

УДК 519.68:007.52

10.25209/2079-3316-2023-14-4-189-206



Построение нелинейной обратной связи в задаче слежения для модели колесного робота, основанное на технике SDDRE

Юлия Сергеевна **Белинская**¹, Дмитрий Александрович **Макаров**^{2✉}

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

^{2✉}makarov@isa.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача построения нелинейной обратной связи в задаче слежения для колесной робототехнической системы. Особенностью работы является постановка задачи, в которой желаемые траектории системы известны заранее, а также модификация ранее известного алгоритма на основе техники State-Dependent Riccati Equation. Численные эксперименты показывают, что предложенный подход позволяет обеспечить компромисс между качеством управления и скоростью работы.

Ключевые слова и фразы: Техника SDDRE, задача слежения, двухколесная робототехническая система

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00716

Для цитирования: Белинская Ю. С., Макаров Д. А. *Построение нелинейной обратной связи в задаче слежения для модели колесного робота, основанное на технике SDDRE* // Программные системы: теория и приложения. 2023. Т. 14. № 4(59). С. 189–206. https://psta.psir.ru/read/psta2023_4_189-206.pdf

Введение

Для построения оптимальных обратных связей большую роль играет уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). В общем случае его решение для нелинейных систем управления представляет собой трудоемкую задачу. Для ее упрощения была разработана техника SDRE. Ее основная идея заключается в представлении исходной нелинейной аффинной системы и критерия в псевдолинейном виде, при котором матрицы системы и критерия зависят от вектора состояния. Тогда при дополнительных предположениях уравнение ГЯБ сводится к алгебраическому матричному уравнению Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (State-Dependent Riccati Equation - SDRE), что дало название этой технике. Несмотря на эвристический характер полученного решения, такой подход получил достаточно широкое распространение при решении практических задач (см. обзоры [1–3] и литературу в них). Он также был распространен на оптимальные задачи на конечном времени. В последнем случае ищется решение начальной задачи для дифференциального матричного уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (State-Dependent Differential Riccati Equation - SDDRE) [4, 5]. Техника SDDRE была применена для решения ряда практических задач (см, например, [6, 7]).

К преимуществам SDRE и SDDRE относится применимость к достаточно общему классу нелинейных систем, полный учет нелинейности системы (отсутствует линеаризация), некоторая субоптимальность и простота реализации. К недостаткам относятся эвристический характер и необходимость решать уравнения SDRE или SDDRE для каждого нового состояния системы в темпе функционирования объекта. Последнее может требовать значительных вычислительных ресурсов, например, в случае, если система обладает большой размерностью и/или имеет быструю динамику.

Для повышения вычислительной эффективности в работе [8] предложен модифицированный SDRE подход. Он заключается в использовании

или искусственном введении малого параметра при нелинейностях системы. Затем на основе асимптотического анализа получается численно-аналитический алгоритм, что повышает вычислительную эффективность. Метод был распространён на задачи слежения в разных постановках [9–11].

Техники SDRE и SDDRE крайне редко встречаются для задач управления колесными системами. Главной причиной этого является невыполнение основного условия – поточечной управляемости. Для преодоления этого ограничения в работе [12] предложен особый способ вывода динамики колесной системы (в пространство состояния включаются углы поворота колес и их скорости), а также вводится оригинальный искусственный выход системы. Далее используется известная техника SDDRE из [4, 5] для построения следящего управления. В работе [13] была предложена модификация этого решения на основе подхода из [9–11]. Показано, что несмотря на незначительную потерю в качестве управления, полученный алгоритм существенно превышает исходный с точки зрения вычислительной эффективности.

Отметим, что в постановке задачи, используемой и в [12], и в [13], считалось, что референсная траектория известна лишь в текущий момент. Однако, во многих практических задачах желаемые траектории являются известными функциями времени. Они могут быть построены на основе соответствующих планировщиков. Поэтому в данной работе рассматривается постановка задачи, когда референсные траектории известны заранее. Другой особенностью работы является модификация алгоритма из [13]: основная часть управления теперь учитывает конечный интервал времени управления, что положительно сказывается на качестве решения задач с небольшим интервалом регулирования. Для исследования эффективности предложенного подхода был проведен ряд численных экспериментов.

1. Модель системы и постановка задачи

На рисунке 1 приводится схема колесной робототехнической системы из [12], для которой в дальнейшем рассматривается задача управления на плоскости.

