УДК 517.977.5
10.25209/2079-3316-2024-15-4-43-54

Эвристический алгоритм для одной нелинейной задачи оптимального управления

Нашему учителю, профессору В. И. Гурману к 90-летию со дня рождения

Ирина Викторовна **Расина**[1✉], Ирина Сергеевна **Гусева**[2]
[1] Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Веськово, Россия
[2] Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия
[1✉] *irinarasina@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления для одного из вариантов квазилинейной системы. Для ее решения используется идея профессора В. И. Гурмана, предложившего сочетать два варианта принципа расширения. Один из них, традиционный подход Кротова, а второй - метод штрафных функций. Выбранный класс систем позволяет провести аналитическое исследование лагранжиана Кротова, что в свою очередь приводит к формулировке алгоритма. Полученный алгоритм апробирован на двух иллюстративных примерах, для которых построены минимизирующие последовательности. Трудоемкость расчетов сопоставима с методами, основанными на традиционном принципе расширения. Результаты расчетов проиллюстрированы таблицами и графиками.

Ключевые слова и фразы: достаточные условия оптимальности Кротова, принцип расширения, квазилинейные системы

Для цитирования: Расина И. В., Гусева И. С. *Эвристический алгоритм для одной нелинейной задачи оптимального управления* // Программные системы: теория и приложения. 2024. **Т. 15**. № 4(63). С. 43–54. `https://psta.psiras.ru/read/psta2024_4_43-54.pdf`

Введение

В самом общем виде задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется некоторое множество $\mathbf{D}$ с элементами

z, которые будем называть допустимыми. На этом множестве задан функционал $I(z)$. Требуется найти последовательность элементов z_s из $\mathbf{D}$, на которой функционал $I(z)$ стремится к своей нижней грани на $\mathbf{D}$, т.е. $I(z_s) \to \inf I, z \in \mathbf{D}$. Другими словами, речь идёт о поиске минимизирующей последовательности. Саму задачу для краткости будем обозначать $(I, \mathbf{D})$. При конкретизации каждой составляющей этой задачи будет получаться определенный класс задач оптимизации, такой как линейное или нелинейное программирование, оптимальное управление непрерывными или дискретными системами и т.д.

Существуют самые разнообразные подходы к решению конкретной задачи $(I, \mathbf{D})$. Одним из таких подходов является принцип расширения. Его суть состоит в переходе от исходной задачи к эквивалентной $(L, \mathbf{E})$, где функционал L есть модификация функционала I, определённая на более широком множестве $\mathbf{E}$, включающем в себя $\mathbf{D}$. Идея принципа расширения и первая его реализация принадлежит Лагранжу при решении задачи на условный экстремум. В роли функционала I фигурировала функция многих переменных, а в роли множества $\mathbf{D}$ — система равенств, состоящая из функций многих переменных. Минимизирующая последовательность должна была состоять из элементов, удовлетворяющих этой системе равенств. Лагранж предложил заменить исходную функцию некой конструкцией L, включающей в себя дополнительные слагаемые. Каждое из них представляло собой произведение одного из равенств на некоторый множитель. Тогда множество $\mathbf{E}$ совпадало с областью определения заданной функции, и на исходном множестве I и L совпадали. Конструкция L в дальнейшем получила название функции Лагранжа, а дополнительные множители стали множителями Лагранжа [1].

Эта идея была реализована В. Ф. Кротовым для задач оптимального управления непрерывными и дискретными системами [2]. Как и у Лагранжа, производилось преобразование исходного функционала с помощью дополнительных конструкций, учитывающих ограничения на переменные состояния и управления. Вместо множителей Лагранжа фигурировала уже некая функция (функция Кротова). Позднее этот результат был распространен на дискретно-непрерывные системы и неоднородные дискретные системы [3, 4]. Все указанные преобразования задачи $(I, \mathbf{D})$ к задаче $(L, \mathbf{E})$ производились по алгоритму предложенному В. Ф. Кротовым. Однако позднее В. И. Гурман высказал идею иного преобразования I в L по аналогии с методом штрафов и реализовал её на простом примере [5].

В данной работе схема, предложенная в [5], использована для класса квазилинейных систем. Изложена методика преобразования, получаемый при этом алгоритм и иллюстративный пример. Для рассматриваемой в статье задачи далее используется эвристический прием аналогичный подходу SDRE [6].

