RU EN ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ISSN 2079-3316

научная статья МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 536.757

doi 10.25209/2079-3316-2024-15-1-41-62

Фрактальная модель макросистем

Сергей Анатольевич **Амелькин**

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена математическая модель макросистемы произвольной природы в виде фрактального графа. Такое представление позволяет вывести феноменологические закономерности макросистем, не основываясь на свойствах элементарных объектов, формирующих макросистему. Показано, что на множестве стационарных процессов можно ввести метрику; метрическими свойствами обладает производство энтропии в макросистеме.

Ключевые слова и фразы: Макросистемы, производство энтропии, процессы минимальной диссипации

Благодарности: Исследование выполнено за счет *гранта Российского научного фонда № 23-21-00173* URL

Для цитирования: Амелькин С. А. *Фрактальная модель макросистем* // Программные системы: теория и приложения. 2024. **Т. 15**. № 1(60). С. 41–62. https://psta.psiras.ru/read/psta2024_1_41-62.pdf

Введение

При анализе закономерностей, возникающих в процессах ресурсообмена в системах различной природы: физических, химических, экономических, информационных, социальных целесообразно использовать макросистемный подход, учитывающий взаимосвязи между усредненными характеристиками большого количества неконтролируемых элементарных объектов. Феноменологические особенности макросистемного подхода связаны с тем, что математические модели макросистем основаны на наблюдаемых свойствах совокупности элементарных объектов, а эти свойства описываются макроскопическими величинами, в то время как внутренние механизмы взаимодействия элементарных объектов не рассматриваются ввиду их большого количества. При этом макроскопические величины не могут быть применимы к отдельным элементарным объектам. Для физических (прежде всего термодинамических) макросистем связь макроскопических величин – температуры, давления, внутренней энергии и пр. – с законами взаимодействия элементарных объектов (молекул) определяется статистической физикой, описывающей микросостояния элементарных объектов в соответствии с их координатами и импульсами. Таким образом, каждый элементарный объект является независимым от других, но его траектория в фазовом пространстве может изменяться при взаимодействии с другими объектами.

Взаимодействия в социальных макросистемах описываются, исходя из предположения, что каждый индивидуум (актор), принимающий решения, строго рационален: его поведение полностью обусловлено наличием целевой функции, значение которой он стремится осознанно или неосознанно максимизировать в ходе взаимодействия с другими акторами. В качестве причин иррациональности описываются ненаблюдаемые и неизмеряемые физиологические и психологические особенности личности [1], взаимовлияние общества и личности [2] и др. Проведенные исследования [3] показали, что рациональность акторов ограниченна и поведение акторов как элементарных объектов определяется социумом, в котором они взаимодействуют.

Взаимозависимость элементарных объектов и непрогнозируемость их поведения характерны для любых макросистем, отличных от физических: подобные явления наблюдаются в экологических, демографических, образовательных и иных видах социальных и информационных макросистем [4, 5]. Обоснование зависимостей макроскопических параметров в таких системах требует иного обоснования. Так, в [6] предложено деление макросистемы на микро-, мезо-, экзо- и макроуровни. На каждом уровне рассматривается взаимодействие между системами, а уровень индивидуальных взаимодействий выводится за пределы наблюдений. Следующим шагом моделирования является переход от концентрической модели к спиральной [7]. Логически завершает этот путь фрактальное представление макросистем, предлагаемое в настоящей работе.

Основными задачами работы являются:

построить модель макросистемы произвольной природы, как фрактальную систему, свойства которой на каждом уровне описывается по распределению состояний макросистем на более низком уровне.

описать свойства экстенсивных и интенсивных параметров макросистем и показать, что можно ввести понятие расстояния между процессами в макросистемах, и таким образом количественно измерить отклонение процессов друг от друга.

1. Математическая модель ресурсообмена

Макросистемами называют системы, для которых выполняются следующие условия:

1. Макросистемы состоят из большого количества элементарных объектов, настолько большого, что любую макросистему можно разделить на любое конечное количество подсистем, каждая из которых может рассматриваться, как макросистема. Объединение нескольких макросистем является макросистемой более высокого уровня. Макросистема Y может рассматриваться, как объединение конечного числа макросистем более низкого уровня $X_i : Y = U_{i \in \mathcal{X}} X_i$. Это условие называют условием фрактальности [8]. Внешнее окружение макросистемы также будем рассматривать, как макросистемы (и макросистемой более высокого уровня является объединение макросистемы и ее внешнего окружения). Поскольку количество подсистем, на которое можно разделить макросистему может быть сколь угодно большое, в том числе достаточное для определения статистических характеристик любой заданной точности, то подсистемы наряду с макросистемными свойствами обладают всеми свойствами элементарных объектов. Таким образом нет необходимости отдельно рассматривать свойства элементарных объектов, составляющих макросистему.[1] Например, заданный объем идеального газа можно разделить на сколь угодно большое конечное число элементарных

[1] При этом однако требуется аккуратно отслеживать, что части, содержащие статистически мало элементарных объектов, никогда в рассмотрении не возникают. (*Примечание редактора.*)

объемов, каждый из которых, тем не менее, будет обладать всеми термодинамическими свойствами идеального газа.

2. Состояние макросистемы определяется вектором запасов ресурсов Q, которые рассматриваем, как аддитивные величины: если Y – объединение нескольких макросистем $X_i : Y = U_{i\in\mathcal{X}}X_i$, то $Q_Y = \sum\limits_i Q_{Xi}$. Макросистема может обмениваться ресурсами с ее внешним окружением; макросистемы, составляющие (то есть являющиеся подсистемами) макросистему более высокого уровня, могут обмениваться ресурсами между собой. Потоки ресурсов между подсистемами X и Y обозначим q_{XY}. Макросистемы любой природы могут быть описаны через запасы ресурсов. Л.И. Розоноэр вводит понятие ресурса не только для экономических, но и для физических систем: «в физике под ресурсами можно понимать такие величины, как энергия, импульс, масса, которыми обмениваются различные части физической системы» [9].
3. Каждым элементарным объектом управлять невозможно из-за их большого числа, управление макросистемой может быть организовано только путем воздействия на усредненные по множеству элементарных объектов параметры, а именно:
   - изменение параметров внешнего окружения макросистемы, взаимодействие с которым обусловливает изменение запасов ресурсов в макросистеме;
   - изменение запасов ресурсов (например, извлечение их) в макросистеме за счет внешних интервенций;
   - изменение характеристик инфраструктуры ресурсообмена в целях ускорения или, наоборот, замедления процессов ресурсообмена.