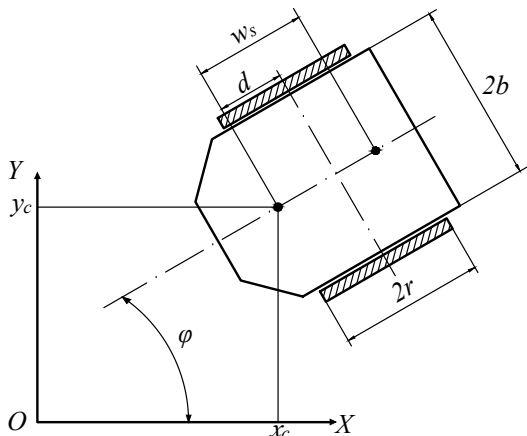


РИСУНОК 1. Схема двухколёсной тележки [12]

На схеме: XOY – земная декартова система координат; d – расстояние между центром масс робота и осью колес; x_c и y_c – координаты центра масс робота в XOY ; φ – угол между продольной осью робота и осью OX (угол курса); r – радиус колес; b – половина ширины платформы робота; параметр w_s будет описан ниже.

Модель динамики робота имеет вид [12]

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sv \\ (S^T MS)^{-1}(-S^T M \dot{S}v - S^T c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ (S^T MS)^{-1} \end{bmatrix} \tau,$$

где x – вектор состояния системы; точка означает дифференцирование по времени; $q = [x_c, y_c, \theta_r, \theta_l]^T$, $v = [\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l]^T$; θ_l и θ_r – углы поворота левого и правого колес; $\tau = [\tau_l, \tau_r]^T$ – вектор управления; τ_l и τ_r – моменты сил левого и правого колес соответственно; $0_{4 \times 2}$ – нулевая матрица соответствующей размерности; T означает транспонирование. Матрицы S и M задаются как

$$S = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\phi) & \frac{r}{2} \cos(\phi) \\ \frac{r}{2} \sin(\phi) & \frac{r}{2} \sin(\phi) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} m_b + 2m_w & 0 & -\frac{m_w r d \sin(\phi)}{b} & \frac{m_w r d \sin(\phi)}{b} \\ 0 & m_b + 2m_w & \frac{m_w r d \cos(\phi)}{b} & -\frac{m_w r d \cos(\phi)}{b} \\ -\frac{m_w r d \sin(\phi)}{b} & \frac{m_w r d \cos(\phi)}{b} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ \frac{m_w r d \sin(\phi)}{b} & -\frac{m_w r d \cos(\phi)}{b} & m_{3,4} & m_{4,4} \end{bmatrix},$$

где

$$m_{3,3} = \frac{r^2 (2m_w (b^2 + d^2) + I_{zzb} + 2 I_{zzw})}{4b^2} + I_{yyw},$$

$$m_{3,4} = \frac{-r^2 (2m_w (b^2 + d^2) + I_{zzb} + 2 I_{zzw})}{4b^2},$$

$$m_{4,4} = \frac{r^2 (2m_w (b^2 + d^2) + I_{zzb} + 2 I_{zzw})}{4b^2} + I_{yyw}.$$

Здесь m_w – масса колеса, m_b – масса колесной системы, I_{zzb} – момент инерции колесной системы относительно вертикальной оси OZ , I_{yyw} – момент инерции колес относительно оси вращения, I_{zzw} – момент инерции колес относительно вертикальной оси OZ . Отметим, что угол крена может быть найден как $\phi = r/2b (\theta_r - \theta_l)$.

Задача ставится следующим образом: необходимо построить обратную связь τ , которая минимизирует норму ошибки слежения $\|e\|$, где $e =$

$[x_c, y_c]^T - [x_r, y_r]^T$, а $x_r(t), y_r(t)$ – известные желаемые (референсные) траектории для координат x_c и y_c соответственно.

Подчеркнем, что в данной работе $x_r(t), y_r(t)$ считаются известными гладкими функциями на всем временном интервале управления, тогда как в работах [12, 13] рассматривалась постановка, когда значения этих функций были известны лишь для текущего временного момента и не были известны производные $\dot{x}_r(t), \dot{y}_r(t)$.

2. Управление на основе SDDRE

Кратко опишем исходный способ решения из [12], который имеет эвристический характер, т.к. строгие оценки субоптимальности в работе отсутствуют. Способ состоит из двух этапов. На первом этапе вводится замена переменных, на втором – с помощью известной техники SDDRE из [4, 5] приближенно решается задача перевода системы в новых переменных из начального состояния в заданное.

