


УДК 004.942:535.318

 10.25209/2079-3316-2024-15-4-55-77

Математическое моделирование с учётом ограничений и исследование оптимальной конфигурации оптической стереосистемы, состоящей из двух плоских зеркал и видеокамеры

Дмитрий Николаевич Степанов^{1✉}, Игорь Петрович Тищенко²

^{1,2}Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Вельского, Россия

^{1✉}mitek1989@mail.ru

Аннотация. Статья продолжает серию исследований, посвященных математическому моделированию и оптимизации конфигурации оптической стереосистемы, состоящей из видеокамеры и двух плоских зеркал. В предыдущей работе мы разработали модель, которая учитывает различные ограничения на конфигурацию подобной системы: величина стереобазы, размеры зеркал, общие габариты оптической системы, отсутствие двойного отражения световых лучей, недопущение ситуации, когда видеокамера отражается в зеркалах. Выполнена постановка задачи условной оптимизации, в качестве целевой функции выбран периметр прямоугольника, ограничивающий оптическую систему.

В рамках данной работы мы добавили в модель набор ограничений, которые задают конфигурацию рабочей зоны, она образована пересечением полей зрения двух виртуальных камер. Соответствующие изменения были внесены в программу для численного решения задачи условной оптимизации с использованием пакета SciPy. Продемонстрированы примеры решения задачи для различных исходных данных. Полученные результаты расширяют теорию компьютерного зрения и могут быть использованы в создании и исследовании систем компьютерного зрения для робототехнических комплексов и систем неразрушающего контроля.

Ключевые слова и фразы: машинное зрение, оптические приборы, математическое моделирование, стереозрение, оптимизация, катоптрическая система

Для цитирования: Степанов Д. Н., Тищенко И. П. *Математическое моделирование с учётом ограничений и исследование оптимальной конфигурации оптической стереосистемы, состоящей из двух плоских зеркал и видеокамеры* // Программные системы: теория и приложения. 2024. Т. 15. № 4(63). С. 55–77. https://psta.pstiras.ru/read/psta2024_4_55-77.pdf

Введение

Системы технического зрения в настоящее время широко применяются для решения многих практических задач: неразрушающий контроль качества деталей и материалов, создание 3D-моделей реальных объектов, биометрические системы распознавания, автономные роботы и др. Существует несколько способов восстановления 3D-структуры наблюдаемой сцены.

Первый способ — использование источников лазерного излучения (лидаров) и времяпролетных (ToF-) камер. Принцип их работы основан на измерении времени движения световых лучей. Важнейшее преимущество лидаров и ToF-камер — они позволяют восстановить 3D-структуру наблюдаемой сцены без дополнительных сложных алгоритмов калибровки сенсоров и анализа сенсорных данных. Недостаток: информация о текстуре и цвете объектов сцены недоступна, если дополнительно не используются обычные видеокамеры. Кроме того, стоимость лидаров может быть достаточно высокой.

Второй способ — использование структурированной подсветки: излучатель проецирует на объекты некоторый паттерн известной конфигурации, а видеокамера выполняет съемку подсвеченных объектов. Поскольку конфигурация паттерна и взаимное расположение видеокамеры и излучателя известны, то можно восстановить 3D-координаты точек, на которые попадает паттерн. Подобные решения значительно дешевле лидаров, но требуют наличие алгоритмов детектирования на изображении тех пикселей, на которые попала подсветка. В условиях неконтролируемого освещения эта задача может быть нетривиальной. Кроме того, могут быть восстановлены 3D-координаты только тех точек, на которые попала подсветка, т.е. получить так называемое плотное стерео (dense stereo) становится затруднительным.

Если первые два способа относятся к так называемому активному стереозрению, то третий способ — к пассивному. Он основан на съемке сцены несколькими фото- или видеокамерами с разных ракурсов. Если объекты неподвижны, то также может использоваться вариант, когда одна камера выполняет снимки с разных ракурсов (англ. structure from motion — структура из движения). Подобные решения дешевле лидаров, сохраняют информацию о текстуре и цвете объектов, менее требовательны к освещению, по сравнению с решениями на основе

структурированной подсветки. Пассивное стереозрение более скрытно, поскольку использование активных систем может быть обнаружено сторонним наблюдателем. Кроме того, видеокамеры имеют обычно более высокое быстродействие (FPS, Frames per Second — количество кадров в секунду), чем лидары и ToF-камеры.

Работа многокамерных систем основана на решении задачи стереосопоставления (stereo correspondence problem): поиск соответствия между пикселями изображений, выполненных с разных ракурсов. И здесь, конечно, следует заметить, что данная задача является одной из самых сложных в компьютерном зрении и не имеет универсального алгоритма ее решения.

