УДК 517.977:004.421.2
doi 10.25209/2079-3316-2023-14-4-47-66

Метод минимаксного улучшения для неоднородных дискретных систем

Ирина Викторовна **Расина**[1✉], Александр Олегович **Блинов**[2]
[1] Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Веськово, Россия
[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
[2] Российский государственный социальный университет, Москва, Россия
[1✉] *irinarasina@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается класс двухуровневых дискретных неоднородных систем (ДНС) для случая, когда все однородные подсистемы нижнего уровня не только связаны общим функционалом, но имеют и свои собственные цели. Подобные системы широко распространенных на практике (экономика, экология), а также возникают в процессе численного решения задач оптимизации при дискретизации непрерывных управляемых систем.

Предлагается метод улучшения управления второго порядка, для вывода которого используется обобщение достаточных условий оптимальности В. Ф. Кротова. Приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова и фразы: неоднородные дискретые системы, промежуточные критерии, достаточные условия оптимальности, метод улучшения управления

Благодарности:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №21-11-00202)

Для цитирования: Расина И. В., Блинов А. О. *Метод минимаксного улучшения для неоднородных дискретных систем* // Программные системы: теория и приложения. 2023. **Т. 14**. № 4(59). С. 47–66. `https://psta.psiras.ru/read/psta2023_4_47-66.pdf`

Введение

С 80-х годов прошлого века ведутся систематические исследования систем управления неоднородной структуры, для которых характерны самые разнообразные названия: системы переменной структуры [1], дискретно-непрерывные системы [2], логико-динамические системы [3], [4], импульсные системы [5], гибридные системы [6].Наиболее часто употребляемым является термин гибридные системы. Кроме того существует еще одна разновидность систем неоднородной структуры, в которых представлен человеческий фактор. Таковы многоуровневые предприятия, учреждения, коллективы. Для них был введен специальный термин: активные системы. Представление о начальной стадии их исследования можно получить в [7]. Начато оно было в 60-е годы 20 века. Подробная информация о разновидностях таких систем и достигнутых результатах по решению задач управления содержится в обзоре [8]. Поскольку для гибридных систем классические методы оптимального управления непосредственно неприменимы, то предложены многочисленные варианты необходимых и достаточных условий оптимальности управления, отражающие различные подходы к объекту исследования. Один из возможных подходов состоит в обобщении для них достаточных условий оптимальности Кротова [9]. В [10] сформулированы общие условия оптимальности для абстрактной динамической системы как многошаговой, операторы которой на разных шагах допускают различную интерпретацию. В [2, 11, 12] предложена и развита математическая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС) в виде конкретизации указанной абстрактной модели [10], применимая для широкого класса задач управления неоднородными процессами, и для нее получен аналог достаточных условий Кротова для непрерывных и дискретных систем. При таком подходе строится иерархическая модель, в которой нижний уровень представляет собой описания однородных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом. В различных задачах управления, в частности в задачах оптимизации, оба уровня рассматриваются во взаимодействии. Подчеркнем, что на нижнем уровне на каждом из этапов фигурировали непрерывные управляемые системы.

В данной работе рассматривается модель, в которой и на нижнем уровне действуют дискретные управляемые системы. Для краткости будем называть их НДС [11]. Такие системы могут рассматриваться как самостоятельные «дискретно-дискретные», примерами могут служить эколого-экономические модели при смене инновационной политики на различных этапах времени. Подобные системы возникают и в качестве вспомогательных для ДНС с учетом естественной дискретизации непрерывных подсистем в реальных вычислениях [13]. При проведении дискретизации на отдельных шагах можно задавать управляющие воздействия в разных видах (кусочно-постоянное управление, непрерывная функция времени и т.д.) с учетом специфики конкретной задачи. В итоге возникает неоднородная дискретная система [14].

1. Неоднородные дискретные процессы с промежуточными критериями

Рассмотрим двухуровневую модель, в которой нижний уровень составляют дискретные динамические системы однородной структуры. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель общего вида

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \qquad k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, \ldots, k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k,x), \tag{1}$$

где k – номер шага (этапа), k_I – начальный шаг, k_F – конечный шаг, x и u – соответственно переменные состояния и управления произвольной природы (возможно различной) для различных k, $\mathbf{U}(k,x)$ – заданное при каждом k и x множество, f – оператор.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, $u(k)$ интерпретируется как пара $(u^v(k), m^d(k))$. Здесь $m^d(k)$ – процесс $(x^d(k,t), u^d(k,t))$, $t \in \mathbf{T}(k, z(k))$, $m^d(k) \in \mathbf{D}^d(k, z(k))$. Через $\mathbf{D}^d$ обозначено множество допустимых процессов m^d, удовлетворяющих системе

$$x^d(k, t+1) = f^d(k, z, t, x^d(k,t), u^d(k,t)), \qquad t \in \mathbf{T} = \{t_I(z), t_I(z)+1, \ldots t_F(z)\}, \tag{2}$$

где x^d и u^d – соответственно переменные состояния и управления произвольной природы, $t_I(z)$ и $t_F(z)$ – начальный и конечный шаги на каждом этапе, номер которого указан в z; f^d – оператор,

$$x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t), \quad u^d \in \mathbf{U}^d(k,z,t,x^d), \quad z = (k, x, u^v).$$

Вектор $z = (k, x, u^d)$ – характеристика воздействия системы верхнего уровня на нижний, играющая на нижнем роль параметров. В ней $u^v = u^v(k)$ – управляющее воздействие верхнего уровня на нижний на каждом этапе. Для системы (2) на множестве $\mathbf{T}$ задана промежуточная цель в виде функционала, который необходимо минимизировать:

$$I^k = \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F(z)} f^k(t, x^d(k,t), u^d(k,t)) \to \inf .$$

Здесь $\mathbf{X}^d(k,z,t)$ и $\mathbf{U}^d(k,z,t,x^d)$ – заданные при каждом t, z и x^d множества. В функционале I^k верхний индекс k указывает номер этапа. Оператор правой части (1) на множестве $\mathbf{K}'$ сводится к следующему:

$$f(k,x,u) = \theta(z,\gamma^d(z)), \qquad \text{где} \quad \gamma^d = (t_I, x_I^d, t_F, x_F^d) \in \mathbf{\Gamma}^d(k,z),$$

$$\mathbf{\Gamma}^d(z) = \{\gamma^d : t_I = \tau(k,z), t_F = \vartheta(k,z), x_I^d = \xi(k,z), x_F^d \in \mathbf{\Gamma}_F^d(k,z)\}.$$

Пусть $\tilde{m}(k) = (x(k), u(k), x^d(k,t), u^d(k,t))$. Управление

$$u(k) = (u^v(k), m^d(k))$$

состоит из фиксированных на шаге u^v и x и дискретно изменяемой части m^d.