2.1. Замена переменных

Вводится следующий искусственный выход системы

$$(2) \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c + w_s \cos(\phi) - x_r \\ y_c + w_s \sin(\phi) - y_r \end{bmatrix}.$$

В выходе (2) присутствует параметр $w_s > 0$. Он задает расстояние (см. рисунок 1) между центром масс робота и некоторой референсной подвижной точкой в XOY , в которую выбранное в дальнейшем управление будет приводить робота. Дважды продифференцировав по времени (2) считая $\dot{x}_r \equiv \dot{y}_r \equiv 0$, можно получить систему

$$(3) \quad \dot{z} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \alpha (S^T M S)^{-1} \left(-S^T M \dot{S} v - S^T c \right) + \beta + \alpha (S^T M S)^{-1} \tau \end{bmatrix}.$$

Здесь $z = [y, \dot{y}]$, а матрицы α, β задаются как

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \beta = \bar{\beta} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}, \quad c = \bar{C} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_{1,1} & \bar{\beta}_{1,2} \\ \bar{\beta}_{2,1} & \bar{\beta}_{2,2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} -\frac{m_w r^2 d (\dot{\theta}_r - 2\dot{\theta}_l) \cos(\phi)}{2b^2} & -\frac{m_w r^2 d \dot{\theta}_l \cos(\phi)}{2b^2} \\ -\frac{m_w r^2 d \dot{\theta}_r \sin(\phi)}{2b^2} & -\frac{m_w r^2 d (\dot{\theta}_l - 2\dot{\theta}_r) \sin(\phi)}{2b^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_{1,1} = \frac{r(b \cos(\phi) - w_s \sin(\phi))}{2b}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{r(b \cos(\phi) + w_s \sin(\phi))}{2b},$$

$$\alpha_{2,1} = \frac{r(b \sin(\phi) + w_s \cos(\phi))}{2b}, \quad \alpha_{2,2} = \frac{r(b \sin(\phi) - w_s \cos(\phi))}{2b},$$

$$\bar{\beta}_{1,1} = -\frac{r^2 (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \sin(\phi)}{4b} + \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \cos(\phi)}{4b^2},$$

$$\bar{\beta}_{1,2} = \frac{r^2 (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \sin(\phi)}{4b} - \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \cos(\phi)}{4b^2},$$

$$\bar{\beta}_{2,1} = \frac{r^2 (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \cos(\phi)}{4b} + \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \sin(\phi)}{4b^2},$$

$$\bar{\beta}_{2,2} = -\frac{r^2 (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \cos(\phi)}{4b} - \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \sin(\phi)}{4b^2}.$$

2.2. Алгоритм SDDRE

Пусть имеется аффинная система

$$(4) \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x^0.$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ – управление, f и g – кусочно-непрерывные гладкие вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица, $f(0) = 0$, x^0 – заданное начальное состояние. Система (4) может быть представлена в виде

$$(5) \quad \dot{x} = A(x)x + B(x)u,$$

с помощью обозначения $B(x) = g(x)$ и факторизации $f(x) = A(x)x$. Причем при $n > 1$ существует бесчисленно число способов факторизации $f(x) = A(x)x$ [2].

Для системы (5) рассматривается задача оптимального управления (6)

$$I(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q(x)x + u^T R(x)u) dt \rightarrow \min_u, \quad t_f > 0,$$

где F , $Q(x)$ и $R(x)$ – положительно полуопределенные и положительно определенная весовые матрицы для каждого допустимого значения x . Предполагается также, что тройка матриц $(A(x), B(x), H(x))$, где $H(x)^T H(x) = Q(x)$, управляема и стабилизируема для каждого x из допустимой области.

Согласно технике SDDRE [4, 5] управление, приближенно решающее задачу (5)–(6), ищется в виде

$$(7) \quad u(x, t) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x, t)x,$$

где P определяется как решение матричного дифференциального уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами вида

$$(8) \quad \begin{aligned} -\dot{P}(x, t) &= P(x, t)A(x) + A^T(x)P(x, t) \\ &- P(x, t)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x, t) + Q(x). \end{aligned}$$

Для приближённого решения (8) для каждого нового значения вектора состояния x последовательно повторяются следующие шаги.

Шаг 1. Найти отрицательно определенное решение $P_{ss}^-(x)$ матричного алгебраического уравнения Риккати $0 = P_{ss}^-(x)A(x) + A^T(x)P_{ss}^-(x) - P_{ss}^-(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P_{ss}^-(x) + Q(x)$.

Шаг 2. Вычислить $A_{cl}(x) = A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P_{ss}^-(x)$.

Шаг 3. Найти решение D алгебраического уравнения Ляпунова $D(x)A_{cl}^T(x) + A_{cl}(x)D(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x) = 0$.

Шаг 4. Найти решение дифференциального уравнения Ляпунова $\dot{K}(x, t) = K(x, t)A_{cl}^T(x) + A_{cl}(x)K(x, t) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)$ по формуле $K(x, t) = e^{A_{cl}(t-t_f)}(K(x, t_f) - D(x))e^{A_{cl}^T(t-t_f)} + D(x)$, $K(x, t_f) = (F - P_{ss}^-(x))^{-1}$.