Перечисленные условия определяют макросистему вне зависимости от ее природы. В терминах ресурсов можно описать как экономические макросистемы на уровне отдельных потребителей [10], отраслей народного хозяйства [11] или регионов [12], так и информационные системы обмена синтаксической и семантической информацией [13, 14], а также экономические аспекты обмена информацией [15] термодинамические системы обмена веществом и энергией [16] и пр. В ходе обмена ресурсами общее его количество в макросистеме может сохраняться (в этом случае говорят о законе сохранения ресурса) или нет, что происходит в условиях производства, потребления или утилизации ресурса в ходе взаимодействия между подсистемами. Интенсивности потоков различных ресурсов в ходе обмена могут быть взаимосвязаны: ресурсы являются взаимодополняющими (взаимозаменяемыми) при монотонно возрастающей (убывающей) взаимосвязи между интенсивностями их потоков.

В физических системах тепло- и массообмена ресурсами являются энергия, количество вещества, объем и масса, в экономических системах к ресурсам можно отнести запасы материальных и финансовых активов, в системах, где наблюдается обмен информацией, ресурсами являются формирующие дискурс корпусы текстов, содержащих синтаксическую, семантическую и прагматическую информацию.

Макросистему можно представить в виде *фрактального цветного ориентированного взвешенного мультиграфа*, узлы которого соответствуют подсистемам и внешнему окружению макросистемы, а ребра – потокам ресурсов между подсистемами и между подсистемами и внешним окружением макросистемы:

Фрактального – каждый узел графа можно представить в виде графа, описывающего взаимодействие подсистем, образующих этот узел между собой и с их окружением, так что:

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{i\in\mathcal{X}} Q_i = Q_X; \quad \sum\limits_{j\in\mathcal{Y}} Q_j = Q_Y; \\ \sum\limits_{\substack{i\in\mathcal{X}\\ j\in\mathcal{Y}}} q_{ij} = q_{XY}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Цветного – каждый узел графа (каждая подсистема) характеризуется вектором ресурсов $Q = (Q_0, ..., Q_N)$, а потоки ресурсов между подсистемами могут быть функционально не связанными друг с другом, поэтому ребра графа, соответствующие потокам различных ресурсов, маркируются соответствующими цветами.

Ориентированного – направление каждого ребра определяет положительный знак потока каждого ресурса; так, если ребра направлены от узла X к узлу Y, то:

$$q_{XY,\nu} = -\frac{dQ_X}{dt} = \frac{dQ_Y}{dt}, \quad \nu = 0, ..., N. \tag{2}$$

Впрочем, ребра разного цвета, соответствующие разным ресурсам, могут быть как сонаправленными, так и противоположно направленными. Так, например, в информационных макросистемах потоки синтаксической и семантической информации всегда сонаправлены, а в экономических системах добровольного ресурсообмена потоки благ: услуг и товаров и денег – противоположно направлены.

Взвешенного – вес ребра показывает интенсивность потока: положительное значение потока $q_{XY,\nu} > 0$, если реальный поток ресурса направлен по направлению ребра, $q_{XY,\nu} < 0$, если – противоположно направлению ребра. Кроме того, для всех потоков между узлами X и Y (то есть для всех потоков q_{XY}) определена матрица A инфраструктурных коэффициентов. Эта матрица является метаданными для ребер всех цветов, соединяющих узлы X и Y, и определяет свойства взаимодополняемости и взаимозаменяемости ресурсов.

Интенсивность процесса ресурсообмена зависит как от параметров состояния подсистем, обменивающихся ресурсами, так и от условий (инфраструктуры) ресурсообмена. Параметры состояния взаимодействующих подсистем определяют движущие силы процессов ресурсообмена, а инфраструктура – коэффициенты пропорциональности между интенсивностями потоков и величинами движущих сил. Так, для процесса теплообмена к инфраструктуре можно отнести площадь контакта между обменивающимися теплом подсистемами, инфраструктурный коэффициент здесь – коэффициент теплопередачи. В экономике под инфраструктурой понимают комплекс учреждений и институций, обеспечивающих свободное движение товаров и услуг на рынке. Развитие инфраструктуры снижает барьеры, влияющие на интенсивность экономического обмена, тем самым увеличивая эластичность спроса и предложения товаров и услуг, определяющую инфраструктурные коэффициенты ресурсообмена в экономических макросистемах. При этом движущие силы и потоки ресурсов могут быть взаимосвязанными, именно величины инфраструктурных коэффициентов в матрице A показывают взаимное влияние движущих сил ресурсообмена и интенсивностей потоков.

Мультиграфа – два узла графа могут быть соединены как ребрами различных цветов, так и группами ребер различных цветов, что соответствует множеству точек контакта между подсистемами. Отсутствие ребер некоторых цветов между узлами мультиграфа означает изолированность узлов друг от друга. Отсутствие ребра между узлами равносильно нулевому значению веса этого ребра, так что в общем случае можно говорить о том, что граф макросистемы является турниром (ориентированным графом, полученным из неориентированного полного графа). Пусть две макросистемы X и Y обмениваются вектором ресурсов Q. В каждый момент времени t запасы ресурсов, описывающие состояние макросистем, равны $Q_X(t), Q_Y(t)$. Макросистемы представим в виде объединения конечного множества подсистем: $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. Каждой паре узлов X_i и Y_j соответствует вектор потоков ресурсов $q_{ij}(t)$. Сумма всех векторов $q_{ij}(t)$ определяет интенсивность потоков ресурсов между макросистемами X и Y.