Решение описанной двухуровневой системы $m = \{\bar{m}(k) : k \in \mathbf{K}'\}$ есть *неоднородный-дискретный процесс*. Совокупность таких решений обозначаем через $\mathbf{D}$ и называем *множеством допустимых неоднородных-дискретных процессов*.

На множестве $\mathbf{D}$ процессов удовлетворяющих (1), (2), рассматривается задача оптимального управления о минимизации концевого функционала $I = F(x(k_F))$ при фиксированных $k_I = 0$, k_F, $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$.

2. Достаточные условия оптимальности

Справедливы следующие теоремы [11]:

Теорема 1. *Пусть имеются последовательность процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ, φ^d, такие что:*

(1) $R(k, x_s(k), u_s(k)) \to \mu(k), \quad k \in \mathbf{K}$;

(2) $R^d(z_s, t, x_s^d(t), u_s^d(t)) - \mu^d(z_s, t) \to 0, \quad k \in \mathbf{K}', t \in \mathbf{T}(z_s)$;

(3) $G^d(z_s, \gamma_s^d) - l^d(z_s) \to 0, \quad k \in \mathbf{K}'$;

(4) $G(x_s(t_F)) \to l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ – минимизирующая для I на $\mathbf{D}$.

Теорема 2. *Для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любых функционалов φ, φ^d имеет место оценка*

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \leqslant \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{E}$ и функционалы φ и φ^d такие, что $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$ и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$. Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Здесь:

$$L = G(x(k_F)) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \sum_{\mathbf{K}'} \Big(G^d(z) - \\ - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F} R^d(z, t, x^d(k,t), u^d(k,t)) \Big),$$

$$G(x) = F(x(k_F)) + \varphi(k_F, x) - \varphi(k_I, x(k_I)),$$

$$R(k, x, u) = \varphi(k+1, f(k, x, u)) - \varphi(k, x),$$

$$G^d(k, z, \gamma^d) = -\varphi(k+1, \theta(k, z, \gamma^d)) + \varphi(k, x(k)) + \\ + \varphi^d(k, z, t_F, x^d_F) - \varphi^d(k, z, t_I, x^d_I),$$

$$R^d(k, z, t, x^d, u^d) = \varphi^d(k, z, t+1, f^d(k, z, t, x^d, u^d)) - \\ - f^k(t, x^d(k,t), u^d(k,t)) - \varphi^d(k, z, t, x^d),$$

$$\mu^d(k, z, t) = \sup_{x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t),\quad u^d \in \mathbf{U}^d(k,z,t,x^d)} R^d(k, z, t, x^d, u^d),$$

$$l^d\,(k, z) = \inf_{\gamma^d \in \mathbf{\Gamma}^d(k,z),\quad x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t_F)} G^d(k, z, \gamma^d),$$

$$\mu(k) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in \mathbf{X}(k),\quad u \in \mathbf{U}(k,x)} R(k, x, u), & t \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}', \\ -\inf\limits_{x \in \mathbf{X}(k),\quad u^v \in \mathbf{U}^v(k,x)} l^d(z), & k \in \mathbf{K}', \end{cases}$$

$$l = \inf_{x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{X}(k_F)} G(x).$$

Здесь $\varphi(k,x)$ – произвольный функционал, $\varphi^d(k,z,t,x^d)$ – произвольное параметрическое семейство функционалов (с параметром z).

Заметим, что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т. е. при выполнении отброшенных связей $L(m)$ совпадает с $I(m)$.

3. Минимаксный метод улучшения

Предположим, что k_I, x_I, K, $t_I(k)$, $t_F(k)$ – заданы; $\mathbf{X}(k) = R^m(k)$, $\mathbf{X}^d(k,t) = R^n(k)$, $\mathbf{\Gamma}(z) = R^{2m}$, $\mathbf{\Gamma}^d(z) = R^{2n}(k)$, $x^d_I(k) = \xi(k, x(k))$, ограничения на переменные состояния обоих уровней отсутствуют, и подсистемы нижнего уровня не зависят от u^v, а используемые конструкции достаточных условий оптимальности таковы, что справедливы все ниже следующие операции.

За основу для построения метода будем использовать задачу улучшения элемента. Ее суть состоит в построении некоторого оператора $\omega : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, для которого $I(\omega(m)) \leqslant I(m)$ (монотонного по функционалу) [13]. Решение такой задачи может быть реализовано не единственным образом. Далее предлагается один из возможных вариантов.

Итак, пусть задан элемент $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$. Требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$ такой, что $I(m^{\mathrm{I}}) \geqslant I(m^{\mathrm{II}})$. Поиск элемента m^{II} и соответственно функций $\varphi^{\mathrm{I}}(k, x(k))$, $\varphi^{d\mathrm{I}}(z, t, x^d)$ будем вести из выполнения условий:

$$R(k, x(k), u^I(k)) \to \min_x, \tag{3}$$

$$G(x) \to \max, \tag{4}$$

$$R^d(z, t, x^d(k,t), u^{d\mathrm{I}}(k,t)) \to \min_{x^d}, \tag{5}$$

$$R^d(z, t, x^d(k,t), u^{d\mathrm{I}}(k,t)) \to \min_{x}, \tag{6}$$

$$G^d(z, x_F^d, x_I^d) \to \max_x. \tag{7}$$

Пусть

$$\tilde{u}(k, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}(k,x)} R(k, x(k), u(k)), \tag{8}$$

$$\tilde{u}^d(z, t, x^d) = \arg \max_{u^d \in \mathbf{U}^d(z,t,x^d)} R^d(z, t, x^d, u^d). \tag{9}$$

Тогда из заданной дискретно-непрерывной системы и начальных условий при полученных управлениях находятся функции $x^{\mathrm{II}}(k)$, $x^{d\mathrm{II}}(k,t)$ и программы управлений:

$$u^{\mathrm{II}}(k) = \tilde{u}(k, x^{\mathrm{II}}(k)), \qquad u^{d\mathrm{II}}(k,t) = \tilde{u}^d(k, t, x^{\mathrm{II}}(k), x^{d\mathrm{II}}(k,t)),$$

т. е. элемент m^{II} такой, что $I(m^{\mathrm{II}}) \leqslant I(m^{\mathrm{I}})$. Повторяя итерационно эти операции, получим улучшающую последовательность $\{m_s\}$.