Для восстановления 3D-структуры сцены также используются катадиоптрические системы, в состав которых входят видеокамера и комбинация преломляющих и отражающих элементов. На одной светочувствительной матрице создается сразу несколько изображений. Проблема стереосопоставления остается актуальной, но для получения стереоснимков достаточно одной видеокамеры. Следствие этого факта: уменьшение общей стоимости элементов оптической системы и отсутствие в необходимости синхронизации камер.

Пример задачи, в которой использование подобных оптических систем являются фактически единственным возможным вариантом: измерение уровня вибрации на рабочих поверхностях приборов для воспроизведения звука. Такая задача исследуется, к примеру, в статье [1]. В этой задаче необходимо построить 3D-модель вибрирующей поверхности, и стереозрение имеет ряд преимуществ перед другими способами решения задачи: возможность проводить измерения по всему рабочему полю и низкая чувствительность к окружающему акустическому шуму. Но возникает необходимость использования высокоскоростных камер, которые достаточно дороги. Однако, при использовании системы зеркал и единственной камеры общая стоимость всей системы радикально уменьшается.

Если присутствуют только преломляющие элементы, то такая система называется диоптрической, а если только отражающие элементы, то катоптрической. Диоптрические системы исследуются, к примеру, в работах [2, 3], в данном случае используются призмы. Катоптрические системы разделяются по типу используемых зеркал, плоских или криволинейных.

С криволинейными зеркалами можно добиться более широких углов обзора, но более заметными становятся геометрические искажения, особенно по краям зеркал. Данная работа является продолжением наших исследований катоптрических систем с плоскими зеркалами, результаты предыдущих исследований изложены в статьях [4–6]. В статье [6] изложен аналитический обзор публикаций подобных оптических систем, здесь мы ограничимся его краткой версией.

Системы, в которых только одно плоское зеркало, наиболее простые [7], но имеют малый угол обзора, для решения этой проблемы зеркало делают подвижным [8–10]. В работе [11] предложена математическая модель формирования изображений в системе из камеры и одного зеркала (плоского, конического, сферического, параболического, эллиптического или гиперболического), авторы выполнили оценку пространственного разрешения оптических систем и оценку уровня размытия, вызванного расфокусировкой. В качестве примеров работ по математическому моделированию трехзеркальных систем можно привести статьи [7, 12–14].

В трехзеркальных системах на одну часть фотоматрицы проецируются лучи, отразившиеся от одного зеркала, а на другую часть матрицы — отразившиеся от двух других зеркал. На таком принципе основана и оптическая система, которая исследовалась, например, в статьях [15, 16]: 9 зеркал организованы в виде двух пирамид, расположенных друг напротив друга. Четырехзеркальные системы исследовались, к примеру, в статьях [17–22]. Отдельно можно выделить работы, посвященные созданию панорамных стереоизображений с использованием множества зеркал [23, 24]. Наконец, имеются работы (например, [25]), в которых описываются катадиоптрические системы, содержащие и зеркала, и преломляющие элементы: например, два плоских зеркала и дихроичный фильтр.

Данная работа посвящена двухзеркальным системам. Хотя имеется достаточно много статей по таким системам, нужно заметить, что в части работ принимается ряд допущений, сужающих область применения предложенных математических моделей. Например, в работе [26] одно из зеркал располагается параллельно плоскости изображения камеры, а в работе [27] зеркала располагаются симметрично относительно оптической оси камеры.

Однако рассматриваются и более общие случаи. Так в статьях [28, 29] выведены уравнения эпиллярных ограничений, предложен алгоритм

вычисления фокальной длины системы линз, вычислен угол обзора стереосистемы. В работе [30] описана система из двух плоских зеркал и RGB-D камеры, два зеркала позволяют следить за обстановкой перед мобильным роботом и за ним. В статье [31] предложен алгоритм вычисления угла между зеркалами и вычисления фундаментальных матриц, связывающих положения и ориентации камеры относительно зеркал. На основе двух или трех зеркал можно построить калейдоскопическую систему, таким системам посвящены, к примеру, работы [32, 33].

Обзор показал, что в существующих математических моделях катоптрических систем с плоскими зеркалами используется небольшое количество параметров: в частности, для двухзеркальных — чаще всего только угол обзора и размер стереобазы. Но практически не затрагиваются следующие аспекты:

- реальные образцы оптических систем имеют определенные габариты и массу, и могут быть ограничения на максимально возможные размеры оптической системы. Например, на беспилотный летательный аппарат или на подвижный робототехнический комплекс невозможно поставить слишком большую катоптрическую систему.
- может иметь место проблема двойного отражения. Если в одном зеркале отражается другое зеркало, то в результате на изображении появятся неинформативные области.
- в зеркалах могут отражаться области, наблюдение которых следует избегать. Например, в зеркалах может отражаться видеокамера или элементы конструкции, которые входят в оптическую систему.
- рабочая зона двухзеркальной оптической системы образована пересечением полей зрения двух виртуальных камер. Восстановить 3D-координаты можно только для тех объектов, которые попали в эту зону. В наиболее простых случаях рабочая зона имеет форму треугольника, один из его углов и будет углом обзора оптической системы. Но какова будет конфигурация рабочей зоны при различных расположениях зеркал относительно видеокамеры — эта проблема своего всестороннего анализа пока не получила.