Состоянием равновесия назовем такое состояние (Q_X, Q_Y), при котором сумма потоков ресурсов в каждый момент времени t

(3) $$q_{XY}(t) = \sum_{\substack{i\in\mathcal{X}\\ j\in\mathcal{Y}}} q_{ij}(t) = 0.$$

Таким образом, равновесие в макросистеме рассматривается, как динамическое. Равенство нулю вектора $q_{XY}(t)$ не означает, что $q_{ij}(t) = 0$, но что $q_{ij}(t)$ распределены с математическим ожиданием, равным нулю при любом t. Условие равновесия можно определить следующим образом: на уровне любых множеств подсистем $\mathcal{X}, \mathcal{Y} : X = U_{i\in\mathcal{X}} X_i$; $Y = U_{j\in\mathcal{Y}} Y_j$ потоки $q_{ij} (i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{Y})$ имеют распределение $f(\tilde{q})$, не зависящее от времени с математическим ожиданием $M[\tilde{q}] = 0$.

Отметим, что потоки $q_{ij}(t)\,(i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{Y})$, и случайная величина $\tilde{q}$, описывающая распределение потоков подсистем, – вектора. На этом уровне подсистем можно предполагать большое количество факторов, влияющих на распределение потоков, это означает, что распределение $f(\tilde{q})$ можно описать многомерным нормальным распределением. Параметрами этого распределения являются математическое ожидание $M[\tilde{q}]$, определяющее потоки ресурсов на уровне подсистем X и Y в соответствии с (3), и ковариационная матрица $C[\tilde{q}]$.

В предположении, что потоки ресурсов q_{XY} возникают вследствие действия некоторых движущих сил, которые на уровне подсистем мы можем также рассматривать, как случайный вектор, такой что:

- потоки ресурсов q_{XY} линейно зависят от движущих сил φ_{XY} ресурсообмена:

(4) $$q_{XY} = A\varphi_{XY}$$

  (здесь $A = (\alpha_{\nu k})$ – матрица инфраструктурных элементов), при таком предположении распределение движущих сил также является нормальным;

- ковариационная матрица $C[\tilde{q}]$ подсистем макросистемы $X \cup Y$ зависит от интенсивности движущих сил $\varphi_{XY} = M[\tilde{\varphi}]$, вызывающих эти потоки, так что матрицы $C[\tilde{q}]$ и $C[\tilde{\varphi}]$ совместно нормализуемы (их собственные вектора совпадают) – вследствие линейности связи между потоками и движущими силами;

- пределы коэффициентов корреляции, соответствующих ковариационной матрице $C[\tilde{q}]$, для любых $\nu, k = 0, ..., N : \lim\limits_{\varphi_{XY}\to 0} \rho_{\nu k} = 0$, $\lim\limits_{\varphi_{XY}\to\infty} \rho_{\nu k} = 1$ – вследствие перераспределения ресурсов по множеству подсистем в зависимости от количества промежуточных узлов данного цвета в цепи мультиграфа до точки контакта.

Движущими силами для процесса ресурсообмена в физических макросистемах являются разницы температур и давлений, в экономических – разницы оценок ценности благ, а в информационных – мотивации для получения и распространения информации. Движущие силы определяются неравенством соответствующих параметров двух подсистем, между которыми возможен обмен ресурсами. При этом на интенсивность потоков влияют и инфраструктурные параметры, такие как площадь контакта двух подсистем в процессе теплообмена, реклама в экономических макросистемах или использование различных модальностей при передаче информации.

Если для макросистемы X условие равновесия выполняется при взаимодействии с каждой макросистемой из ее окружения, то такая макросистема называется замкнутой. Если для макросистемы X все ее подсистемы находятся в состоянии равновесия при взаимодействии друг с другом (но не обязательно с окружением макросистемы X):

$$\forall t, \forall i \in \mathcal{X} : \sum_{j \in \mathcal{X}} q_{ij}(t) = 0, \tag{5}$$

то такую макросистему назовем внутренне равновесной. Для внутренне равновесной макросистемы все потоки наблюдаются только на границах макросистемы и ее окружения. Состояние внутреннего равновесия макросистемы является устойчивым, что означает выполнение принципа Ле Шателье: если на внутренне равновесную макросистему воздействовать извне, изменяя какое-либо из условий равновесия, то в такой макросистеме возникают потоки ресурсов, направленные в сторону противодействия изменениям.

2. Уравнения состояния макросистемы

Макросистема описывается множеством экстенсивных и интенсивных переменных:

- экстенсивными переменными называются такие, что для любых двух макросистем X и Y (не обязательно находящихся в состоянии равновесия)

$$Q_{X \cup Y} = Q_X + Q_Y; \tag{6}$$

  количества ресурсов в макросистемах являются экстенсивными переменными;

- интенсивными переменными ν называются такие, что для любых двух систем X и Y, находящихся в состоянии равновесия,

$$\nu_{X\cup Y} = \nu_X = \nu_Y. \tag{7}$$

Утверждение 1. *Экстенсивные переменные удовлетворяют условию нейтрального эффекта масштаба: если количества всех ресурсов во всех подсистемах макросистемы увеличить в $n > 0$ раз, то величины потоков в макросистеме не изменятся.*

В том числе, такое пропорциональное увеличение ресурсов не выведет макросистему из состояния внутреннего равновесия, если до того система находилась в состоянии внутреннего равновесия. Доказательство этого утверждения приведем ниже.

Следствие 1. *Зависимости интенсивных переменных от количества ресурсов, определяющих состояние макросистемы, в силу (7) должны быть однородными функциями нулевого порядка однородности.*

Доказательство утверждения 1. Множество экстенсивных переменных описывает состояние макросистемы. Так как объединение макросистем является макросистемой более высокого уровня, то каждая экстенсивная величина на этом уровне равна сумме соответствующих экстенсивных величин макросистем низкого уровня (подсистем). Естественное направление процессов ресурсообмена – это то, которое соответствует увеличению количества возможных состояний подсистем, соответствующих данному состоянию макросистемы в целом. Таким образом мы вводим целевую функцию макросистемы, как количественную величину. Эта величина аддитивна, следовательно, является экстенсивной. Такая величина $S = Q_0$, характеризующая целевую функцию системы, и остальные экстенсивные переменные функционально связаны: $S = \mathcal{S}(Q), Q = (Q_1, ..., Q_N)$. Это уравнение назовем уравнением состояния системы. Для замкнутой системы $\mathcal{S}(Q) \to \max$, что определяет самопроизвольное направление ресурсообмена.