В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если элемент m^{I} не является решением задачи, то справедливо неравенство $L(m^{\mathrm{I}}) > L(m^{\mathrm{II}})$.*

Доказательство. Покажем, что $I(m^{\mathrm{II}}) - I(m^{\mathrm{I}}) < 0$, следуя работе [15]. Имеем

$$L(m^{\mathrm{II}}, \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{d\mathrm{I}}) - L(m^{\mathrm{I}}, \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{d\mathrm{I}}) =$$
$$= G(x^{\mathrm{II}}) - G(x^{\mathrm{I}}) -$$
$$- \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}' \setminus k_F} \Big(R(k, x^{\mathrm{II}}(k), u^{\mathrm{II}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}) - R(k, x^{\mathrm{I}}(k), u^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}) \Big) +$$
$$+ \sum_{\mathbf{K}'} (G^d(z^{\mathrm{II}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{d\mathrm{I}})) - G^d(z^{\mathrm{I}}(k), \varphi^{\mathrm{I}}, \varphi^{d\mathrm{I}}) -$$

$$-\sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(R^d(z^{\mathrm{II}}(k),t,x^{d\mathrm{II}}(t),u^{d\mathrm{II}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})-\\ -R^d(z^{\mathrm{I}}(k),t,x^{d\mathrm{I}}(t),u^{d\mathrm{I}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})\Big)=\\ =\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-\Delta_4,$$

где $\Delta_1 = G(x^{\mathrm{II}}) - G(x^{\mathrm{I}}) < 0$ в силу условия (5),

$$\Delta_2=\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(R(k,x^{\mathrm{II}}(k),u^{\mathrm{II}}(k),\varphi^{\mathrm{I}})-R(k,x^{\mathrm{I}}(k),u^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}})\Big)=\\ =\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(R(k,x^{\mathrm{II}}(k),u^{\mathrm{II}}(k),\varphi^{\mathrm{I}})-R(k,x^{\mathrm{II}}(k),u^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}})\Big)+\\ +\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(R(k,x^{\mathrm{II}}(k),u^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}})-R(k,x^{\mathrm{I}}(k),u^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}})\Big)>0$$

согласно (4),

$$\Delta_3=\sum_{\mathbf{K}'}(G^d(z^{\mathrm{II}}(k),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})-G^d(z^{\mathrm{I}}(k),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}}))<0,$$

и

$$\Delta_4=\sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(R^d(z^{\mathrm{II}}(k),t,x^{d\mathrm{II}}(t),u^{d\mathrm{II}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})-\\ -R^d(z^{\mathrm{I}}(k),t,x^{d\mathrm{I}}(t),u^{d\mathrm{I}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})\Big)=\\ =\sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(R^d(z^{\mathrm{II}}(k),t,x^{d\mathrm{II}}(t),u^{d\mathrm{II}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})-\\ -R^d(z^{\mathrm{II}}(k),t,x^{d\mathrm{II}}(t),u^{d\mathrm{I}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})\Big)+\\ +\sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(R^d(z^{\mathrm{II}}(k),t,x^{d\mathrm{II}}(t),u^{d\mathrm{I}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})-\\ -R^d(z^{\mathrm{I}}(k),t,x^{d\mathrm{I}}(t),u^{d\mathrm{I}}(t),\varphi^{\mathrm{I}},\varphi^{d\mathrm{I}})\Big)$$

в силу условий (6), (7) и (8). Тогда

$$L(m^{\mathrm{II}})-L(m^{\mathrm{I}})=\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-\Delta_4<0.$$

□

Из теоремы следует, что при выполнении выше сформулированных условий можно построить такую улучшающую последовательность $\{m_s\}$, что $I(m_{s+1}) \leqslant I(m_s)$.

Перейдем непосредственно к методике поиска функций φ, φ^d. Воспользуемся принципом расширения [14] и теоремой 2. Условия (4), (5), (6), (7),

(8) означают, что функционал L, подсчитанный при управлениях $u^I(k)$, $u^{d\mathrm{I}}(k,t)$, исследуется на максимум. Рассмотрим приращение функционала $L=I$, которое представим в виде:

$$\Delta L \approx \mathrm{d}\, G + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\, G - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(\mathrm{d}\, R + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\, R\Big) + \\ + \sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\bigg(\mathrm{d}\, G^d + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\, G^d - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(\mathrm{d}\, R^d + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2\, R^d\Big)\bigg)$$

или

$$\Delta L \approx G_x^T\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T G_{xx}\Delta x - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(R_x^T\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T R_{xx}\Delta x\Big) + \\ + \sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(G^{c^T}_{x_F^d}\Delta x_F^d + \frac{1}{2}\Delta x^d_{F^T} G^d_{x_F^d x_F^d} + \\ + G_x^{d^T}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T G^d_{xx}\Delta x + \Delta x^d_{F^T} G^d_{x_F^d x}\Delta x\Big) - \\ - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(R^{d^T}_{x^d}\Delta x^d + R^{d^T}_x\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^{d^T} R^d_{x^d x^d}\Delta x^d + \\ + \Delta x^T R^d_{xx^d}\Delta x^d + \frac{1}{2}\Delta x^T R^d_{xx}\Delta x\Big).$$

Здесь первые и вторые производные функций R, G, R^d, G^d подсчитаны при $u=u^{\mathrm{I}}$, $u^d=u^{d\mathrm{I}}$, а $\Delta x = x - x^{\mathrm{I}}(k)$, $\Delta x^d = x^d - x^{d\mathrm{I}}(k,t)$, $\Delta x_F^d = x_F^d - x_F^{d\mathrm{I}}$.

Для выполнения условий (4), (5), (6), (7), (8) достаточно положить:

$$G_x = 0,\quad R_x = 0,\quad R^d_{x^d} = 0,\quad G^d_{x_F^d} = 0,\quad G^d_x = 0,\quad R^d_x = 0, \tag{10}$$

$$G_{xx} = -\Lambda^1,\quad R_{xx} = \Lambda^2,\quad R^d_{x^d x^d} = \Lambda^3,\quad R^d_{xx^d} = 0,\quad G^d_{x_F^d x_F^d} = -\Lambda^4, \tag{11}$$

$$G^d_{xx_F^d} = 0,\quad G^d_{xx} = -\Lambda^5,\quad R^d_{xx} = -\Lambda^6. \tag{12}$$

Здесь $-\Lambda^1$, Λ^2, Λ^3, $-\Lambda^4$, $-\Lambda^5$, $-\Lambda^6$ – положительно определенные диагональные матрицы. Нетрудно видеть, что условия (10), (11), (12) представляют собой достаточные условия экстремума функций G, G^d, R, R^d [**14**]. Дополним условия (10), (11), (12) условиями первого и второго порядков стыковки уровней:

$$\frac{d}{dx}(\varphi(k+1,\theta(k,x,x_F^d,x_I^d)) - \varphi^d(k,x,t_F,x_F^d)) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{d^2x}(\varphi(k+1,\theta(k,x,x_F^d,x_I^d)) - \varphi^d(k,x,t_F,x_F^d)) = \Lambda^7, \tag{14}$$

где Λ^7 – положительно определенная диагональная матрица.