В нашей предыдущей работе [6] была предложена математическая модель катоптрической системы с двумя плоскими зеркалами, в которую входит величина стереобазы, размеры зеркал, учитывается возможность двойного отражения, возможность отражения в зеркалах видеокамеры, а также учитываются общие габариты оптической системы. Выполнена

постановка задачи условной оптимизации, которая позволяет найти конфигурацию оптической системы с заданными характеристиками и минимальными размерами.

В настоящей работе мы исследуем конфигурацию рабочей зоны оптической системы в зависимости от положения зеркал и дополним оптимизационную задачу еще одним набором ограничений, которые задают размеры этой зоны.

1. Полученные ранее результаты

На рисунке 1 приведена иллюстрация модели оптической стереосистемы

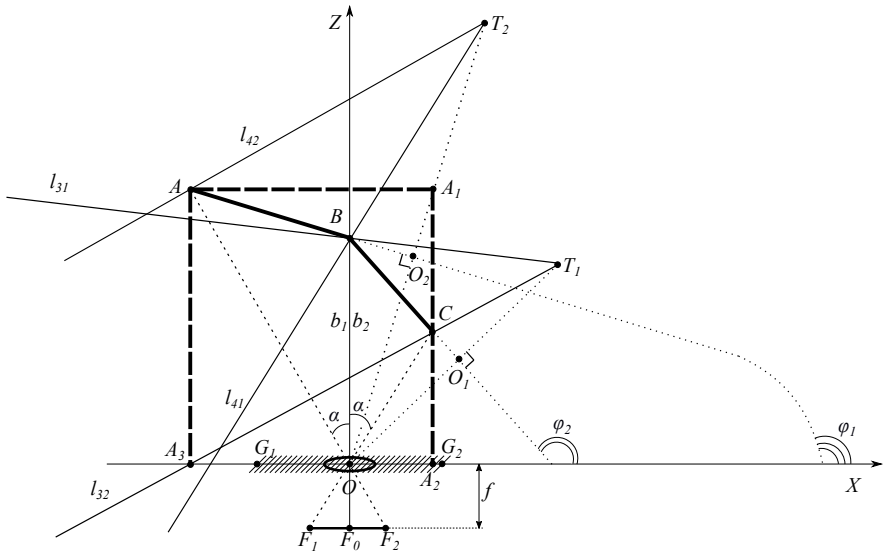


Рисунок 1. Модель оптической стереосистемы из видеокамеры и двух плоских зеркал

из двух плоских зеркал, подробное ее описание доступно в работах [5, 6]. Используется вид сверху, начало координат (точка O) расположено в оптическом центре камеры, ось OX направлена вправо от камеры, ось OZ — вперед (оптическая ось), а ось OY направлена вниз. Центр объектива камеры совпадает с началом координат, объектив изображен в виде тонкой линзы.

В реальных камерах чаще всего линз несколько, но здесь мы используем математическую модель «камера-обскура» и перспективную проекцию. Фокальная длина линзы равна f , отрезок F_1F_2 соответствует фотоматрице видеокамеры, плоскости обоих зеркал параллельны оси OY . Отрезки AB и BC соответствуют плоскостям зеркал, вместе они перекрывают все поле зрения камеры и соединяются в точке B , которая лежит на оси OZ . Отрезки AB и BC лежат на прямых с уравнениями $z = \tan(\phi_1)x + b_1$ и $z = \tan(\phi_2)x + b_2$, здесь ϕ_1 и ϕ_2 — углы между прямыми и положительным направлением оси OX , $\phi_{1,2} \in [0, \pi]$.

Пусть ось OZ делит угол обзора камеры пополам, т.е. центр фотоприемника (точка F_0) лежит на оси OZ , или же близко к оси: для большинства современных камер это условие выполняется. Если угол обзора обозначить как 2α , то $\angle AOB = \angle BOC = \alpha$. Положения левой и правой виртуальных камер обозначены точками T_1 и T_2 , расчет их координат представлен в статье [6]. Нетрудно убедиться, что эти точки являются отражением точки O относительно зеркал. Поле зрения левой виртуальной камеры образовано лучами l_{31} и l_{32} , и правой виртуальной камеры — лучами l_{41} и l_{42} .