Так как S – экстенсивная переменная, то $\mathcal{S}$ – однородная функция первого порядка однородности: при масштабировании системы в n раз или объединении n одинаковых макросистем, находящихся в равновесии:

$$nS = \mathcal{S}(nQ). \tag{8}$$

В соответствии с соотношениями Эйлера для однородных функций

$$\mathcal{S}(Q) = Q\nabla\mathcal{S} = \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_\nu}. \tag{9}$$

Обозначим $\nu_\nu = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_\nu}$. Так как $\mathcal{S}(Q)$ – однородная функция первого порядка однородности, то $\nu_\nu(Q) \quad (\nu = 1, ..., N)$ однородны нулевого порядка однородности, то есть являются интенсивными переменными: для любого значения $n > 0 \nu_\nu(nQ) = \nu_\nu(Q)$. Это значит, что пропорциональное увеличение ресурсов не выведет макросистему из состояния внутреннего равновесия, если до того система находилась в состоянии внутреннего равновесия. Таким образом, утверждение 1 доказано. □

В предположении дифференцируемости функции $\mathcal{S}(Q)$ и непрерывности ее частных производных, в соответствии с необходимым условием дифференцируемости функции существует полный дифференциал

$$d\mathcal{S} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_\nu} dQ_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \nu_\nu dQ_\nu. \tag{10}$$

Из уравнения (10) вытекают два следствия:

Следствие 2. *Дифференцируя соотношение Эйлера (9), получим:*

$$d\mathcal{S} = \sum_{\nu=1}^{N} (\nu_\nu dQ_\nu + Q_\nu d\nu_\nu). \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu d\nu_\nu = 0. \tag{12}$$

Следствие 3. *Процесс ресурсообмена между подсистемами X и Y (при положительном направлении потоков от X к Y) можно описать, используя уравнения (2) и (10), в виде:*

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_Y}{dt} + \frac{dS_X}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} (\nu_{Y_\nu} - \nu_{X_\nu}) q_{XY,\nu}. \tag{13}$$

В соответствии с принципом Ле Шателье между знаками разности интенсивных переменных и потока для каждого ресурса имеет место взаимосвязь

$$sign(\nu_{Y_\nu} - \nu_{X_\nu}) = sign(q_{XY,\nu}) \quad \forall \nu = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Это означает, что в ходе самопроизвольного процесса в макросистеме величина $\sigma = \frac{dS}{dt} > 0$. Если продолжительность процесса бесконечно велика, то естественная эволюция макросистемы приводит ее к состоянию внутреннего равновесия, что и соответствует достижению максимального значения S. Это равносильно утверждению, что в состоянии внутреннего равновесия S максимальна. Таким образом, в процессе естественного, не вынужденного, ресурсообмена величина энтропии замкнутой макросистемы S не может убывать, а $S(Q)$ является целевой функцией системы:

- S – экстенсивная переменная,
- для замкнутой системы $\mathcal{S} \to \max$, что определяет самопроизвольное направление ресурсообмена, причем максимум соответствует состоянию равновесия;
- существует полный дифференциал $d\mathcal{S}$;
- скорость изменения (прироста) $\frac{dS}{dt}$ представляет собой скалярное произведение векторов движущих сил и потоков ресурсов.

Рассматривая совокупность значений экстенсивных параметров статистически значимого количества подсистем, формирующих некоторую макросистему, как распределение реализаций многомерной случайной величины, состояние динамического равновесия макросистемы соответствует максимальному значению энтропии. Энтропия аддитивна. Поэтому параметр S статистически соответствует энтропии распределения многомерной случайной величины. При описании модели макросистемы через показатели элементарных объектов [**17**] экстенсивная переменная с перечисленными свойствами определена, как энтропия системы, а скорость ее прироста – производство энтропии системы. При ресурсном описании макросистемы энтропия может рассматриваться, как запас информации о состоянии макросистемы.

В произвольном состоянии макросистемы распределение состояний подсистем также стремится к увеличению энтропии, что приводит к нормальному многомерному распределению параметров подсистем (при отсутствии ограничений на возможные значения случайного вектора при конечной дисперсии нормальное распределение соответствует максимальному значению энтропии).

Действительно, энтропия нормального распределения складывается из двух слагаемых: $S = S_0 + 0,5 \ln \det R$, где R – корреляционная матрица. Первое слагаемое соответствует полной независимости элементов системы и характеризует структуру макросистемы, а второе – описывает взаимосвязи в макросистеме. С увеличением корреляции $\rho_{\nu k}(\nu, k = 1, ..., N)$ между потоками, что наблюдается при увеличении величины движущих сил ресурсообмена, второе слагаемое, всегда отрицательное при $R \neq \mathbf{E}$, ($\mathbf{E}$ – единичная матрица) уменьшается. Это поясняет утверждение о S как целевой функции, достигающей своего максимума при достижении макросистемой состояния равновесия, и функции состояния, которая задает направление процессов в замкнутой системе, увеличивающее рассеяние параметров подсистем низкого уровня при упрощении структуры макросистемы на высоком уровне.

Интенсивные переменные $\nu = \nabla\mathcal{S}$ могут рассматриваться, как удельные потенциалы [**18**]. Их разность $\varphi_{XY} = \nu_Y - \nu_X$ представляет собой движущую силу процесса ресурсообмена. Потоки ресурсообмена направлены от подсистем с меньшими значениями интенсивных параметров к подсистемам с большими значениями интенсивных параметров.