Ниже рассматривается комбинация двух вариантов принципа расширения: сочетание расширения, предложенного Кротовым с расширением с использованием штрафных функций. Изложенный подход успешно реализуем для частных случаев управляемых систем: систем, близких к линейным, билинейных, линейно-квадратических с управляемыми коэффициентами и т.д., где возможны аналитические преобразования лагранжиана Кротова. Непосредственно в работе рассматриваются квазилинейные системы. В самом общем случае схема становится слишком громоздкой, трудно реализуемой и малоэффективной.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u, \quad t \in \mathbf{T} = [t_I, t_F], \tag{1}$$

где A, B — матрицы размеров $n \times n$, $n \times r$ соответственно,

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r,$$

ε — параметр, $\varepsilon \in (0, 1]$. Для модели (1) ставится задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbf{T}} \big(x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T S(x,\varepsilon)u\big)\, dt + N x_F + \frac{1}{2} x_F^T \Lambda x_F \tag{2}$$

при начальном состоянии $x(t_I) = x^0$. Здесь Q, S — заданные матрицы размера $n \times n$, $r \times r$ соответственно, $Q \geq 0$, $S > 0$, Λ — симметрическая, положительно определенная матрица размера $n \times n$, N — вектор размера n.

2. Преобразование задачи и поиск решения

Преобразуем задачу, используя вариант расширения класса допустимых, предложенный В. И. Гурманом в [5], при этом будем предполагать, что все объекты обладают необходимыми для преобразований свойствами. Всё дальнейшее исследование проводится в предположении, что матрицы A, B, Q, S не зависят от x, что и определяет эвристический характер получаемого алгоритма.

Введём в рассмотрение ещё одно уравнение $\dot{x} = v$, где v можно рассматривать как новое неограниченное управление. С учётом этого функционал представим в виде:

$$L_\alpha = \alpha \int\limits_{\mathbf{T}} (v - A(x,\varepsilon)x - B(x,\varepsilon)u)^T (v - A(x,\varepsilon)x - B(x,\varepsilon)u)dt +$$
$$+ (1-\alpha)\left(\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbf{T}} (x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T S(x,\varepsilon)u)dt + Nx_F + \frac{1}{2}x_F^T \Lambda x_F \right).$$

Здесь α — весовой коэффициент, $\alpha \in [0,1]$, а первое подынтегральное выражение — штраф за невыполнение уравнения связи. Следует заметить, что при α стремящемся к нулю все компоненты вектора v стремятся в бесконечность, т. е. по сути выполняют роль штрафных функций.

Воспользуемся далее конструкциями достаточных условий оптимальности Кротова [2]. Лагранжиан Кротова с использованием конструкций достаточных условий оптимальности этого же автора имеет вид:

$$\tilde{L}_\alpha = G - \int\limits_{\mathbf{T}} R_\alpha dt,$$

где

$$G = (1-\alpha)F(t_F, x_F) + \varphi(t_F, x_F) - \varphi(t_I, x_I), \quad x_F = x(t_F), \quad x_I = x(t_I),$$

$$R_\alpha = \varphi_x^T v - \alpha(v - A(x,\varepsilon)x - B(x,\varepsilon)u)^T (v - A(x,\varepsilon)x - B(x,\varepsilon)u) -$$
$$- \frac{1}{2}(1-\alpha)(x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T S(x,\varepsilon)u) + \varphi_t.$$

Здесь $\varphi(t,x)$ — функция Кротова; $F(t_F, x_F) = Nx_F + \frac{1}{2}x_F^T \Lambda x_F$. Заметим, что максимум функции R_α равен либо нулю, либо const и она зависит от управления v квадратичным образом, найдём её максимум по этой переменной. Имеем:

$$R_{\alpha v} = \varphi_x - 2\alpha(v - A(x,\varepsilon)x - B(x,\varepsilon)u) = 0.$$

Откуда

$$\bar{v} = \frac{1}{2\alpha}\varphi_x + A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u.$$

Подставим найденное выражение для v в функцию R_α и выполним необходимые преобразования, обозначим результат как P_α.

$$P_\alpha = \varphi_x(A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u) + \frac{1}{4\alpha}(\varphi_x)^2 -$$
$$- \frac{1}{2}(1-\alpha)(x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T S(x,\varepsilon)u) + \varphi_t = \mathrm{const}\,.$$