Сделаем три замечания относительно разработанной математической модели.

- (1) Все параметры видеокамеры фиксированы и не входят в состав оптимизируемых параметров. В данной задаче требуется знать только один параметр камеры — ее горизонтальный угол обзора 2α . Разработка и проектирование собственной видеокамеры — намного более трудная задача, по сравнению со случаем, когда используется готовая видеокамера, и требуется рассчитать только конфигурацию отражающих и/или преломляющих элементов.
- (2) дисторсия на снимках либо незначительна, либо устранена программными методами (камера при этом должна быть заранее откалибрована).
- (3) $\alpha \leq \pi/2$, в противном случае мы имеем дело со сверхширокоугольными камерами, которые в данном исследовании не рассматриваются.

Опишем постановку оптимизационной задачи, которая была ранее

исследована и численно решена в статье [6]:

- (1) $\phi_1 > \pi/2 + \alpha, \phi_1 > \phi_2, \phi_{1,2} \in (\pi/2, \pi],$
- (2) $\text{base}(\phi_1, \phi_2, b) := 2b \sin(\phi_1 - \phi_2) \geq T_{\min},$
- (3) $L_1(\phi_1, b) := \frac{b \sin \alpha}{-\cos(\phi_1 - \alpha)} \leq L_{10},$
- (4) $L_2(\phi_2, b) := \frac{b \sin \alpha}{-\cos(\phi_2 + \alpha)} \leq L_{20},$
- (5) $\phi_1 < 2\phi_2 - \pi/2,$
- (6) $(X_C - X_A) \leq \text{wbox}, Z_A \leq \text{hbox},$
- (7) $(\phi_1 < 3\pi/4) \text{ OR } ((\phi_1 \geq 3\pi/4) \text{ AND } (u_{41} < -s_1)),$
- (8) $(\phi_2 < (3\pi/4 - \alpha/2)) \text{ OR } ((\phi_2 \geq (3\pi/4 - \alpha/2)) \text{ AND } (u_{32} < -s_1)),$
- (9) $F(\phi_1, \phi_2, b) = 2((X_C(\phi_1, b) - X_A(\phi_2, b)) + Z_A(\phi_2, b)) \rightarrow \min.$

Поясним (1): если $\phi_1 \leq \pi/2 + \alpha$, то прямая AB не будет пересекаться с лучом OA ; если $\phi_1 \leq \phi_2$, то поля зрения виртуальных камер не будут пересекаться (обнаружено экспериментально); если $\phi_{1,2} \leq \pi/2$, то камера будет наблюдать заднюю поверхность зеркала. Условие (2) задает ограничение на величину стереобазы: она должна быть не менее заданного значения T_{\min} . Условия (3) и (4) задают ограничения на ширины зеркал: ширина левого зеркала не превосходит величину L_{10} , а ширина правого зеркала — величину L_{20} . При условии (5) не наблюдается двойное отражение. Выражение (6) задает ограничения на размеры габаритного прямоугольника $AA_1A_2A_3$, который ограничивает оптическую систему; ширина прямоугольника не превосходит значения wbox , а высота — значения hbox . При условиях (7) и (8) в зеркалах не отражается конструкция видеокамеры. Здесь через u_{ij} обозначена абсцисса точки пересечения луча l_{ij} и оси OX , а s_1 — длина отрезка G_1O , здесь G_1G_2 — отрезок, который в предыдущей статье был определен как «запрещенная зона» — область, которая не должна отражаться в зеркалах, она соответствует габаритам конструкции видеокамеры. Выражение (9) определяет функцию, которую необходимо минимизировать: периметр прямоугольника $AA_1A_2A_3$.

2. Случай $\Delta\phi < \alpha/2$

Было проведено моделирование различных конфигураций двухзеркальной системы в среде Maple. В итоге было обнаружено, что конфигурация рабочей зоны зависит от значения $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ и угла обзора видеокамеры 2α . Оказалось, что при $\Delta\phi < \alpha/2$ рабочая зона (см. рисунок 2) имеет наиболее простой вид, она заключена между лучами l_{31} и l_{41} .