Зададим функции φ и φ^d в следующем виде:

$$\varphi(k,x)=\psi^T(k)x+\frac{1}{2}\Delta x^T\sigma(k)\Delta x,$$

$$\varphi^d(z,t,x^d)=\lambda^T(k,t)x+\psi^{d\mathrm{T}}(k,t)x^d+\frac{1}{2}\Delta x^{dT}\sigma^d(k,t)\Delta x^d+ \\ +\frac{1}{2}\Delta x^T D(k,t)\Delta x+\Delta x^T\Lambda(k,t)\Delta x^d,$$

где $\psi(k)$, $\lambda(k,t)$, $\psi^d(k,t)$ – вектор-функции размера m,n, n, а $\sigma^d(k,t)$, $D(k,t)$, $\Lambda(k,t)$ – матрицы размера $n\times n$, $m\times m$, $m\times n$ соответственно. Тогда

$$\varphi_x=\psi(k),\quad \varphi_{xx}=\sigma(k),\quad \varphi^d_x=\lambda(k,t),\quad \varphi^d_{x^d}=\psi^d(k,t), \\ \varphi^d_{xx}=\sigma^d(k,t),\quad \varphi^d_{x^dx^d}=D(k,t),\quad \varphi^d_{x^dx}=\Lambda(k,t).$$

Кроме того, введем в рассмотрение функции

$$H(k,x(k),\psi(k+1),u(k))= \\ =\psi^T(k+1)f(k,x(k),u(k)),k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F,$$

$$H(k,x(k),\psi(k+1),x(k_I),x(k_F))= \\ =\psi^T(k+1)\theta(k,x(k),x(k_I),x(k_F)),k\in\mathbf{K}',$$

$$H^d(k,x(k),\psi^d(k,t),x^d(k,t),u^d(k,t))= \\ =\psi^{d\mathrm{T}}(k,t)f^d(k,x(k),x^d(k,t),u^d(k,t))-f^k(t,x^d(k,t),u^d(k,t)).$$

С учетом введенных обозначений из условий (12), (13), (14) имеем:

$$\psi(k_F)=-F_x,$$

$$\psi(k)=\begin{cases}H_x, & k\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F,\\ H_x+(H_{x^d_I}\xi_x)^T-\lambda(k,t_F)+ & \\ \qquad +\lambda(k,t_I)+\xi_x^T\psi^d(t_I), & k\in\mathbf{K}'\setminus k_F,\end{cases}$$

$$\lambda(k,t)=\lambda(k,t+1)+H^d_x,\quad \lambda(k,t_F)=H_x+\xi_x^TH_{x^d_I},$$

$$\psi^d=H^d_{x^d},\quad \psi^d(k,t_F)=H_{x^d_F},$$

$$\sigma^d(k,t_F)=\theta^T_{x^d}(t_F)\sigma(k+1)\theta_{x^d}(t_F)+H_{x^dx^d}+\Lambda^4,$$

$$\sigma^d(k,t)=\sigma^d(k,t+1)f^d_{x^d}+f^{d\mathrm{T}}_{x^d}\sigma^d(k,t+1)+H^d_{x^dx^d}+\Lambda^5$$

$$D(k,t)=\frac{1}{2}\Lambda(k,t+1)f^d_{x^dx}+\frac{1}{2}(\Lambda(k,t+1)f^d_{x^dx})^T+\frac{1}{2}\Lambda(k,t+1)f^d_x- \\ -\frac{1}{2}(\Lambda(k,t+1)f^d_x)^T+H^d_{xx}+\Lambda^5,$$

$$D(k,t_F) = \theta_x^T\sigma(k+1)\theta_x + H_x + H_{xx^d}\xi_x + \\ + \theta_x^T\sigma(k+1)\theta_{x^d}\xi_x + \xi_x^T H_{x^dx}\xi_x + \xi_{xx}H_{x^d},$$

$$\Lambda(k,t) = \frac{1}{2}\Lambda(k,t+1)f^d_{x^d} + \frac{1}{2}(\Lambda(k,t+1)f^d_{x^d})^T + \frac{1}{2}f_x^{d\mathrm{T}}\sigma^d + \\ + \frac{1}{2}\sigma^d(k,t+1)f^d_x + H^d_{xx^d},$$

$$\Lambda(k,t_F) = \theta_x^T\sigma(k+1)\theta_{x^d}(t_F) + H_{xx^d}$$

$$\sigma(k) = \begin{cases} f_x^T\sigma(k+1)f_x + H_{xx} + \Lambda^2, & k \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F, \\ H_{xx} + H_{xx^d}(t_I)\xi_x + \theta_x^T\sigma\left(k+1\right)\theta_x + \\ \quad + \xi_x^T\sigma^d\left(t_I\right)\xi_x + H^d_{x^d_I}(t_I)\xi_{xx} + \\ \quad + \xi_x^T\theta_{x^d}^T(t_I)\sigma(k+1)\theta_{x^d}(t_I)\xi_x + \\ \quad + \xi_x^T H_{x^dx^d}(t_I)\xi_x \\ \quad + H^d\xi_{xx}\theta(t_I) + \Lambda^5, & k \in \mathbf{K}'\setminus k_F, \end{cases}$$

$$\sigma(k_F) = -F_{xx} + \Lambda^1.$$

4. Алгоритм метода

1. Задаются произвольные функции $\varphi^{\mathrm{I}}(k,x(k))$ и $\varphi^{d\mathrm{I}}(z,t,x^d)$.

2. По формулам (10), (11) определяются управления $\tilde{u}(k,x)$, $\widetilde{u^d}(k,t,x^d)$.

3. Из уравнений дискретно-дискретного процесса (1)-(2) определяются траектории $x^{\mathrm{I}}, x^{d\mathrm{I}}$ и программы управления $u^{\mathrm{I}}(k), u^{d\mathrm{I}}(k,t)$. Тем самым определяется элемент m^{I} и вычисляется значение функционала I^{I}.