Шаг 5. Вычислить $P(x, t) = K^{-1}(x, t) + P_{ss}^-(x)$.

Шаг 6. Найти управление с помощью (7).

Для применения указанного алгоритма в задаче слежения нужно представить систему (3) в виде (5) с помощью следующих матриц с зависящими от состояния коэффициентами [12]

$$(9) \quad A(z) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \alpha (S^T M S)^{-1} \left(-S^T M \dot{S} - S^T \bar{C} \right) + \bar{\beta} \end{bmatrix},$$

$$B(z) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ \alpha (S^T M S)^{-1} \end{bmatrix},$$

где $I_{2 \times 2}$ – единичная матрица соответствующей размерности. Итоговое управление для системы (1) принимает вид

$$(10) \quad u(x, t) = -R^{-1}(z)B^T(z)P(z, t)z = -R^{-1}(z)B^T(z)P(z, t)[y \quad \dot{y}]^T.$$

3. Модификация алгоритма SDDRE

Модификация алгоритма состоит в следующем. Во-первых, в управлении ниже учитываются производные $\dot{x}_r(t)$, $\dot{y}_r(t)$. Поэтому в правой части (3) появляются ненулевые значения $\dot{x}_r(t)$, $\dot{y}_r(t)$. Во-вторых, для приближенного решения уравнения (8) вместо метода из [12] используется следующая численно-аналитическая процедура.

Шаг 1. Вычислить матрицы

$$A_0 = A(z)|_{z=0}, \quad B_0 = B(z)|_{z=0}, \quad Q_0 = Q(z)|_{z=0},$$

$$A_1(z) = \frac{A(z) - A_0}{\varepsilon}, \quad B_1(z) = \frac{B(z) - B_0}{\varepsilon}, \quad Q_1(z) = \frac{Q(z) - Q_0}{\varepsilon}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ является параметром алгоритма. Весовая матрица R предполагается постоянной.

Шаг 2. Вычислить матричную функцию $P_0(t)$ как решение следующей задачи Коши

$$\dot{P}_0 + P_0 A_0 + A_0^T P_0 - P_0 B_0 R_0^{-1} B_0^T P_0 + Q_0 = 0, \quad P_0(t_f) = F.$$

Шаг 3. Найти $P_1(z, t)$ с помощью

$$(11) \quad P_1(z, t) = e^{A_{Pcl, 0}^T(t_f - t)} M_P e^{A_{Pcl, 0}(t_f - t)} +$$

$$\int_0^\infty e^{A_{Pcl, 0}^T \sigma} D_P(z) e^{A_{Pcl, 0} \sigma} d\sigma,$$

где $D_P(z) = P_0 (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0) + (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0)^T P_0 + Q_1$,
 $A_{Pcl,0}(t) = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T P_0(t)$, а M_P находится как
 $M_P = - \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(z(t_f))|_{z(t_f)=z(t)} e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma$.

Шаг 4. Вычислить управление (10), где $P(z, t) = P_0(t) + \varepsilon P_1(z, t)$, перейти к шагу 3 для вычисления нового значения управления.

Предложенный алгоритм применим при следующих условиях:

- (i) Траектории замкнутой системы (1),(10) существуют, единственны и принадлежат Z на $[0, t_f]$ для любого непрерывного управления $u(t)$, где Z – некоторое ограниченное множество пространства состояний; элементы матриц $A_1(z)$, $B_1(z)$, $Q_1(z)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $z \in Z$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.
- (ii) Тройка матриц $\{A_0, B_0, H_0\}$, $H_0^T H_0 = Q_0$, стабилизируема и наблюдаема.
- (iii) Матрицы системы $A_0, A_1(z)$, $B_0, B_1(z)$, Q_0 и симметрические матрицы критерия $R > 0$, $Q_0 \geq 0$, $Q_1(z) \geq 0$, $F > 0$, а также $\varepsilon_0 > 0$ таковы, что $P_0(t) + \varepsilon P_1(z, t) > 0$ при $z \in Z$, $t \in [0, t_f)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Замечание 1. Алгоритм является модификацией алгоритма из [11], который был использован в работе [13]. Отличия заключаются в том, что ранее на шаге 1 искалась постоянная матрица P_0 как положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$P_0 A_0 + A_0^T P_0 - P_0 B_0 R^{-1} B_0^T P_0 + Q_0 = 0,$$

а на шаге 3 матричная функция $P_1(z, t)$ определялась как

$$P_1(z, t) = e^{A_{Pcl,0}^T (t_f - t)} M_P e^{A_{Pcl,0} (t_f - t)} + \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(z) e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma,$$

где $D_P(z) = P_0 (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0) + (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0)^T P_0 + Q_1$,
 $A_{Pcl,0} = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T P_0$,
 $M_P = \frac{1}{\varepsilon} (F - P_0) - \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(z(t_f))|_{z(t_f)=z(t)} e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma$.