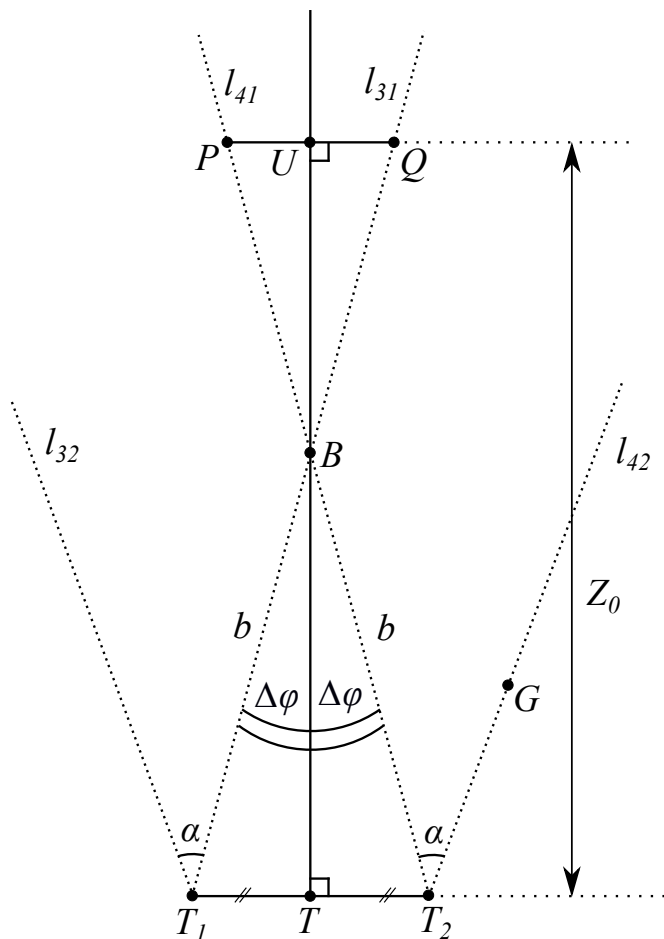


РИСУНОК 2. Расчет рабочей зоны в случае $\Delta\phi < \alpha/2$

Поскольку $T_1B = T_2B = b$, то $\triangle T_1BT_2$ — равнобедренный. Тогда если точка T — середина T_1T_2 , то TB — высота и медиана $\triangle T_1BT_2$. Поскольку величина стереобазы $T_1T_2 = 2b \sin \Delta\phi$, то $\sin \angle TBT_2 = TT_2/BT_2 = \sin \Delta\phi$, откуда $\angle TBT_2 = \angle TBT_1 = \Delta\phi$, а $TB = b \cos \Delta\phi$.

Таким образом, угол обзора оптической стереосистемы, который расположен между лучами l_{31} и l_{41} , равен $\Delta\phi$. На наш взгляд, угол обзора не является здесь достаточно информативной характеристикой оптической системы, поскольку не содержит полной информации о размерах рабочей зоны. Пусть от оптической системы требуется, чтобы рабочая зона простиралась на расстояние Z_0 от пары виртуальных камер (рисунок 2). И также требуется, чтобы ширина рабочей зоны (отрезок PQ) на этом расстоянии составляла не менее чем H_0 . Конкретные значения Z_0 и H_0 могут быть выбраны, исходя из особенностей задачи и особенностей детектируемых объектов. Такой задачей может быть, например, автономная навигация подвижного робота, детектирующего препятствия и целевые объекты с помощью стереозрения, или восстановление 3D-структуры сцены в задаче стереомикроскопии или неразрушающего контроля. Расстояние Z_0 назовем эффективной дальностью.

Введем функцию f_1 , которая определяет длину отрезка PQ (используем тот факт, что $\angle UBQ = \angle T_1BT$):

$$(10) \quad \begin{aligned} f_1(\Delta\phi, b) &= 2(UT - TB) \cdot \tan \angle UBQ = \\ &= 2(Z_0 - b \cos \Delta\phi) \cdot \tan \Delta\phi = 2Z_0 \cdot \tan \Delta\phi - 2b \cdot \sin \Delta\phi. \end{aligned}$$

В итоге мы можем записать следующее условие на размеры рабочей зоны (здесь и далее для более компактной записи опустим аргументы функций f_i , поскольку у всех функций они совпадают и равны $\Delta\phi$ и b):

$$(11) \quad (\Delta\phi < \alpha/2) \text{ AND } (f_1 \geq H_0).$$

Моделирование также показало, что при $\Delta\phi < \alpha/2$ прямые, на которых лежат лучи l_{31} и l_{42} , пересекаются за виртуальными камерами. Рассмотрим, в каком случае эти прямые будут параллельны. Если они параллельны, то $\angle BT_1T_2 = \pi - \angle T_1T_2G = \pi - (\angle T_1T_2B + \angle BT_2G)$, откуда $\Delta\phi = \alpha/2$. Аналогичный результат можно получить, если рассмотреть лучи l_{32} и l_{41} .