В свою очередь, полученная конструкция зависит от управления u также квадратичным образом. Из необходимых условий экстремума следует, что управление, доставляющее максимум функции P_α, имеет вид:

$$\bar{u} = \frac{1}{1-\alpha} S^{-1} B^T \varphi_x. \tag{3}$$

Подставив это выражение в функцию P_α и выполнив необходимые преобразования, будем иметь:

$$M_\alpha = P_\alpha(\bar{u}) = A^T \varphi_x x + \frac{1}{2(1-\alpha)} \varphi_x^T B S^{-1} B^T \varphi_x + \\ + \frac{1}{4\alpha}(\varphi_x)^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha) x^T Q x + \varphi_t = \mathrm{const}\,.$$

Зададим функцию $\varphi(t,x)$ в виде $\varphi(t,x) = \psi^T(t)x + \frac{1}{2}x^T\sigma(t)x$, где ψ — вектор размера n, а σ — симметрическая матрица размера $n \times n$.

С учётом этого,

$$M_\alpha = A^T\psi x + \frac{1}{2}x^T\sigma A x + \frac{1}{2}x^T A^T \sigma x + \frac{1}{2(1-\alpha)}\big(\psi^T B S^{-1} B^T \psi + \\ + \psi^T B S^{-1} B^T \sigma x + x^T \sigma B S^{-1} B^T \psi + x^T \sigma B S^{-1} B^T \sigma x\big) + \\ + \frac{1}{4\alpha}\big(\psi^T\psi + \psi^T \sigma x + x^T \sigma \psi + x^T \sigma E \sigma x\big) - \\ - \frac{1}{2}(1-\alpha) x^T Q x + \dot{\psi}^T x + \frac{1}{2} x^T \dot{\sigma} x = \mathrm{const}\,.$$

Потребуем теперь, чтобы последнее выражение не зависело от состояния процесса. В итоге получим уравнения для нахождения вектора ψ и матрицы σ. Итак,

$$\dot{\psi} = -A^T\psi - \frac{1}{2(1-\alpha)}(\psi^T B S^{-1} B^T \sigma + \sigma B S^{-1} B^T \psi) - \\ - \frac{1}{4\alpha}(\psi^T\sigma + \sigma\psi), \tag{4}$$

$$\dot{\sigma} = -\sigma A - A^T \sigma - \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}\sigma(2\alpha B S^{-1} B^T + \\ + (1-\alpha)E)\sigma + (1-\alpha)Q. \tag{5}$$

Значения $\psi(t_F) = -(1-\alpha)N$, $\sigma(t_F) = -(1-\alpha)\Lambda$. Следует заметить, что для матрицы σ получено дифференциальное уравнение типа Риккати. С учётом полученных для ψ и σ уравнений, выражение для M_α принимает вид:

$$M_\alpha = \frac{1}{4\alpha(1-\alpha)}\psi^T(2\alpha B S^{-1} B^T + (1-\alpha)E)\psi.$$

В последнем выражении от параметра ε зависят матрицы B и S^{-1}. Максимум этого выражения даст новое значение параметра.

Для поиска параметра ε может быть использован градиентный метод и его разнообразные модификации. В частных случаях возможно аналитическое исследование выражения M_α и получение формулы для нового значения параметра.

3. Алгоритм

(1) Задаются начальное управление u^{I} и значение параметра ε^{I}.

(2) Решается исходная система уравнений (1), в результате находится траектория x^{I}.

(3) Справа налево интегрируется система (4) для вектора ψ и система (5) для матрицы σ.

(4) Находится новое управление $\bar{u}$ по формуле (3) и параметр ε.

(5) Переход к пункту 2.

Критерий окончания расчётов: разность между значениями функционала на соседних итерациях меньше заранее заданной точности вычислений.