Таким образом, теперь нестационарность $P(z, t)$ учитывается с помощью $P_0(t)$, которая соответствует линейной части управления, а не с помощью $P_1(z, t)$, соответствующей нелинейной коррекции линейного управления, как ранее. Предполагается, что подобная модификация

положительным образом отразится на качестве решения задач с небольшим временем управления, в которых $P(z, t)$ не успевает сойтись к установившемуся решению.

Замечание 2. Условие (iii) в силу наличия условий (i)–(ii) всегда может быть выполнено при достаточно малом ε_0 .

Замечание 3. Представленный алгоритм отличается от алгоритма из пункта 2.2 вычислительной эффективностью. В нем матрица $P_0(t)$ находится лишь один раз (шаг 2) и в процессе работы необходимо найти лишь $P_1(z, t)$ с помощью аналитического выражения (11). Алгоритм из 2.2 на каждой итерации своей работы требует решения алгебраических матричных уравнений Риккати (шаг 1) и Ляпунова (шаг 3) и обращение матрицы (шаг 5).

Отметим, что метод решения из [11], который составляет основу предложенного в данной работе алгоритма, был изначально разработан для слабо нелинейных систем. Поэтому для изучения качества его работы были проведены численные эксперименты.

4. Численные эксперименты

Решим ряд задач слежения для модели двухколёсной системы (1) с помощью описанных выше подходов. Обозначим управление из подраздела 2.2 как u_1 , управление из подраздела 2.2, в котором используется $\dot{x}_r(t)$, $\dot{y}_r(t)$, как u_2 , управления из [13] и из раздела 3 как u_3 и u_4 соответственно. Весовые матрицы критерия (6) и параметр зададим следующим образом

$$\varepsilon = 1, \quad R = I_{2 \times 2}, \quad F = Q_0 = \text{diag} \{100, 100, 10, 10\}, \quad Q_1 = 0_{4 \times 4}.$$

В качестве референсных траекторий определим решения следующих уравнений

$$(12) \quad x_r = 2 \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right), y_r = 2 \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right), \quad t \in [0, 4],$$

$$(13) \quad x_r = \cos(\pi t), y_r = \cos(0.85\pi t), \quad t \in [0, 8],$$

$$(14) \quad x_r = 1.2t, y_r = 1.2t \sin(1.2t), \quad t \in [0, 15],$$

$$(15) \quad x_r = x_r^0, y_r = y_r^0, \quad t \in [0, 1].$$

На рисунке 2 представлена визуализация референсных траекторий, кроме (15), которая представляет собой уравнение неподвижной точки и задаётся начальными условиями x_r^0, y_r^0 .

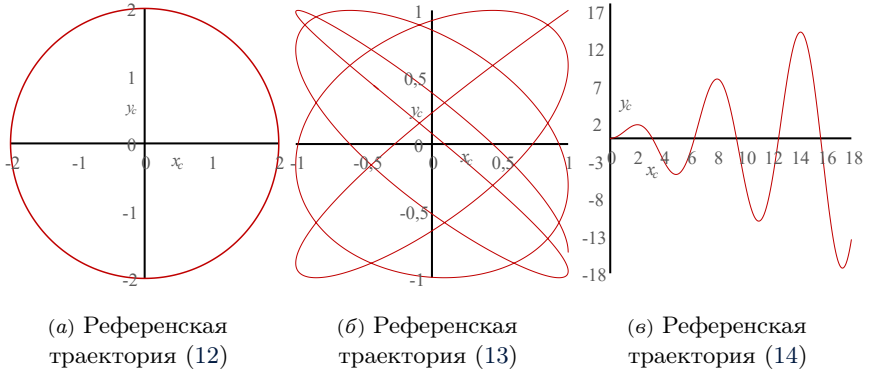


РИСУНОК 2. Графики для уравнений (12)–(14).

Параметры системы (1) обозначены в таблице 1. В силу этих параметров матрица S^TMS является невырожденной.