3. Случай $\Delta\phi \in [\alpha/2, \alpha]$

В случаях, когда значение $\Delta\phi$ превосходит $\alpha/2$, но не превосходит α , конфигурация рабочей зоны имеет более сложный вид, представленный на рисунке 3. Она состоит из треугольника BB_1B_2 и области, расположенной выше отрезка B_1B_2 между лучами l_{32} и l_{42} . В точке B_1 пересекаются

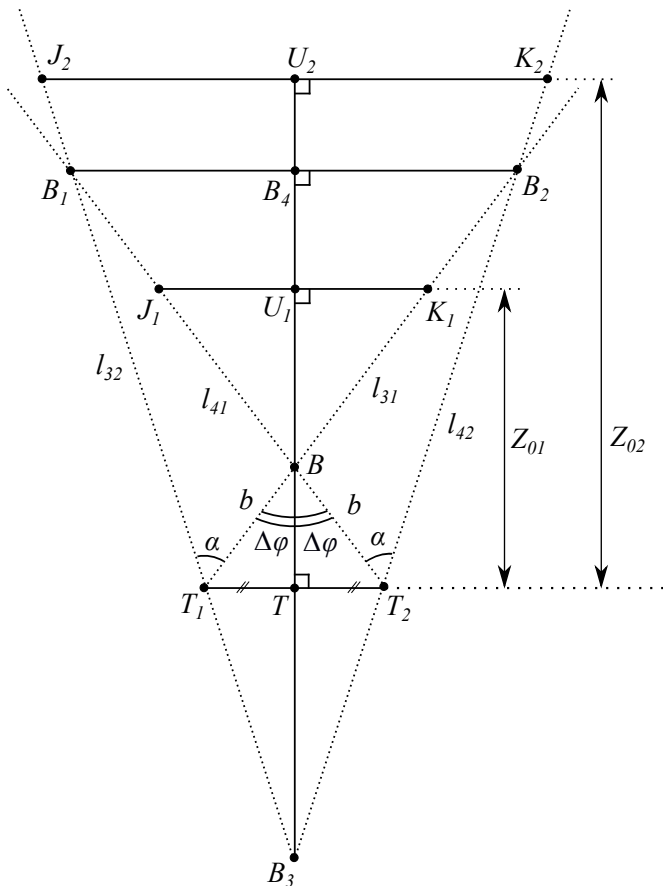


РИСУНОК 3. Расчет рабочей зоны в случае $\Delta\phi \in [\alpha/2, \alpha]$

лучи l_{32} и l_{41} , а в точке B_2 — лучи l_{31} и l_{42} . В точке B_4 пересекаются прямые B_1B_2 и TB .

Нетрудно убедиться, что расчет ширины рабочей зоны будет выпол-

няться по разному для эффективных расстояний, больших либо меньших чем длина отрезка TB_4 . Вначале выведем формулу для вычисления его длины, воспользовавшись теоремой синусов и свойствами вертикальных углов:

$$\begin{aligned}
 TB_4 &= TB + BB_4 = b \cos \Delta\phi + BB_1 \cdot \cos \angle B_4BB_1 = \\
 &= (b + BB_1) \cdot \cos \Delta\phi, \\
 \angle B_1BT_1 &= \pi - \angle T_1BT_2 = \pi - 2\Delta\phi, \\
 \angle BB_1T_1 &= \pi - \angle B_1BT_1 - \angle BT_1B_1 = 2\Delta\phi - \alpha, \\
 (12) \quad \frac{BB_1}{\sin \angle BT_1B_1} &= \frac{BT_1}{\sin \angle BB_1T_1} \Rightarrow BB_1 = \frac{b \sin \alpha}{\sin (2\Delta\phi - \alpha)}, \\
 f_2(\Delta\phi, \alpha) &= TB_4 = b \cos \Delta\phi \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\sin (2\Delta\phi - \alpha)} \right).
 \end{aligned}$$

Пусть эффективное расстояние $Z_0 = Z_{01}$ не превосходит длину отрезка TB_4 , тогда ширина рабочей зоны (отрезок J_1K_1) вычисляется по формулам из предыдущего раздела. Получаем следующее условие:

$$(13) \quad (\alpha/2 \leq \Delta\phi \leq \alpha) \text{ AND } (Z_0 \leq f_2) \text{ AND } (f_1 \geq H_0).$$

Если же $Z_0 = Z_{02}$ больше чем TB_4 , то ширина рабочей зоны (отрезок J_2K_2) зависит от длины отрезка U_2B_3 :

$$\begin{aligned}
 U_2B_3 &= U_2T + TB_3 = Z_0 + TT_2 \cdot \cot \angle TB_3T_2 = \\
 &= Z_0 + b \sin \Delta\phi \cdot \cot \angle TB_3T_2, \\
 \angle TT_2B &= \pi/2 - \angle TBT_2 = \pi/2 - \Delta\phi, \\
 (14) \quad \angle TT_2B_3 &= \pi - \angle TT_2B - \angle BT_2B_2 = \pi/2 + \Delta\phi - \alpha, \\
 \angle TB_3T_2 &= \pi/2 - \angle TT_2B_3 = \alpha - \Delta\phi, \\
 f_3(\Delta\phi, b) &= J_2K_2 = 2U_2B_3 \cdot \tan \angle TB_3T_2 = \\
 &= 2Z_0 \cdot \tan(\alpha - \Delta\phi) + 2b \cdot \sin \Delta\phi.
 \end{aligned}$$