4. Пример 1

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x} = (\varepsilon x)^2 - \varepsilon\sqrt{x}u, \quad x(0) = 1, \quad I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \varepsilon^2(x^2 + xu^2)dt + x(1).$$

Здесь $A = \varepsilon^2 x$, $B = -\varepsilon\sqrt{x}$, $Q = \varepsilon^2$, $S = \varepsilon^2 x$, $N = 1$, $\Lambda = 0$. Основные формулы алгоритма имеют вид:

$$\bar{u} = \frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon\sqrt{x}}(\psi + \sigma x),$$

$$\dot{\psi} = -\varepsilon^2 x\psi - \frac{1+\alpha}{2\alpha(1-\alpha)}\psi\sigma, \qquad \psi(1) = \alpha - 1,$$

$$\dot{\sigma} = -2\varepsilon^2 x\sigma - \frac{1+\alpha}{2\alpha(1-\alpha)}\sigma^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2, \qquad \sigma(1) = 0,$$

$$M_\alpha = \frac{1+\alpha}{4\alpha(1-\alpha)}\psi^2.$$

На начальной итерации $\varepsilon^{\mathrm{I}} = 1$, $u^{\mathrm{I}} = 2$.

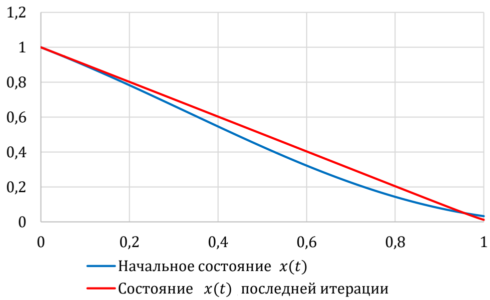
В таблице 1 представлено изменение функционала по итерациям при различных значениях параметра α.

На решение примера потребовалось 6 итераций. При этом значение функционала с $I^0 = 1.1044$ уменьшилось до $I^6 = 0.8590; 0.5366; 0.5020$ при

Таблица 1. Изменение значений функционала при различных значениях α по итерациям, $R^k = |I^k - I^{k-1}|$

	$\alpha = 0.3$			$\alpha = 0.6$			$\alpha = 0.9$		
k	ε^k	I^k	R^k	ε^k	I^k	R^k	ε^k	I^k	R^k
0	1	1.1044		1	1.1044		1	1.1044	
1	0.7588	0.9422	0.1622	0.2669	0.6944	0.4100	0.0528	0.8925	0.2119
2	0.7695	0.8637	0.0785	0.2738	0.5626	0.1318	0.0529	0.5392	0.3533
3	0.7644	0.8626	0.0011	0.2675	0.5429	0.0197	0.0528	0.5107	0.0285
4	0.7628	0.8599	0.0027	0.2668	0.5386	0.0043	0.0528	0.5046	0.0061
5	0.7624	0.8592	0.0007	0.2667	0.5372	0.0014	0.0528	0.5027	0.0019
6	0.7622	0.8590	0.0002	0.2666	0.5366	0.0006	0.0528	0.5020	0.0007

$\alpha = 0.3; 0.6; 0.9$ соответственно. Графики управляющего воздействия и состояния процесса на первой и последней итерациях при $\alpha = 0.6$ даны на рисунке 1.



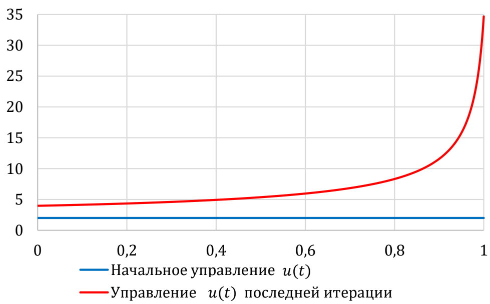


Рисунок 1. Графики состояния $x(t)$ и управляющего воздействия $u(t)$ по итерациям при $\alpha = 0.6$

5. Пример 2

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x} = (\varepsilon x)^2 - \varepsilon \sin(x)u, \quad x(0) = 0.5,$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon^2(x^2\sqrt{x} + (xu)^2)dt - x(1).$$