4. «Справа-налево» решается система векторно-матричных уравнений относительно вектор-функций ψ, ψ^d, λ и матриц σ, D, σ^d, Λ. Для определенности можно положить все λ^i_{jj} равными постоянной $\delta^i \le 0$, $i = 2,3,5$; $\delta^i \ge 0, i = 1,4$. Определяются новые функции $\varphi^{\mathrm{II}}(k,x(k))$ и $\varphi^{d\mathrm{II}}(z,t,x^d)$. Переход к пункту 2.

Замечание 1. Если улучшения функционала не произошло, то величины λ^i необходимо увеличить.

Замечание 2. Система векторно-матричных уравнений относительно вектор-функций ψ, ψ^d, λ и матриц σ, D, σ^d, Λ линейная и, следовательно, всегда имеет решение.

Замечание 3. При $\sigma = 0$, $\sigma^d = 0$, $\sigma^d = 0$, $\Lambda = 0$ получается алгоритм улучшения первого порядка.

Замечание 4. Параметры δ^i играют роль регуляторов близости соседних приближений.

5. Примеры

Пример 1. Пусть задана НДС, состоящая из двух этапов, обозначим их номерами 0 и 1. На нулевом этапе управляемый процесс описывается одним уравнением:

$$x^d(t+1) = -2x^d(t) + (u_1^d(t))^2, \quad x^d(0) = 1, \quad t = 0, 1, 2, 3,$$

Задан промежуточный функционал этапа:

$$I^0 = \frac{1}{2}(x^d(t))^2 + \frac{1}{3}(u_1^d)^3,$$

Здесь $f^d = -2x^d(t) + (u_1^d(t))^2$. Следующий первый этап характеризуется другим уравнением и своим промежуточным функционалом:

$$x^d(t+1) = (t - u_2^d)^2, \quad t = 4, 5, 6, \quad I^1 = \frac{1}{2}(x^d)^2 + u_2^d,$$

В данном случае $f^d = (t - u_2^d)^2$. Задан общий функционал задачи:

$$I = F = x^d(7) \to \min.$$

Нетрудно видеть, что момент окончания всего процесса k_F равен 2, тогда $\mathbf{K} = 0, 1, 2$. Смена описания процесса происходит один раз, следовательно $\mathbf{K}' = 1$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^d, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня:

$$x(0) = x^d(0, 0), \quad x(1) = x^d(0, 4), \quad x(2) = x^d(1, 7), \quad x^d(1, 4) = x(1).$$

Так как множество $\mathbf{K}'$ состоит из одного элемента, то для удобства расчетов, модель может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передачи информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда $x(3) = x(2) = x^d(1, 7)$, $\mathbf{K}' = 1, 2$, $\theta(k) = x^d(k, t_F)$, $\xi(k) = x(k)$. Запишем задачу и конструкции в терминах НДС.

Имеем:

$$f^d(0, t) = -2x^d(t) + (u_1^d(t))^2, \quad f^d(1, t) = (t - u_2^d)^2,$$

$$f^d_{x^d}(0, t) = -2, \quad f^d_{x^d}(1, t) = 0,$$

$$H^d(0, t) = \psi^d(0, t+1)(-2x^d(t) + (u_1^d(t))^2) - \frac{1}{2}(x^d(t))^2 - \frac{1}{3}(u_1^d)^3,$$

$$H^d_{x^d}(0, t) = -2\psi^d(0, t+1) - x^d(t), \qquad H^d_{x^d x^d}(0, t) = -1,$$

$$H^d(1,t) = \psi^d(1,t+1)(t-u_2^d)^2 - \frac{1}{2}(x^d)^2 - u_2^d,$$
$$H^d_{x^d}(1,t) = -x^d(t), \qquad H^d_{x^d x^d}(1,t) = -1,$$
$$R^d(0,t) = \psi^d(0,t+1)(-2x^d(t) + (u_1^d(t))^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma^d(0,t+1)((-2x^d(t) + (u_1^d(t))^2 - x^{d\mathrm{I(t)}})^2 -$$
$$- \frac{1}{2}(x^d(t))^2 - \frac{1}{3}(u_1^d)^3 - \psi^d(0,t)x^d(t) - \frac{1}{2}\sigma^d(0,t)(x^d(t) - x^{d\mathrm{I}}(t))^2,$$
$$R^d(1,t) = \psi^d(1,t+1)(t-u_2^d)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma^d(1,t+1)((t-u_2^d)^2 - x^{d\mathrm{I}}(t))^2 - \frac{1}{2}(x^d)^2 - u_2^d - \psi^d(1,t)x^d(t) -$$
$$- \frac{1}{2}\sigma^d(1,t)(x^d(t) - x^{d\mathrm{I}}(t))^2.$$

На обоих этапах управляющие воздействия, найденные из необходимых условий экстремума функций $R^d(k,t)$ являются результатом решения следующих уравнений:

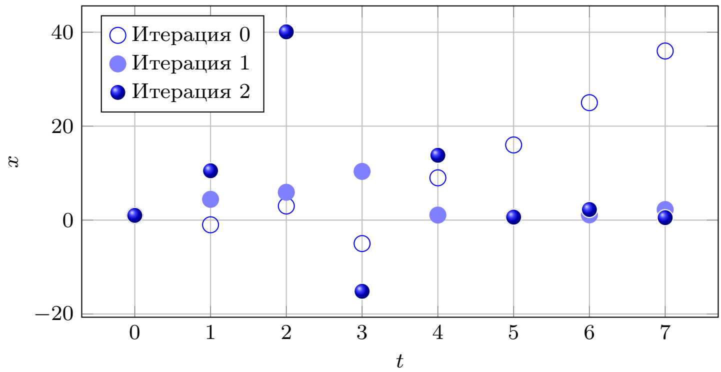
$$2\psi^d(0,t+1) + 2\sigma^d(0,t+1)(-2x^d(t) + (\tilde{u}_1^d(t))^2 - x^{d\mathrm{I(t)}}) - \tilde{u}_1^d(t) = 0,$$
$$-2\psi^d(1,t+1)(t-\tilde{u}_2^d) - 2\sigma^d(1,t+1)((t-\tilde{u}_2^d)^2 - x^{d\mathrm{I(t)}})(t-\tilde{u}_2^d) - 1 = 0,$$
$$\psi(2) = -1, \qquad \sigma(2) = \Lambda^1, \qquad \psi(1) = \psi^d(1,4), \qquad \sigma(1) = \sigma^d(1,4) + \Lambda^5,$$
$$\psi^d(0,t) = -2\psi^d(0,t+1) - x^d(t), \qquad \psi^d(1,t) = -x^d(t),$$
$$\sigma^d(0,t) = -4\sigma^d(0,t+1) - 1 + \Lambda^3, \qquad \sigma^d(1,t) = -1 + \Lambda^3,$$
$$\sigma^d(0,3) = \sigma(2), \qquad \sigma^d(1,7) = \sigma(3).$$

Решение получено за 2 итерации. Изменение функционала по итерациям представлено в таблице 1.