ТАБЛИЦА 1. Значения параметров системы (1)

Параметр	Значение	Единицы измерения
b	0.145	м
d	0	м
r	0.08	м
m_w	0.32	м
m_b	6	м
w_s	0.1	м
I_{zzb}	0.06363	кг*м ²
I_{yyw}	0.6e-4	кг*м ²
I_{zzw}	0.81e-3	кг*м ²

В таблице 2. приводятся результаты численного моделирования для различных референсных траекторий и начального положения робота, заданного значениями $x_c(0)$ и $y_c(0)$. Во всех экспериментах начальная ориентация робота всегда соответствовала нулевому углу курса (робот направлен по направлению оси OX), скорость в начальный момент была

ТАБЛИЦА 2. Результаты численного моделирования

№	Реф. траектория	Начальное положение		$J(u_1)$	$J(u_2)$	$J(u_3)$	$J(u_4)$	$T(u_1)$	$T(u_2)$	$T(u_3)$	$T(u_4)$
		$x_c(0)$	$y_c(0)$								
1	(12)	0	0	23,3	13,49	21,72	14,55	46,7	36,2	1,782	21,47
2		1	0	12,74	8,065	13,58	9,02	40,8	33,02	1,859	21,5
3		0	-1	34	27,72	37,02	32,07	46,81	40,48	1,891	25,22
4	(13)	0	0	52,22	47,79	44,65	42,85	77,16	83,91	4,532	52,8
5		0	-1	60,56	52,6	54,54	48,13	79,53	82,28	4,516	55,55
6		0	1	45,91	40,3	37,72	36,24	74,17	78,38	4,203	49,59
7	(14)	0	0	250,9	152,6	149,1	140,4	119,2	123,5	6,907	85,31
8		0	-1	255,1	156,9	154,2	145,2	117	126,1	7,047	81,8
9		0	1	254,3	155,5	151,8	143,8	117,7	120	6,953	83,11
10	$x_r = -1,$ $y_r = 0.5$	0	0	9,732	9,732	11,22	10,99	22,48	23,89	0,625	15,92
11	$x_r = -1,$ $y_r = -1$	1	1	58,11	58,11	74,59	73,65	34,36	33,12	0,656	18,03
12	$x_r = -1,$ $y_r = -1$	-1	0,5	10,39	10,39	11,92	11,71	26,3	22,78	0,594	15,23

равна нулю ($\theta_r(0) = \theta_l(0) = \dot{\theta}_r(0) = \dot{\theta}_l(0) = 0$). В этой таблице приводятся значения критерия (6), обозначенные как J^* , и время численного счета в секундах, обозначенное через T^* , для всех четырех управлений.

Таблица 3 содержит следующую информацию: $\%J(w)$ и $\%T(w)$ показывают, насколько в процентах $J(w)$ и $T(w)$ отличается от $J(u_1)$ и $T(u_1)$ соответственно для конкретного управления w , если результаты для u_1 взять за 100%.

Согласно таблице 3 в среднем самым эффективным по критерию (6) управлением оказалось u_2 , оно же является одним из самых вычислительно затратных, незначительно уступая только u_1 . Для экспериментов 10-12 с неподвижной точкой в качестве референса, эти управления показывают одинаковые результаты.

Следующим по эффективности относительно функционала (6) идет управление u_4 . Оно незначительно уступает u_2 и в то же время существенно превосходит его по скорости работы.

ТАБЛИЦА 3. Отличия от управления u_1

№	Реф. траектория	Начальное положение		%J(u_2)	%J(u_3)	%J(u_4)	%T(u_2)	%T(u_3)	%T(u_4)
		$x_c(0)$	$y_c(0)$						
1	(12)	0	1	-42,10	-6,78	-37,55	-22,48	-96,18	-54,03
2		1	2	-36,70	6,59	-29,20	-19,07	-95,44	-47,30
3		0	3	-18,47	8,88	-5,68	-13,52	-95,96	-46,12
4	(13)	0	4	-8,48	-14,50	-17,94	8,75	-94,13	-31,57
5		0	5	-13,14	-9,94	-20,53	3,46	-94,32	-30,15
6		0	6	-12,22	-17,84	-21,06	5,68	-94,33	-33,14
7	(14)	0	7	-39,18	-40,57	-44,04	3,61	-94,21	-28,43
8		0	8	-38,49	-39,55	-43,08	7,78	-93,98	-30,09
9		0	9	-38,85	-40,31	-43,45	1,95	-94,09	-29,39
10	$x_r = -1,$ $y_r = 0.5$	0	10	0,00	15,29	12,93	6,27	-97,22	-29,18
11	$x_r = -1,$ $y_r = -1$	1	11	0,00	28,36	26,74	-3,61	-98,09	-47,53
12	$x_r = -1,$ $y_r = -1$	-1	12	0,00	14,73	12,70	-13,38	-97,74	-42,09
Среднее значение				-20,64	-7,97	-17,51	-2,88	-95,47	-37,42

Далее следует u_3 . Оно же показало самое малое время счета, существенно опередив все другие рассматриваемые управления.