Здесь $A = \varepsilon^2 x$, $B = -\varepsilon \sin x$, $Q = \varepsilon^2\sqrt{x}$, $S = (\varepsilon x)^2$, $N = -1$, $\Lambda = 0$. Основные формулы алгоритма имеют вид:

$$\bar{u} = \frac{\sin x}{(\alpha - 1)\varepsilon x^2}(\psi + \sigma x),$$

$$\dot{\psi} = -\varepsilon^2 x\psi - \left(\frac{\sin^2 x}{(1-\alpha)x^2} + \frac{1}{2\alpha}\right)\psi\sigma, \qquad \psi(1) = 1 - \alpha,$$

$$\dot{\sigma} = -2\varepsilon^2 x\sigma - \left(\frac{\sin^2 x}{(1-\alpha)x^2} + \frac{1}{2\alpha}\right)\sigma^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2\sqrt{x}, \quad \sigma(1) = 0,$$

$$M_\alpha = \frac{1}{4\alpha(1-\alpha)}\left(2\alpha\frac{\sin^2 x}{x^2} + 1 - \alpha\right)\psi^2.$$

На начальной итерации $\varepsilon^{\mathrm{I}} = 0.7$, $u^{\mathrm{I}} = -0.5$. В таблице 2 обозначим $R^k = |I^k - I^{k-1}|$. В этой таблице представлено изменение функционала

Таблица 2. Изменение значений функционала по итерациям при различных значениях α

	$\alpha = 0.4$			$\alpha = 0.6$		
k	ε^k	I^k	R^k	ε^k	I^k	R^k
0	0.7	−0.8328		0.7	−0.8328	
1	0.5888	−0.9632	0.1304	0.2583	−0.8668	0.0340
2	0.6022	−1.0268	0.0636	0.2621	−0.8973	0.0305
3	0.5998	−1.0272	0.0004	0.2624	−0.9018	0.0045
4	0.6004	−1.0273	0.0001	0.2620	−0.9007	0.0011
5				0.2619	−0.9006	0.0001

по итерациям с $I^0 = -0.8328$ до $I^4 = -1.0273$ и $I^5 = -0.9006$ при значениях параметра $\alpha = 0.4$ и 0.6 соответственно. Графики управляющего воздействия и состояния процесса на первой и последней итерациях при $\alpha = 0.4$ даны на рисунке 2.

Заметим, что минимум функционала в обоих примерах существенно зависит от выбора весового коэффициента α.

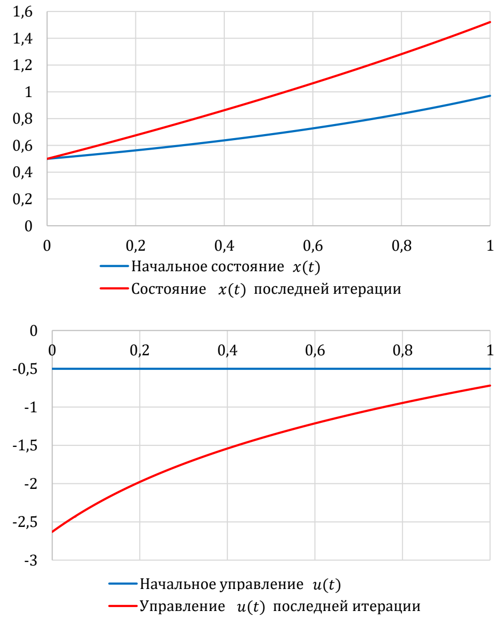


Рисунок 2. Графики состояния $x(t)$ и управляющего воздействия $u(t)$ по итерациям при $\alpha = 0.4$

Заключение

На классе квазилинейных систем рассмотрен еще один вариант реализации принципа расширения, предложенный В. И. Гурманом в [5], сочетающий традиционный подход Кротова [2] и идею использования штрафных функций [1]. Полученный алгоритм апробирован на двух иллюстративных примерах. В результате расчетов построены минимизирующие последовательности. Его трудоемкость по количеству итераций практически не отличается от алгоритма, основанного на традиционном варианте принципа расширения [7], что подтверждает его работоспособность. Область его применения отмечена во введении.

Список использованных источников

[1] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, учебник для вузов, в 3-х томах.– Т. 1.– СПб: Лань.– 2024.– 608 с. ↑44, 51

[2] Кротов В. Ф., Гурман В. И. *Методы и задачи оптимального управления*.– М.: Наука.– 1973.– 448 с. ↑44, 46, 51

[3] Гурман В. И. *К теории оптимальных дискретных процессов* // Автоматика и телемеханика.– 1973.– № 7.– С. 53–58. ↑44

[4] Расина И. В. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*.– М.: Физматлит.– 2014.– 160 с. ↑44