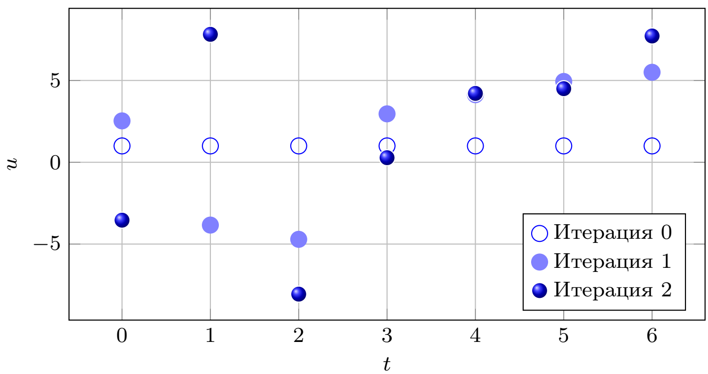
Таблица 1. Результаты расчетов примера 1

Итерация	$\Lambda^1 = \Lambda^3 = \Lambda^5$	$I = x^d(7) \to \min$
0	–	36
1	0	2.25
2	0.7	0.52

При расчетах выбор значения Λ^3 осуществлялся для обеспечения минимума функционала и находился перебором в диапазоне от 0 до 1 с шагом 0.1. Графики переменных состояния и управления приведены на рисунках 1*а* и 1*б*.



(a) Состояние



($б$) Управление

Рисунок 1. Результаты расчетов примера 1

Пример 2.

Рассматривается следующая 2-этапная задача.

1-й этап:

$$x^d(t+1) = (x^d(t))^2 + u^{d1}, \qquad |u^{d1}| \leqslant 1,$$
$$x^d(0) = 0, \qquad f^0 = x^d, \qquad t = 0, 1, 2.$$

2-й этап:

$$x^d(t+1) = u^{d2} - (x^d)^2, \qquad f^1 = x^{d1}u^{d2}, \qquad |u^{d2}| \leqslant 2, \quad t = 3, 4, 5$$
$$I = x^d(6) \to \inf.$$

По аналогии с примером 1 представим эту систему в виде НДС.

Имеем $k = 0, 1, 2, 3$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^d, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня.

Установим взаимосвязь между переменными. В начале процесса при $k = t = 0$, $x(0) = x^d(0) = 0$. Далее $x(1) = x^d(0, 2)$, $x^d(1, 3) = x(1)$. Тогда $I = x(2)$. Так как множество $\mathbf{K}'$ состоит из одного элемента, то для удобства расчетов, модель может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передаче информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда $x(3) = x(2) = x^d(1, 6)$; $\mathbf{K}' = 1, 2$; $\theta(k) = x^d(k, t_F)$; $\xi(k) = x(k)$.

Последний мгновенный 3-ий этап играет роль передатчика информации об окончании всего процесса и $I = x(3) = x(2)$.

Итак, получили следующую модель НДС:

$$k = 0: \quad x^d(0, t+1) = (x^d(0, t))^2 + u^{d1}(0, t), \qquad |u^{d1}(0, t)| \leqslant 1,$$
$$x(0) = x^d(0, 0) = 0, \qquad f^0(0, t) = x^d(0, t), \qquad t = 0, 1, 2.$$
$$k = 1: \quad x^d(1, t+1) = u^{d2} - (x^d)^2, \qquad |u^{d2}(1, t)| \leqslant 2,$$
$$x(1) = x^d(0, 1), \qquad f^1(1, t) = x^d(1, t)u^{d2}(1, t), \qquad t = 3, 4, 5,$$
$$k = 2, 3: \quad x(2) = x(3) = x^d(1, 2).$$

Очевидно, что множество $\mathbf{K}' = 1, 2$, а функции $\theta(1) = x^d(0, 1)$, $\xi(1) = x(1)$, $\theta(2) = x^d(1, 2)$, $\xi(2) = x(2)$.

Заметим, что на обоих этапах процесс нижнего уровня не зависит от переменных состояния верхнего уровня, тогда $\lambda(0, t) = \lambda(1, t) = 0$, $\Lambda(0, t) = \Lambda(1, t) = 0$, $D(0, t) = D(1, t) = 0$.

$$H^d(0, t) = \psi^d(0, t+1)((x^{d1}(t))^2 + u^{d1}) - x^d(t),$$
$$H^d_{x^d}(0, t) = 2\psi^d(0, t+1)x^{d1}(t) - 1, \quad H^d_{x^d x^d}(0, t) = 2\psi^d(0, t+1),$$
$$H^d(1, t) = \psi^d(1, t+1)(u^{d2} - (x^d)^2) - x^d(t)u^{d2}(t),$$
$$H^d_{x^d}(1, t) = -2\psi^d(1, t+1)x^d(t) - u^{d2}(t), \quad H^d_{x^d x^d}(1, t) = -2\psi^d(1, t+1),$$
$$\begin{aligned} R^d(0, t) = {} & \psi^d(0, t+1)((x^d(t))^2 + u^{d1}) + \\ & + \frac{1}{2}\sigma^d(0, t+1)((x^d(t))^2 + u^{d1} - x^{d\mathrm{I}}(t))^2 - \\ & - (x^d(t) - \psi^d(0, t)x^d(t) - \frac{1}{2}\sigma^d(0, t)(x^d(t) - x^{d\mathrm{I}}(t))^2, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} R^d(1, t) = {} & \psi^d(1, t+1)(u^{d2} - (x^d)^2) + \\ & + \frac{1}{2}\sigma^d(1, t+1)((u^{d2} - (x^d)^2)^2 - x^{d\mathrm{I}}(t))^2 - \\ & - x^d u^d_2 - \psi^d(1, t)x^d(t) - \frac{1}{2}\sigma^d(1, t)(x^d(t) - x^{d\mathrm{I}}(t))^2. \end{aligned}$$

На обоих этапах воспользуемся необходимыми условиями экстремума функций $R^d(k,t)$ по переменным управления.Найдем производные от этой функции по управляющим переменным и приравняем к нулю. Соответственно по этапам имеем.

$$\psi^d(0,t+1)+\sigma^d(0,t+1)((x^d(t))^2+u^{d1}-x^{d\mathrm{I}}(t))=0,$$

Решение полученного уравнения обозначим через N_1.