Таким образом, уравнение (13) можно переписать следующим образом:

$$\sigma(\nu_X,\nu_Y) = \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu(\nu_X,\nu_Y) q_{XY,\nu}(\varphi(\nu_X,\nu_Y)). \tag{15}$$

Если движущая сила в течение процесса постоянна, то такой процесс будем называть стационарным. Выделим классы обратимых ($\varphi(\nu_X,\nu_Y) \to 0$) процессов и процессов минимальной диссипации, для которых среднее производство энтропии достигает своего минимума $\overline{\sigma}(\varphi) \to \min_\varphi |\overline{q_{XY}}(\varphi) = \text{fix}$.

Функция состояния может быть задана в дифференциальном виде:

$$\delta\Phi = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu(Q) dQ_\nu. \tag{16}$$

В этом случае возникает вопрос об интегрируемости функции $\Phi(Q)$. Уравнение (16) является пфаффовой формой. Пфаффова форма называется голономной, если существует такой интегрирующий множитель $w(Q)$, что

$$w(Q)\delta\Phi = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial Q_\nu} dQ_\nu = d\mathcal{S}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial Q_\nu} = w(Q)F_\nu(Q), \quad \nu = 1,...,N. \tag{17}$$

Пфаффова форма двух независимых переменных всегда голономна, то есть всегда существует интегрирующий множитель $w(Q)$. Однако, при $N > 2$ интегрирующий множитель существует, если выполняются условия голономности: для любых трех различных k, μ, ν

$$\begin{gathered} F_k(Q)\left(\frac{\partial F_\mu}{\partial Q_\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial Q_\mu}\right) + F_\mu(Q)\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial Q_k} - \frac{\partial F_k}{\partial Q_\nu}\right) + \\ + F_{\nu(Q)}\left(\frac{\partial F_k}{\partial Q_\mu} - \frac{\partial F_\mu}{\partial Q_k}\right) = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Эти условия получены из равенства вторых смешанных производных по любым парам переменных

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu \partial Q_k} = \frac{\partial (w(Q) F_\nu(Q))}{\partial Q_k}$$

(соотношения Максвелла) и исключением из этих равенств интегрирующего множителя $w(Q)$.

Кроме условий (18) необходимо, чтобы все произведения $w(Q)F_\nu(Q)$ были однородными нулевого порядка однородности.

Градиент функции $\mathcal{S}(Q)$ определяет вектор интенсивных переменных макросистемы. При увеличении запаса ресурса величина S также возрастает, но все с меньшей скоростью (закон убывающей отдачи), так что для всех

$$\nu = 1, ..., N \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_\nu} = \nu_\nu > 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu^2} = \frac{\partial \nu_\nu}{\partial Q_\nu} < 0.$$

Утверждение 2. *Матрица Гессе* $\mathcal{H}_S = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu \partial Q_k} \right)$ *для однородных функций первого порядка однородности является отрицательно полуопределенной.*

Доказательство. Действительно, в соответствии со Следствием 1 из соотношений Эйлера, дифференцируя обе части (12) по Q_k, получаем:

$$\forall k = 1, ..., N: \quad \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu \partial Q_k} = 0. \tag{19}$$

Для произвольного вектора x необходимые условия экстремума квадратичной формы по x

$$x^T \mathcal{H}_S x = \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu^2} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \sum_{k=\nu+1}^{N} 2 x_\nu x_k \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu \partial Q_k} \to \max_x \tag{20}$$

$$\frac{\partial (x^T \mathcal{H}_S x)}{\partial x_\nu} = \sum_{k=1}^{N} x_k \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu \partial Q_k} = 0, \tag{21}$$

что соответствует точке максимума (в соответствии с законом убывающей отдачи) квадратичной формы $x_\nu = Q_\nu$, $\nu = 1, ..., N$. Поскольку произведение $Q^T \mathcal{H}_S$ (19) равно нулю, то и $x^T \mathcal{H}_S x$ в точке максимума тоже равна нулю. Таким образом, при любом значении $x : x^T \mathcal{H}_S x \leq 0$, что и требовалось доказать. Отметим, что поскольку матрица Гессе симметрическая, то все ее собственные значения – действительные числа. □

Отрицательная полуопределенность матрицы Гессе $\mathcal{H}_S$ соответствует выпуклости вверх функции $\mathcal{S}(Q)$ и унимодальности S как целевого параметра. При увеличении запасов ресурсов в макросистеме S увеличивается, а интенсивные параметры уменьшаются, снижая величину движущей силы ресурсообмена. В соответствии с (13) такое поведение интенсивных параметров приводит к тому, что при воздействии на макросистему, изменяющем условия ее внутреннего равновесия, процессы ресурсообмена направлены в сторону противодействия изменениям, таким образом выполняется принцип Ле Шателье.

Частные производные $\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu^2}$ описывают насыщаемость системы ресурсами, а вторые производные $\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial Q_\nu \partial Q_k}$ определяют взаимозаменяемость и взаимодополнительность ресурсов в макросистеме. Если ресурсы взаимозаменяемые, то увеличение одного из ресурсов снижает удельный потенциал другого ресурса, если ресурсы взаимодополняющие, то увеличение одного из ресурсов, наоборот, увеличивает удельный потенциал другого ресурса.

3. Метрические свойства производства энтропии

Рассмотрим частный случай ресурсообмена в макросистеме, состоящей из двух подсистем X и Y, где потоки ресурсов линейно зависят от разностей интенсивных переменных подсистем (4):

$$q_{XY,\nu}(\nu_X, \nu_Y) = \frac{dQ_{Y_\nu}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{\nu k} \varphi_k(\nu_{X_k}, \nu_{Y_k}), \tag{22}$$

где $\varphi_k(\nu_{X_k}, \nu_{Y_k}) = \nu_{Y_k} - \nu_{X_k}$.

Утверждение 3. *Матрица $A = (\alpha_{\nu k})$ – матрица инфраструктурных коэффициентов, описывающая возможности ресурсообмена на границе между подсистемами, – является положительно полуопределенной симметрической матрицей (условия Онсагера).*

Доказательство. 1. Правая часть уравнения (15) при условии (4) представляет собой квадратичную форму

$$\sigma(\nu_X, \nu_Y) = \varphi^T(\nu_X, \nu_Y) A \varphi(\nu_X, \nu_Y). \tag{23}$$

При любых значениях движущих сил ресурсообмена $\varphi(\nu_X, \nu_Y)$ производство энтропии неотрицательно. Следовательно, A – положительно полуопределенная матрица.