[5] Гурман В. И., Расина И. В., Гусева И. С., Фесько О. В. *Методы приближенного решения задач оптимального управления* // Программные системы: теория и приложения.– 2015.– Т. **6**.– № 4(27).– С. 113–137. ↑44, 45, 51

[6] Çimen T. *Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method* // Annu. Rev. Control..– 2010.– Vol. **34**.– No. 1.– Pp. 32–51. ↑45

[7] Расина И. В., Гусева И. С. *Об одном классе дискретно-непрерывных систем с параметрами* // Программные системы: теория и приложения.– 2023.– Т. **14**.– № 1(56).– С. 125–148. ↑51

Поступила в редакцию	11.09.2024;
одобрена после рецензирования	24.09.2024;
принята к публикации	02.11.2024;
опубликована онлайн	08.11.2024.

Рекомендовал к публикации *д.т.н. А. М. Цирлин*

Информация об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., гл. научн. сотр. Исследовательского центра системного анализа Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН. Специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 130 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968

e-mail: ***irinarasina@gmail.com***

Ирина Сергеевна Гусева

к.ф.-м.н., ст.преп. Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, РФ, респ. Бурятия, г. Улан-Удэ; автор и соавтор более 20 публикаций; область интересов – оптимальное управление, численные методы

0000-0001-8720-3676

e-mail: *gulina.ig@gmail.com*

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Декларация об отсутствии личной заинтересованности: *благополучие авторов не зависит от результатов исследования.*

PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS ISSN 2079-3316
Research Article OPTIMIZATION METHODS AND CONTROL THEORY

UDC 517.977.5
10.25209/2079-3316-2024-15-4-43-54

A heuristic algorithm for one nonlinear optimal control problem

dedicated to our teacher, Professor V. I. Gurman on the 90th anniversary of his birth

Irina Viktorovna **Rasina**[1], Irina Sergeevna **Guseva**[2]

[1] Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia
[2] Buryat State University, Ulan-Ude, Russia
[1]✉ *irinarasina@gmail.com*

Abstract. The optimal control problem for one of the variants of a quasilinear system is considered. To solve it, the idea of Professor V. I. Gurman is used, who proposed to combine two variants of the expansion principle. One of them is the traditional Krotov approach, and the second is the penalty function method. The selected class of systems allows for an analytical study of the Krotov Lagrangian, which in turn leads to the formulation of the algorithm. The resulting algorithm is tested on two illustrative examples, for which minimizing sequences are constructed. The complexity of the calculations is comparable with methods based on the traditional expansion principle. The calculation results are illustrated by tables and graphs. (*In Russian*).

Key words and phrases: sufficient Krotov optimality conditions, the expansion principle, quasi-linear systems

2020 *Mathematics Subject Classification*: 49M25; 49K21, 49N99

For citation: Irina V. Rasina, Irina S. Guseva. *A heuristic algorithm for one nonlinear optimal control problem*. Program Systems: Theory and Applications, 2024, **15**:4(63), pp. 43–54. (*In Russ.*). https://psta.psiras.ru/read/psta2024_4_43-54.pdf

References

[1] G. M. Fixtengol'c. *The Course of Differential and Integral Calculus*, uchebnik dlya vuzov, v 3-x tomax. V. 1, Lan', SPb, 2024 (in Russian), 608 pp.

[2] V. F. Krotov, V. I. Gurman. *Methods and Problems of Optimal Control*, Nauka, M., 1973 (in Russian), 448 pp.

[3] V. I. Gurman. "Theory of optimum discrete processes", *Autom. Remote Control*, **34**:7 (1973), pp. 1082–1087.

[4] I. V. Rasina. *Hierarchical Control Models of Heterogeneous Structure Systems*, Fizmatlit, M., 2014 (in Russian), 160 pp.

[5] V. I. Gurman, I. V. Rasina, I. S. Guseva, O. V. Fes'ko. "Methods for approximate solution of optimal control problems", *Program Systems: Theory and Applications*, **6**:4(27) (2015), pp. 113–137 (in Russian). URL

[6] T. Çimen. "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method", *Annu. Rev. Control.*, **34**:1 (2010), pp. 32–51. doi

[7] I. V. Rasina, I. S. Guseva. "About one class of discrete-continuous systems with parameters", *Program Systems: Theory and Applications*, **14**:1(56) (2023), pp. 125–148 (in Russian). doi URL