$$N_1=\frac{\sigma^d(0,t+1)(x^{d\mathrm{I}}(t)-(x^d(t))^2)-\psi^d(0,t+1)}{\sigma^d(0,t+1)},$$

$$\tilde{u}_1^d(t)=\begin{cases}N_1, & N_1\in(-1,1),\\ -1, & N_1\le(-1),\\ 1, & N_1\ge 1.\end{cases}$$

По аналогии на втором этапе:

$$\psi^d(1,t+1)+\sigma^d(1,t+1)((u^{d2}(t)-(x^d)^2(t)^2-x^{d\mathrm{I}}(t))-x^d(t)=0,$$

$$N_2=\frac{\sigma^d(1,t+1)(x^{d\mathrm{I}}(t)+(x^d(t))^2)-\psi^d(1,t+1)+x^d(t)}{\sigma^d(1,t+1)},$$

$$\tilde{u}_2^d(t)=\begin{cases}N_2, & N_2\in(-2,2),\\ -2, & N_2\le(-2),\\ 2, & N_2\ge 2.\end{cases}$$

$$\psi(2)=-1,\ \sigma(2)=\Lambda^1,\ \psi(1)=\psi^d(1,3),\ \sigma(1)=\sigma^d(1,3)+\Lambda^5,$$

$$\psi^d(0,t)=)=2\psi^d(0,t+1)x^d(0,t)-1,$$

$$\psi^d(1,t)=-2\psi^d(1,t+1)x^d(1,t)-u^{d2}(1,t),$$

$$\sigma^d(0,t)=4\sigma^d(0,t+1)x^d(0,t)+2\psi(0,t+1)+\Lambda^3,$$

$$\sigma^d(1,t)=-4\sigma^d(1,t+1)-2\psi(1,t+1)+\Lambda^3,$$

$$\sigma^d(0,3)=\sigma(2),\qquad \sigma^d(1,6)=\sigma(3).$$

Результаты расчетов представлены в таблице 2 и на рисунках 2*а* и 2*б*.

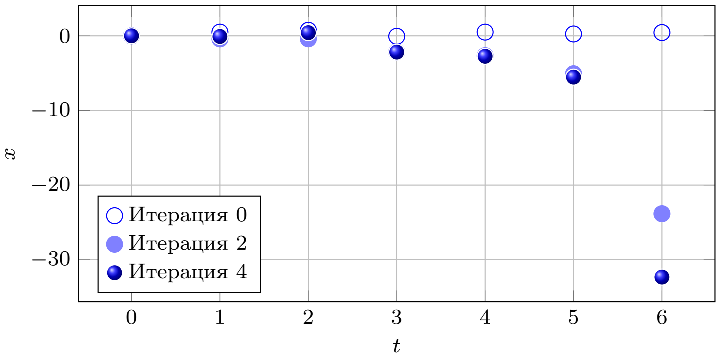
Решение получено за 4 итерации, изменение функционала по итерациям дано в таблице 2. При расчетах выбор значения Λ^3 осуществлялся для обеспечения минимума функционала и находился перебором в диапазоне от 0 до 1 с шагом 0.1. Графики переменных состояния и управления приведены на рисунках 2*а* и 2*б*.

6. Заключение

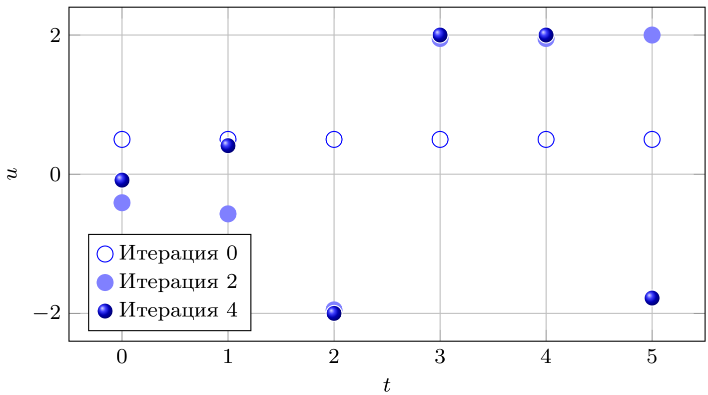
В работе предложен метод минимаксного улучшения второго порядка для неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями и

Таблица 2. Результаты расчетов примера 2

Итерация	$\Lambda^1 = \Lambda^3 = \Lambda^5$	$I = x^d(6) \to \min$
0	-	0.44
1	0.5	-0.73
2	0.2	-23.84
3	0.7	-32.29
4	0.171	-32.33



(*а*) Состояние



(*б*) Управление

Рисунок 2. Результаты расчетов примера 2 сформулирован его алгоритм. Также приведена и доказана теорема об улучшаемости начального приближения.

Алгоритм апробирован на двух иллюстративных примерах. В первом на переменные управления не заданы ограничения, тогда как во втором примере они присутствуют. Решения достигаются за две, три итерации. Расчеты показывают, что присутствующие в сопряженной системе знакоопределенные матрицы являются дополнительным средством для уменьшения значения функционала. Методика их выбора пока отсутствует, использовался перебор числовых значений в заданном диапазоне. Проведенные расчеты подтверждают работоспособность метода.

Список литературы

[1] *Теория систем с переменной структурой*/ ред. С. В. Емельянов.– М.: Наука.– 1970.– 592 с. ↑48

[2] Гурман В. И. *К теории оптимальных дискретных процессов* // Автоматика и телемеханика.– 1973.– № 7.– С. 53–58. ↑48

[3] Васильев С. Н. *Теория и применение логико-управляемых систем* // *Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления»*, SICPRO'03 (Москва, 29–31 января 2003), М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.– 2003.– С. 23–52. ↑48

[4] Бортаковский А. С. *Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами*, Информатика. Сер. Автоматизация проектирования.– №2–3, М.: ВИМИ.– 1992.– С. 72–79. ↑48

[5] Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*.– М.: Наука.– 2005.– ISBN 978-5-9710-5725-3.– 429 с. ↑48

[6] Lygeros J. *Lecture Notes on Hybrid Systems*.– Cambridge: University of Cambridge.– 2003.– 70 pp. URL ↑48

[7] Бурков В. Н. *Основы математической теории активных систем*.– М.: Наука.– 1977.– 255 с. ↑48

[8] Бурков В. Н., Новиков Д. А. *Теория активных систем (история развития и современное состояние)* // Пробл. управл.– 2009.– № 3.1.– С. 29–35. ↑48

[9] Кротов В. Ф., Гурман В. И. *Методы и задачи оптимального управления*.– М.: Наука.– 1973.– 448 с. ↑48