В результате получаем следующее логическое выражение

$$(15) \quad (\alpha/2 \leq \Delta\phi \leq \alpha) \text{ AND } (Z_0 \geq f_2) \text{ AND } (f_3 \geq H_0).$$

Результаты моделирования показали, что при увеличении угла $\Delta\phi$ точка B_3 все дальше удаляется от виртуальных видеокамер и в какой-то момент уходит в бесконечность: прямые l_{32} и l_{42} становятся параллельными. Условие параллельности можно записать в виде выражения $\angle B_2T_2B_1 + \angle BB_1K_1 = \pi$. Поскольку $\angle BB_1T_1 = 2\Delta\phi - \alpha$, то несложно убедиться, что параллельность возникает при $\Delta\phi = \alpha$.

4. Случай $\Delta\phi \in (\alpha, \pi/2)$

При дальнейшем увеличении угла $\Delta\phi$ точка пересечения прямых l_{32} и l_{42} находится уже перед виртуальными камерами (точка B_5 на рисунке 4),

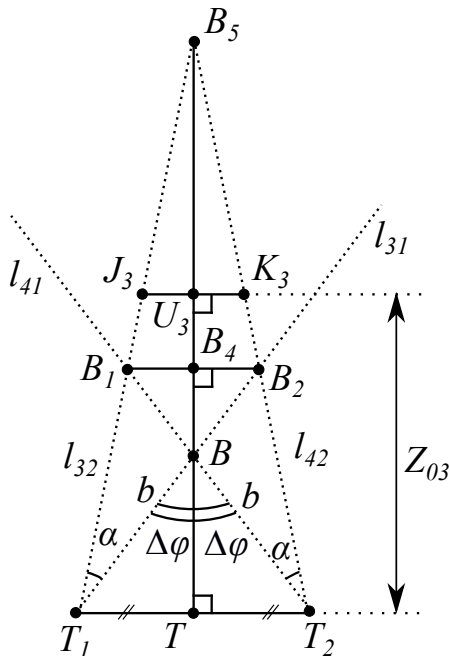


РИСУНОК 4. Расчет рабочей зоны в случае $\Delta\phi \in (\alpha, \pi/2)$

а рабочая область оптической системы теперь становится областью ограниченного размера — четырехугольник $BB_1B_5B_2$.

Как и в предыдущем разделе, ширина рабочей зоны зависит от того, превосходит ли расстояние Z_0 длину отрезка TB_4 . Если не превосходит, то этот вариант уже был рассмотрен ранее, и мы получаем следующее логическое выражение:

$$(16) \quad (\alpha < \Delta\phi < \pi/2) \text{ AND } (Z_0 \leq f_2) \text{ AND } (f_1 \geq H_0).$$

В противном случае (расстояние $Z_0 = Z_{03}$ на рисунке 4) необходимо,

чтобы обеспечивалось условие $Z_0 \leq TB_5$. Вычислим длину отрезка TB_5

$$\begin{aligned} \angle TT_2B_5 &= \angle TT_2B + \angle BT_2B_5 = \pi/2 - \Delta\phi + \alpha, \\ (17) \quad TB_5 &= TT_2 \cdot \tan \angle TT_2B_5, \\ f_4(\Delta\phi, b) &= TB_5 = b \cdot \sin \Delta\phi \cdot \cot(\Delta\phi - \alpha). \end{aligned}$$

а затем определим ширину рабочей зоны J_3K_3 :

$$\begin{aligned} T_1T_2 \parallel B_1B_2 &\Rightarrow \angle U_3K_3B_5 = \angle TT_2B_5, \\ (18) \quad J_3K_3 &= 2(TB_5 - U_3T) \cdot \cot \angle U_3K_3B_5, \\ f_{31}(\Delta\phi, b) &= 2Z_0 \cdot \tan(\alpha - \Delta\phi) + 2b \cdot \sin \Delta\phi \equiv f_3(\Delta\phi, b). \end{aligned}$$

В итоге получаем следующее логическое выражение:

$$(19) \quad (\alpha < \Delta\phi < \pi/2) \text{ AND } (Z_0 \geq f_2) \text{ AND } (f_4 \geq Z_0) \text{ AND } (f_3 \geq H_0).$$

5. Постановка и решение задачи условной оптимизации для поиска оптимальной конфигурации оптической системы

Мы получили ограничения на размеры рабочей зоны оптической системы в виде набора выражений (11), (13), (15), (16), (19). Эти выражения добавляются в модель (1)–(9), которая разработана в предыдущей статье. Соответствующие изменения были внесены в разработанную ранее программу для численного решения задачи условной оптимизации с использованием программного пакета *SciPy*^{URL}. Использовался метод *differential_evolution* из модуля *optimize* для поиска глобального минимума скалярной функции вида $F(\vec{X})$ при заданном наборе ограничений вида $\vec{b}_l \leq \vec{F}(\vec{X}) \leq \vec{b}_u$. Этот программный метод базируется на эвристическом алгоритме дифференциальной эволюции.