2. Дважды продифференцируем обе части уравнения (15):

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_k} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_k} \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu q_{XY,\nu}(\varphi) = \frac{\partial q_{XY,\mu}}{\partial \varphi_k} + \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu \frac{\partial^2 q_{XY,\nu}}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_k}. \tag{24}$$

Для линейной зависимости

$$q_{XY} = A\varphi : \frac{\partial^2 q_{XY,\nu}}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_k} = 0,$$

а значит,

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_k} = \alpha_{\mu k} = \alpha_{k\mu}, \quad \text{матрица Гессе} \quad \mathcal{H}_\sigma = A. \tag{25}$$

□

Утверждение 4. *Производство энтропии является метрикой в пространстве стационарных процессов и может быть использовано для определения расстояния между процессами.*

1. *Нулем в пространстве стационарных процессов является обратимые процессы, для которых* $\sigma = 0$.
2. *Расстояние между двумя процессами* a *и* b *определяется, как* $\delta(a,b) = (\varphi_a - \varphi_b)^T A(\varphi_a - \varphi_b)$. *Очевидно, что* $\delta(a,a) = 0; \quad \delta(a,b) = \delta(b,a)$.
3. *Расстояние* $\delta(a,b)$ *удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Действительно, так как A – положительно полуопределенная симметрическая матрица, все ее собственные значения λ неотрицательны. Квадратичная форма может быть сведена к сумме квадратов, умноженных на собственные значения [19]:

$$(\varphi_a - \varphi_b)^T A(\varphi_a - \varphi_b) = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu (\varphi_{a\nu} - \varphi_{b\nu})^2, \tag{26}$$

а, поскольку для любой разности положительных величин квадрат разности всегда меньше суммы квадратов, выполняется неравенство

$$(\varphi_a - \varphi_b)^T A(\varphi_a - \varphi_b) \le \varphi_a^T A\varphi_a + \varphi_b^T A\varphi_b. \tag{27}$$

Для любых трех процессов $a, b, c : \varphi_a - \varphi_b = (\varphi_a - \varphi_c) + (\varphi_c - \varphi_b)$, откуда:

$$\begin{aligned}&(\varphi_a - \varphi_b)^T A(\varphi_a - \varphi_b) \le \\ &\le (\varphi_a - \varphi_c)^T A(\varphi_a - \varphi_c) + (\varphi_b - \varphi_c)^T A(\varphi_b - \varphi_c).\end{aligned} \tag{28}$$

С учетом $\delta(c,b) = \delta(b,c)$ из (28) следует неравенство треугольника.

Таким образом, производство энтропии в макросистеме характеризует расстояние между стационарными процессами ресурсообмена, протекающими в такой системе. Такое расстояние является характеристикой для каждого процесса, если его рассчитать между этим процессом и соответствующим (в смысле фиксированных условий протекания) обратимым процессом. Например, если зафиксировать температуры источников тепла, то процессами, находящимися на минимальном расстоянии от обратимых являются процессы минимальной диссипации [20]. В свою очередь, расстояние между реальными процессами и процессами минимальной диссипации можно описать, как экстропию [21].

Для нестационарных процессов ресурсообмена необходимо определить траекторию процесса: изменение во времени всех параметров подсистем в ходе приближения к равновесному состоянию. Для линейной зависимости потоков от движущих сил (22) выведем дифференциальное уравнение, определяющее изменение движущих сил процесса ресурсообмена в макросистеме, состоящей из двух подсистем X и Y. При заданных начальных условиях $\varphi_{XY}(0) = \varphi_0$ это уравнение описывает все параметры подсистем.

Полные дифференциалы функций $\nu_{ik}(Q_i), i \in \{X, Y\}, k = 1, ..., N$ записываются в виде:

$$d\nu_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \nu_{ik}}{\partial Q_{i\nu}} dQ_{i\nu} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{d\nu_{Xk}}{dt} = -\sum\limits_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \nu_{Xk}}{\partial Q_{X\nu}} q_{XY}(\varphi_{XY}) \\ \\ \frac{d\nu_{Yk}}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \nu_{Yk}}{\partial Q_{Y\nu}} q_{XY}(\varphi_{XY}). \end{cases} \tag{29}$$

Вычитая уравнения для подсистемы X из уравнений для подсистемы Y с учетом линейной зависимости потоков от движущих сил (22) и того, что

$$\frac{d\varphi_{XY}}{dt} = \frac{d\nu_Y}{dt} - \frac{d\nu_X}{dt},$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{d\nu_X}{dt} = -\mathcal{H}_{SX} A \varphi_{XY} \\ \\ \frac{d\nu_Y}{dt} = \mathcal{H}_{SY} A \varphi_{XY} \end{cases} \Longrightarrow \frac{d\varphi_{XY}}{dt} = (\mathcal{H}_{SX} + \mathcal{H}_{SY}) A \varphi_{XY}. \tag{30}$$

Уравнение (30) вместе с начальными условиями определяет траекторию процесса ресурсообмена. Отметим, что несмотря на то, что матрицы Гессе для подсистем X и Y и матрица инфраструктурных коэффициентов симметричны, $\mathcal{H}_{SX} + \mathcal{H}_{SY}$ и A могут не коммутировать друг с другом, поэтому их произведение может быть не симметрической матрицей. □

Математическая модель макросистемы в виде фрактального графа позволяет вывести феноменологические закономерности макросистем, не основываясь на свойствах элементарных объектов, формирующих макросистему. Это обобщает понятие макросистемы на совокупность взаимодействующих систем произвольной природы. Показано, что на множестве стационарных процессов можно ввести метрику; метрическими свойствами обладает производство энтропии в макросистеме.