Наконец, управление u_1 оказалось самым неэффективным, как по критерию (6), так и по времени счета.








Заключение

В работе предложена модификация ранее известных реализаций алгоритмов техники SDDRE. С ее помощью построена нелинейная обратная связь в задаче слежения для модели колесной системы. Особенностью постановки задачи является наличие известных гладких функций референсных траекторий, заданных на всем интервале времени регулирования. Учет этой информации при построении управления позволяет существенно улучшить качество решения задачи слежения, особенно в случае быстроменяющихся желаемых траекторий. Численные

эксперименты показали, что предложенная модификация улучшает исходный алгоритм примерно на 17% по критерию качества, при этом время счета уменьшается примерно на 37%. В то же время существуют аналоги, которые превосходят предложенную модификацию либо по качеству, либо по вычислительной эффективности. Таким образом, разработанный алгоритм может использоваться в тех задачах, в которых нужно обеспечить как приемлемое качество, так и скорость работы.

Список литературы

- [1] Nekoo S. R. *Tutorial and review on the state-dependent Riccati equation* // Journal of Applied Nonlinear Dynamics.– 2019.– Vol. 8.– No. 2.– Pp. 109–166. doi ↑190
- [2] Çimen T. *Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics.– 2012.– Vol. 35.– No. 4.– Pp. 1025–1047. doi ↑190, 196
- [3] Cloutier J. R. *State-dependent Riccati equation techniques: an overview* // Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No.97CH36041).– V. 2 (Albuquerque, NM, USA, 6 June 1997).– IEEE.– 1997.– ISBN 0-7803-3832-4.– Pp. 932–936. doi ↑190
- [4] Heydari A., Balakrishnan S. N. *Path planning using a novel finite horizon suboptimal controller* // Journal of guidance, control, and dynamics.– 2013.– Vol. 36.– No. 4.– Pp. 1210–1214. doi ↑190, 191, 194, 196
- [5] Heydari A., Balakrishnan S. N. *Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems* // International Journal of Robust and Nonlinear Control.– 2015.– Vol. 25.– No. 15.– Pp. 2687–2704. doi ↑190, 191, 194, 196
- [6] Naidu D. S., Paul S., Khamis A., Rieger C. R. *A simplified SDR technique for finite horizon tracking problem in optimal control systems*, 2019 Sixth Indian Control Conference (ICC) (Hyderabad, India, 18–20 December 2019).– 2019.– Pp. 170–175. doi ↑190
- [7] Khamis A., Naidu D. S. *Recent results on nonlinear, optimal regulation and tracking: theory and applications* // WSEAS Transactions on Systems.– 2016.– Vol. 15.– Pp. 94–101.– id. 11. URL ↑190
- [8] Дмитриев М. Г., Макаров Д. А. *Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния* // Труды института системного анализа Российской академии наук.– 2014.– Т. 64.– № 4.– С. 53–58. * ↑190
- [9] Макаров Д. А. *Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния. Часть I. Алгоритм* // ИТиВС.– 2017.– № 3.– С. 10–19. □ * ↑191
- [10] Макаров Д. А. *Построение управления и наблюдателя в слабо нелинейной задаче слежения с помощью дифференциальных матричных уравнений Риккати* // ИТиВС.– 2018.– № 4.– С. 63–71. □ doi * ↑191

- [11] Макаров Д. А., Хачумов М. В. *Синтез в слабо нелинейной задаче управления на основе SDRF техники на конечном интервале* // ИТиВС.– 2020.– № 4.– С. 17–25.    ↑191, 198, 199
- [12] Korayem M. H., Nekoo S. R., Korayem A. H. *Finite time SDRF control design for mobile robots with differential wheels* // Journal of Mechanical Science and Technology.– 2016.– Vol. 30.– No. 9.– Pp. 4353–4361.  ↑191, 192, 194, 197
- [13] Макаров Д. А. *Приближенное решение задачи слежения для модели двухколесного робота, основанное на технике SDDR* // *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021)* (Москва, 27–29 сентября 2021 года), М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.– 2021.– ISBN 978-5-91450-256-7.– С. 665–672.    ↑191, 194, 198, 199

Поступила в редакцию 11.11.2023;
 одобрена после рецензирования 11.12.2023;
 принята к публикации 12.12.2023;
 опубликована онлайн 31.12.2023.

