathematics Subject Classification*: 49M99; 49K99

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 21-11-00202

For citation: Irina V. Rasina, Irina S. Guseva. *About One Class of Discrete-Continuous Systems with Parameters*. Program Systems: Theory and Applications, 2023, **14**:1(56), pp. 125–148. (*In Russ.*). https://psta.psiras.ru/read/psta2023_1_125-148.pdf

References

[1] S. V. (red.) Emel'yanov. *Theory of Systems with Variable Structures*, Nauka, M., 1970 (in Russian), 592 pp.

[2] V. I. Gurman. "Theory of optimum discrete processes", *Autom. Remote Control*, **34**:7 (1973), pp. 1082–1087.

[3] S. N. Vasil'ev. "Theory and application of logic-based controlled systems", *Trudy 2-oj Mezhdunarodnoj konferencii "Identifikaciya sistem i zadachi upravleniya"*, SICPRO'03 (Moskva, 29–31 yanvarya 2003), Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN, M., 2003, pp. 23–52 (in Russian).

[4] A. S. Bortakovskij. "Sufficient optimality conditions for control of deterministic logical-dynamic systems", Informatika. Ser. Avtomatizaciya proektirovaniya, vol. **2–3**, VIMI, M., 1992, pp. 72–79 (in Russian).

[5] B. M. Miller, E. Ya. Rubinovich. *Optimization of the Dynamic Systems with Pulse Controls*, Nauka, M., 2005, ISBN 978-5-9710-5725-3 (in Russian), 429 pp.

[6] J. Lygeros. *Lecture Notes on Hybrid Systems*, Notes for an ENSIETA short course, No 2-6/2/2004, University of Patras, Rio, Patras, 2004, 82 pp. URL

[7] der Shaft A. J. Van, H. Schumacher. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. **251**, Springer-Verlag, London, 2000, ISBN 978-1-4471-3916-4, 176 pp. doi

[8] V. F. Krotov. "Sufficient conditions for the optimality of discrete control systems", *Dokl. AN SSSR*, **172**:1 (1967), pp. 18–21 (in Russian).

[9] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "Discrete-continuous representations of impulsive processes in the controllable systems", *Autom. Remote Control*, **73**:8 (2012), pp. 1290–1300.

[10] I. V. Rasina. "Iterative optimization algorithms for discrete-continuous processes", *Autom. Remote Control*, **73**:10 (2012), pp. 1591–1603. doi

[11] I. V. Rasina. *Hierarchical models of control systems of heterogeneous structure*, Fizmatlit, M., 2014, ISBN 978-5-94052-238-6 (in Russian), 160 pp.

[12] I. V. Rasina. "Discrete-continuous systems with intermediate criteria", *Materialy XX Yubilejnoj Mezhdunarodnoj konferencii po vychislitel'noj mexanike i sovremennym prikladnym programmnym sistemam*, VMSPPS'2017 (24–31 maya 2017 g., Alushta, Rossiya), Izd-vo MAI, M., 2017, ISBN 978-5-4316-0401-0, pp. 699–701 (in Russian). URL

[13] V. A. Baturin, D. E. Urbanovich. *Approximate Methods of Optimal Control Based on the Extension Principle*, Nauka, Novosibirsk, 1997, ISBN 5-02-031440-2 (in Russian), 175 pp.

[14] I. V. Rasina, I. S. Guseva. "Discrete-Continuous Systems with Parameters: Method for Improving Control and Parameters", *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika*, **39** (2022), pp. 34–50 (in Russian). doi

[15] R. Gabasov, A. I. Kalinin, F. M. Kirillova, L. I. Lavrinovich. "On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems", *Tr. IMM UrO RAN*, **25**:3 (2019), pp. 62–72 (in Russian). doi

[16] V. F. Krotov, V. I. Gurman. *Methods and Problems of Optimal Control*, Nauka, M., 1973 (in Russian), 448 pp.

[17] V. I. Gurman. *Extension Principle In Control Problems*, Nauka, M., 1985 (in Russian), 228 pp.

[18] V. I. Gurman. "Abstract problems of optimization and improvement", *Program Systems: Theory and Applications*, 2011, no. 5(9), pp. 21–29 (in Russian). URL

[19] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "On practical applications of conditions sufficient for a strong relative minimum", *Autom. Remote Control*, **40**:10 (1980), pp. 1410–1415.