[10] Кротов В. Ф. *Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем* // ДАН СССР.– 1967.– Т. **172**.– № 1.– С. 18–21. ↑48

[11] Расина И. В., Гусева И. С. *Метод улучшения управления для неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями* // Программные системы: теория и приложения.– 2018.– Т. **9**.– № 2.– С. 23–38. URL ↑48, 50

[12] Гурман В. И., Расина И. В. *О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума* // Автоматика и телемеханика.– 1979.– № 10.– С. 12–18. ↑48

[13] Rasina I., Danilenko O. *Second-order improvement method for discrete-continuous systems with intermediate criteria*, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (October 15–19, 2018, Yekaterinburg, Russia), IFAC-Papers Online.– vol. **51**.– No. 32.– 2018.– Pp. 184–188. ↑49, 51

[14] Расина И. В., Фесько О. В. *Достаточные условия относительного минимума для дискретно-непрерывных систем* // Программные системы: теория и приложения.– 2020.– Т. **11**.– № 2.– С. 47–59. ↑49, 53, 54

[15] Гурман В. И.,Трушкова Е. А. *Приближенные методы оптимизации управляемых процессов* // Программные системы: теория и приложения.– 2010.– Т. **4**.– № 4.– С. 85–104. ↑52

Поступила в редакцию 31.07.2023;
одобрена после рецензирования 11.10.2023;
принята к публикации 12.10.2023;
опубликована онлайн 28.10.2023.

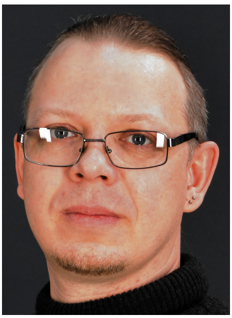
Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Информация об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., г.н.с. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН и Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва, Российская Федерация, специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 130 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968
e-mail: *irinarasina@gmail.com*



Александр Олегович Блинов

к.т.н., доцент кафедры информационных технологий, искусственного интеллекта и общественно-социальных технологий цифрового общества факультета политических и социальных технологий ФГБОУ ВО «Российский государственный социальный университет», Москва, Российская Федерация

0000-0002-5713-2325
e-mail: *aleblinov@yandex.ru*

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

EN RU PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS ISSN 2079-3316
Research Article OPTIMIZATION METHODS AND CONTROL THEORY

UDC 517.977:004.421.2
10.25209/2079-3316-2023-14-4-47-66

Minimax improvement method for inhomogeneous discrete systems

Irina Viktorovna **Rasina**[1], Alexander Olegovich **Blinov**[2]

[1] Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia
[1] Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia
[2] Russian State Social University, Moscow, Russia
[1]✉ *irinarasina@gmail.com*

Abstract. A class of two-level discrete inhomogeneous systems (DNS) is considered for the case when all homogeneous subsystems of the lower level are not only connected by a common functionality, but also have their own goals. Similar systems are widely used in practice (economics, ecology), and also arise in the process of numerically solving optimization problems when discretizing continuous control systems.

A second-order control improvement method is proposed, for the derivation of which a generalization of sufficient optimality conditions by V. F. Krotov. Illustrative examples are given. (*In Russian*).

Key words and phrases: heterogeneous discrete systems, intermediate criteria, sufficient optimality conditions, control improvement method

2020 *Mathematics Subject Classification*: 49M99; 49N10

Acknowledgments:

[1] The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00202)

For citation: Irina V. Rasina, Alexander O. Blinov. *Minimax improvement method for inhomogeneous discrete systems*. Program Systems: Theory and Applications, 2023, **14**:4(59), pp. 47–66. (*In Russ.*). https://psta.psiras.ru/read/psta2023_4_47-66.pdf

References

[1] *Theory of Systems with Variable Structures*, ed. Emel'yanov S. V., Nauka, M., 1970 (in Russian), 592 pp.

[2] V. I. Gurman. "Theory of optimum discrete processes", *Autom. Remote Control*, **34**:7 (1973), pp. 1082–1087 (in Russian).

[3] S. N. Vassilyev. "Theory and application of logic-based controlled systems", *Proceedings of the International Conference Identification and Control Problems*, SICPRO'03 (Moskva, 29–31 yanvarya 2003, Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN), Institute of control sciences, M., 2003, pp. 23–52 (in Russian).

[4] A. S. Bortakovskij. "Sufficient optimality conditions for control of deterministic logical-dynamic systems", Informatika, Ser. Computer Aided Design, 2–3, VIMI, M., 1992, pp. 72–79 (in Russian).

[5] B. M. Miller, E. Ya. Rubinovich. *Optimization of the Dynamic Systems with Pulse Controls*, Nauka, M., 2005, ISBN 978-5-9710-5725-3 (in Russian), 429 pp.

[6] J. Lygeros. *Lecture Notes on Hybrid Systems*, University of Cambridge, Cambridge, 2003, 70 pp.

[7] V. N. Burkov. *Fundamentals of the mathematical theory of active systems*, Nauka, M., 1977 (in Russian), 255 pp.

[8] V. N. Burkov, D. A. Novikov. "Active systems theory (history of development)", *Probl. upravl.*, 2009, no. 3.1, pp. 29–35 (in Russian).

[9] V. F. Krotov, V. I. Gurman. *Methods and Problems of Optimal Control*, Nauka, M., 1973 (in Russian), 448 pp.

[10] V. F. Krotov. "Sufficient conditions for the optimality of discrete control systems", *DAN SSSR*, **172**:1 (1967), pp. 18–21 (in Russian).

[11] I. V. Rasina, I. S. Guseva. "Control improvement method for non-homogeneous discretesystems with intermediate criterions", *Program Systems: Theory and Applications*, **9**:2 (2018), pp. 23–38 (in Russian).

[12] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "On practical applications of conditions sufficient for a strong relative minimum", *Autom. Remote Control*, **40**:10 (1980), pp. 1410–1415.

[13] I. Rasina, O. Danilenko. "Second-order improvement method for discrete-continuous systems with intermediate criteria", 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (October 15–19, 2018, Yekaterinburg, Russia), IFAC-Papers Online, vol. **51**, 32, 2018, pp. 184–188.

[14] I. V. Rasina, O. V. Fesko. "Sufficient relative minimum conditions for discrete-continuous control systems", *Program Systems: Theory and Applications*, **11**:2 (2020), pp. 61–73.

[15] V. I. Gurman, E. A. Trushkova. "Approximate methods of control processes optimization", *Program Systems: Theory and Applications*, **4**:4 (2010), pp. 85–104 (in Russian).