Рекомендовал к публикации

д.т.н. А. М. Цирлин

Информация об авторах:



Юлия Сергеевна Белинская

Научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: более 20. Область научных интересов: нелинейная теория управления, плоские системы, робототехника. E-mail: belinskaya.us@gmail.com

 0000-0002-4136-7912
 e-mail: belinskaya.us@gmail.com



Дмитрий Александрович Макаров


Старший научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: более 70. Область научных интересов: методы синтеза нелинейных обратных связей, сингулярно возмущенные системы, искусственный интеллект, робототехника

 0000-0001-8930-1288
 e-mail: makarov@isa.ru

Вклад авторов: Ю. С. Белинская – 15% (проведение численных экспериментов, визуализация); Д. А. Макаров – 85% (идея, методология, программное обеспечение, валидация, написание черновой версии, доработка и редактирование).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

UDC 519.68:007.52

 10.25209/2079-3316-2023-14-4-189-206

SDDRE based nonlinear feedback construction in the tracking problem for a wheeled robot model

Yulia Sergeevna **Belinskaya**¹, Dmitry Alexandrovich **Makarov**^{2✉}

Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia

^{2✉}makarov@isa.ru

Abstract. The article discusses the problem of constructing nonlinear feedback in the tracking problem for a wheeled robotic system. A special feature of the work is the formulation of a problem in which the reference trajectories of the system are known in advance, as well as a modification of a previously known algorithm based on the State-Dependent Differential Riccati Equation technique. Numerical experiments show that the proposed approach allows for a compromise between control quality and operating speed. (*In Russian*).

Key words and phrases: SDDRE technique, tracking task, two-wheeled robotic system

2020 *Mathematics Subject Classification:* 70B15; 93C85

Acknowledgments: The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-21-00716

For citation: Yulia S. Belinskaya, Dmitry A. Makarov. *SDDRE based nonlinear feedback construction in the tracking problem for a wheeled robot model*. Program Systems: Theory and Applications, 2023, **14**:4(59), pp. 189–206. (*In Russ.*).

https://psta.psiras.ru/read/psta2023_4_189-206.pdf

References

- [1] S. R. Nekoo. “Tutorial and review on the state-dependent Riccati equation”, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, **8**:2 (2019), pp. 109–166. [doi](#)
- [2] T. Çimen. “Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **35**:4 (2012), pp. 1025–1047. [doi](#)
- [3] J. R. Cloutier. “State-dependent Riccati equation techniques: an overview”, *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No.97CH36041)*. V. 2 (Albuquerque, NM, USA, 6 June 1997), IEEE, 1997, ISBN 0-7803-3832-4, pp. 932–936. [doi](#)
- [4] A. Heydari, S. N. Balakrishnan. “Path planning using a novel finite horizon suboptimal controller”, *Journal of guidance, control, and dynamics*, **36**:4 (2013), pp. 1210–1214. [doi](#)
- [5] A. Heydari, S. N. Balakrishnan. “Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **25**:15 (2015), pp. 2687–2704. [doi](#)
- [6] D. S. Naidu, S. Paul, A. Khamis, C. R. Rieger. “A simplified SDRE technique for finite horizon tracking problem in optimal control systems”, 2019 Sixth Indian Control Conference (ICC) (Hyderabad, India, 18–20 December 2019), 2019, pp. 170–175. [doi](#)
- [7] A. Khamis, D. S. Naidu. “Recent results on nonlinear, optimal regulation and tracking: theory and applications”, *WSEAS Transactions on Systems*, **15** (2016), pp. 94–101, id. 11. [URL](#)
- [8] M. G. Dmitriev, D. A. Makarov. “Smooth nonlinear controller in a weakly nonlinear control system with state-dependent coefficients”, *Proceedings of the Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences*, **64**:4 (2014), pp. 53–58 (in Russian).
- [9] D. A. Makarov. “A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem: Part I. An algorithm”, *Information technology and computing systems*, 2017, no. 3, pp. 10–19 (in Russian). [QR](#)
- [10] D. A. Makarov. “The design of observer based tracking control for weakly nonlinear systems using differential matrix equations Riccati”, *Information technology and computing systems*, 2018, no. 4, pp. 63–71 (in Russian). [QR](#) [doi](#)
- [11] D. A. Makarov, M. V. Khachumov. “SDRE-Based Synthesis in a Weakly Nonlinear Control Problem on a Finite Interval”, *Information technology and computing systems*, 2020, no. 4, pp. 17–25 (in Russian). [QR](#) [doi](#)
- [12] M. H. Korayem, S. R. Nekoo, A. H. Korayem. “Finite time SDRE control design for mobile robots with differential wheels”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **30**:9 (2016), pp. 4353–4361. [doi](#)
- [13] D. A. Makarov. “SDDRE based approximate solution in trajectory tracking control problem for a model of two-wheeled differentially driven mobile robot”, 2021 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD) (Moscow, Russian Federation, 27–29 September 2021), pp. 1–5. [doi](#)