Заключение

Фрактальная модель макросистемы позволяет вывести ее свойства и определить ее состояние на основе рекуррентного подхода (состояние макросистемы, состоящей из большого количества подсистем, описывается суммой значений векторов экстенсивных параметров подсистем при неизменном уравнении состояния), не описывая процессы взаимодействия на уровне элементарных объектов (раздел 1). Скорость изменения экстенсивных величин – это интенсивность процессов, локализуемых на границах подсистем, зависит от движущих сил, которые определяются разностью интенсивных переменных взаимодействующих подсистем. В свою очередь, интенсивные переменные определяются из уравнения состояния макросистемы, связывающего экстенсивные переменные. Свойства экстенсивных и интенсивных характеристик макросистем рассмотрены в разделе 2. Самопроизвольные процессы протекают в направлении увеличения энтропии подсистемы, а скорость увеличения энтропии всей системы (производство энтропии) является метрикой в пространстве стационарных процессов (доказательство метрических свойств приведено в разделе 3).

Модель макросистем, основанная на их фрактальных свойствах, может быть использована при анализе больших систем физической природы, например, многоконтурных одно- и двухфазных систем охлаждения, информационных систем, таких как рекомендательные системы, систем обработки больших данных, систем человеко-машинного взаимодействия при принятии решений, систем обучения и иных типов обмена семантической информацией в реальном и виртуальном типах пространства. Стационарные процессы в макросистемах любой природы могут быть описаны в рамках представленного подхода, что особенно актуально для сложных иерархических систем, включающих физические, экономические, социальные и информационные аспекты своего функционирования и развития.

Список литературы

[1] Corr P., Plagnol A. *Behavioral Economics: The Basics.*– Taylor & Francis.– 2019.– ISBN 978-1138228917.– 266 pp. ↑42

[2] Schor J. B. *What's wrong with consumer society? // Consuming Desires: Consumption, Culture, and the Pursuit of Happiness*, ed. R. Rosenblatt, Washington: Island Press.– 1999.– ISBN 978-1559635356.– Pp. 37–50. URL ↑42

[3] Simon H. A. *Bounded rationality // Utility and Probability*, The New Palgrave, eds. J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, London: Palgrave Macmillan.– 1990.– ISBN 978-0-333-49541-4.– Pp. 15–18. doi ↑42

[4] Nordli S., Todd P. *Ecological rationality: Bounded rationality in an evolutionary light // Routledge Handbook of Bounded Rationality*, Routledge International Handbooks, ed. R. Viale, London: Routledge.– 2020.– ISBN 9780367563943.– Pp. 313–323. ↑42

[5] Lyons B. J., Scott B. A. *Integrating social exchange and affective explanations for the receipt of help and harm: A social network approach* // Organ. Behav. Hum. Decis. Processes.– 2012.– Vol. **117**.– No. 1.– Pp. 66–79. doi ↑42

[6] Bronfenbrenner U. *The Ecology of Human Development. Experiments by Nature and Design.*– London: Harvard University Press.– 1979.– ISBN 9780674224575.– 330 pp. ↑42

[7] Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G. *Ψ-model of micro- and macrosystems.*– 2016.– 44 pp. arXiv 1701.00469 [physics.gen-ph] ↑43

[8] Пьетронеро Л., Тозатти Э. (ред.) *Фракталы в физике*, Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 июля, 1985).– М.: Мир.– 1988.– ISBN 5-03-001295-8.– 672 с. ↑43

[9] Розоноэр Л. И. *Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход). I* // Автомат. и телемех.– 1973.– № 5.– С. 115–132. ↑44

[10] Цирлин А. М. *Методы оптимизации в необратимой термодинамике и микроэкономике.*– М.: Физматлит.– 2003.– ISBN 978-5-9221-0265-0.– 416 с. ↑44

[11] Амелькин С. А., Логунова Н. Ю. *Иерархические макросистемы как модели технологических бизнес-процессов в пищевой промышленности* // Хранение и переработка сельхозсырья.– 2018.– № 4.– С. 84–91. URL ↑44

[12] Попков Ю. С. *Макросистемные модели пространственной экономики.*– М.: Ленанд.– 2015.– ISBN 978-5-9710-2052-3.– 240 с. ↑44

[13] Поплавский Р. П. *Термодинамика информационных процессов.*– М.: URSS.– 2021.– ISBN 978-5-9710-8976-6.– 255 с. ↑44

[14] Гусаренко С. В. *Когнитивно-семантические структуры дискурса: системное взаимодействие и семантическая энтропия.*– Флинта.– 2021.– ISBN 978-5-9765-4407-9.– 356 с. ↑44

[15] Иванова О. С., Амелькин С. А. *Экономическая эффективность продажи программного обеспечения при наличии пиратского рынка* // Программные системы: теория и приложения.– 2014.– Т. **5**.– № 5.– С. 45–54. URL ↑44

[16] Berry R. S., Kasakov V. A., Sieniutycz S., Szwast Z., Tsirlin A. M. *Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes.*– Chichester: Wiley.– 1999.– ISBN 978-0-471-96752-1.– 450 pp. ↑44

[17] Пригожин И., Кондепуди Д. *Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур.*– М.: Мир.– 2002.– ISBN 5-03-003538-9.– 462 с. ↑51

[18] Лежнин С. И. *Термодинамические процессы.*– Новосибирск: Изд-во НГУ.– 2010.– 112 с. URL ↑52

[19] Конвей Дж. *Квадратичные формы, данные нам в ощущениях.*– М.: МЦНМО.– 2008.– ISBN 978-5-94057-268-8.– 144 с. ↑55

[20] Цирлин А. М. *Процессы минимальной диссипации в необратимой термодинамике.*– М.: URSS.– 2022.– ISBN 978-5-507-44649-0.– 400 с. ↑56

[21] Martinás K. *Thermodynamics and sustainability a new approach by extropy* // Periodica Polytechnica: Chemical Engineering.– 1998.– Vol. **42**.– No. 1.– Pp. 69–83. URL ↑56

Поступила в редакцию 07.12.2023;
одобрена после рецензирования 27.12.2023;
принята к публикации 28.12.2023;
опубликована онлайн 21.03.2024.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Информация об авторе:

Сергей Анатольевич Амелькин

к.т.н., ст.научн.сотр. Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН. Доцент кафедры информатики и системного анализа института Экономики, математики и информационных технологий Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

iD 0000-0002-4004-7159

e-mail: *amelkin@ist.education*

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS ISSN 2079-3316

Research Article MATHEMATICAL MODELING

UDC 536.757

10.25209/2079-3316-2024-15-1-41-62

Fractal model of macrosystems

Sergej Anatolyevich **Amelkin**

The Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

Abstract. A mathematical model of a macrosystem of arbitrary nature in the form of a fractal graph is considered. This representation allows one to obtain phenomenological dependencies of macrosystems without being based on the properties of elementary objects that form the macrosystem. It is shown that a metric can be introduced on a set of stationary processes; the entropy production in the macrosystem has metric properties. (*In Russian*).

Key words and phrases: Macrosystem, entropy production, minimal dissipation processes

2020 *Mathematics Subject Classification*: 28A80; 28D20, 82B35

Acknowledgments: The study was supported by *Russian Science Foundation grant No. 23-21-00173*

For citation: Sergej A. Amelkin. *Fractal model of macrosystems*. Program Systems: Theory and Applications, 2024, **15**:1(60), pp. 41–62. (*In Russ.*). https://psta.psiras.ru/read/psta2024_1_41-62.pdf

References

[1] P. Corr, A. Plagnol. *Behavioral Economics: The Basics*, Taylor & Francis, 2019, ISBN 978-1138228917, 266 pp.

[2] J. B. Schor. "What's wrong with consumer society?", *Consuming Desires: Consumption, Culture, and the Pursuit of Happiness*, ed. R. Rosenblatt, Island Press, Washington, 1999, ISBN 978-1559635356, pp. 37–50. URL

[3] H. A. Simon. "Bounded rationality", *Utility and Probability*, The New Palgrave, eds. J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, Palgrave Macmillan, London, 1990, ISBN 978-0-333-49541-4, pp. 15–18. doi

[4] S. Nordli, P. Todd. "Ecological rationality: Bounded rationality in an evolutionary light", *Routledge Handbook of Bounded Rationality*, Routledge International Handbooks, ed. R. Viale, Routledge, London, 2020, ISBN 9780367563943, pp. 313–323.

[5] B. J. Lyons, B. A. Scott. "Integrating social exchange and affective explanations for the receipt of help and harm: A social network approach", *Organ. Behav. Hum. Decis. Processes*, **117**:1 (2012), pp. 66–79. doi

[6] U. Bronfenbrenner. *The Ecology of Human Development. Experiments by Nature and Design*, Harvard University Press, London, 1979, ISBN 9780674224575, 330 pp.

[7] E. E. Perepelkin, B. I. Sadovnikov, N. G. Inozemtseva. *Ψ-model of micro- and macrosystems*, 2016, 44 pp. arXiv 1701.00469 [physics.gen-ph]

[8] (MCTF, Triest, Italiya, 9-12 iyulya, 1985), 1988, 672 pp.; L. Pietronero, Tozatti (eds.) E.. *Fractals in Physics: Proceedings of the Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics, ICTP, Trieste, Italy, July 9-12, 1985*, Trudy VI mezhdunarodnogo simpoziuma po fraktalam v fizike, North-Holland, Amsterdam, ISBN 5-03-001295-8

[9] L. I. Rozonoer. "Resource Exchange and Allocation (A Generalized Thermodynamic Approach). I", *Avtomat. i telemex.*, 1973, no. 5, pp. 115–132 (in Russian).

[10] A. M. Cirlin. *Optimization 'ethods in Shrreversible Ehermodynamics and 'icroeconomics*, Fizmatlit, M., 2003, ISBN 978-5-9221-0265-0 (in Russian), 416 pp.

[11] Amel'kin S. A. , N. Yu. Logunova. "Hierarchical macrosystems as models of technological business processes in the food industry", *Xranenie i pererabotka sel'xozsyr'ya*, 2018, no. 4, pp. 84–91 (in Russian). URL

[12] Yu. S. Popkov. *Macrosystem Models of Spatial Economics*, Lenand, 2015, ISBN 978-5-9710-2052-3 (in Russian), 240 pp.

[13] R. P. Poplavskij. *Thermodynamics of Information Processes*, Nauka, M., 1981, ISBN 978-5-9710-8976-6 (in Russian), 255 pp.

[14] S. V. Gusarenko. *Cognitive-Semantic Structures of Discourse: System Interaction and Semantic Entropy*, SKFU, Stavropol', 2017, ISBN 978-5-9765-4407-9 (in Russian), 366 pp.

[15] O. S. Ivanova, S. A. Amel'kin. "Economic efficiency of software sales in the presence of pirate market", *Program Systems: Theory and Applications*, **5**:5 (2014), pp. 45–54 (in Russian).

[16] R. S. Berry, V. A. Kasakov, S. Sieniutycz, Z. Szwast, A. M. Tsirlin. *Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes*, Wiley, Chichester, 1999, ISBN 978-0-471-96752-1, 450 pp.

[17] D. Kondepudi, I. Prigogine. *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures*, John Wiley & Sons, Ltd 10.1002/9781118698723, 2014, ISBN 9781118698723, 523 pp.

[18] S. I. Lezhnin. *Thermodynamic Processes*, Izd-vo NGU, Novosibirsk, 2010, 112 pp.

[19] H. J. Conway. *The Sensual Quadratic Form*, Carus Mathematical Monographs, vol. **26**, Mathematical Association of America, 1967, ISBN 088385-030-3, 167 pp.

[20] A. M. Cirlin. *Processes of Minimal Dissipation in Irreversible Thermodynamics*, URSS, M., 2022, ISBN 978-5-507-44649-0 (in Russian), 400 pp.

[21] K. Martinás. "Thermodynamics and sustainability a new approach by extropy", *Periodica Polytechnica: Chemical Engineering*, **42**:1 (1998), pp. 69–83.