Программа доступна в *github-репозитории*^{URL}. Отметим особенность программной реализации обновленной модели. Пять логических выражений (11), (13), (15), (16), (19) не могут все одновременно быть истинными (например, не может быть оба истинными выражение $(\Delta\phi < \alpha/2)$ и выражение $(\alpha \leq \Delta\phi \leq \pi/2)$), поэтому оптимизационная задача фактически разбивается на пять отдельных независимых подзадач, в каждую из которых входят выражения (1)–(9) и по одному из пяти новых выражений. В процессе работы программы какие-то из пяти подзадач могут не иметь решения (соответствующие системы неравенств окажутся несовместными), а среди решения остальных подзадач выбирается то решение, при котором значение целевой функции будет наименьшим.

В таблице 1 приведены примеры расчета конфигурации оптической системы для различных значений параметра H_0 .

ТАБЛИЦА 1. Расчет конфигурации оптической системы при различных значениях параметра H_0

H_0 (см)	F (см)	ϕ_1 (рад)	ϕ_2 (рад)	$b_{1,2}$ (см)	AB (см)	AC (см)	AA_1 (см)	A_1A_2 (см)	$\Delta\phi$ (рад)
—	20,6	3,00	2,29	5,3	3,0	2,6	4,6	5,7	0,72
20	35,9	3,00	2,60	8,9	4,9	4,0	8,3	9,7	0,40
30	41,6	2,95	2,60	10,1	5,7	4,6	9,6	11,2	0,35
40	49,0	2,92	2,62	11,7	6,8	5,3	11,2	13,2	0,30
50	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Здесь F — минимум целевой функции (периметр $AA_1A_2A_3$), AB и BC — размеры левого и правого зеркал, $w \times h$ — размеры короба $AA_1A_2A_3$. Значения остальных параметров были взяты из предыдущей статьи, а именно: угол $\alpha = 26,75^\circ = 0,467$ рад., расстояние $Z_0 = 100$ см минимальное значение стереобазы $T_{\min} = 7$ см, максимально возможная ширина обоих зеркал $L_{10} = L_{20} = 10$ см, максимально допустимые размеры короба $AA_1A_2A_3$ равны $w_{\text{box}} \times h_{\text{box}} = 15 \times 15$ см, а длина отрезка $G_1O = s_1 = 1,5$ см. Вторая строка таблицы демонстрирует расчеты для случая, когда параметр H_0 не учитывается. Для случая $H_0 = 50$ см решение не было найдено.

По таблице видно, что если необходимо увеличить ширину рабочей зоны, то угол между зеркалами будет уменьшаться, а габариты оптической системы — увеличиваться (при условии, что все остальные параметры остаются неизменными). Например, если необходимо рассчитать конфигурацию двухзеркальной оптической системы для ее установке на подвижном роботе (летающем или едщем), то потребуются найти баланс между габаритами оптической системы (слишком большую систему зеркал разместить не получится) и требуемой шириной рабочей зоны. А ширина зависит от особенностей той задачи, для решения которой планируется использовать возможности стереозрения: например, от размера наблюдаемых целевых объектов, трехмерную структуру которых требуется восстановить.

Заключение

Выполнена модификация ранее разработанной математической модели катоптрической системы, состоящей из двух плоских зеркал и обеспечи-

вающей получение стереопар изображений с помощью единственной видеокамеры. Модель учитывает практические аспекты, возникающие при проектировании подобных систем: ограничения на размер зеркал, проблема двойного отражения, наблюдение запрещенных областей, общие габариты оптической системы. В рамках данной работы в модель добавлены ограничения, которые учитывают конфигурацию рабочей зоны оптической системы, рабочая зона образована пересечением полей зрения двух виртуальных камер. Алгоритм численного решения задачи условной оптимизации был написан с использованием возможностей программного пакета SciPy.


Полученные результаты могут быть использованы для проектирования катоптрических стереосистем различного назначения: например, для их установки на подвижных автономных роботах, для визуального контроля качества изготовленных деталей на конвейере или для анализа характеристик рабочих поверхностей акустических систем. Во всех трех случаях критична синхронизация полученной стереопары снимков, что и обеспечивается подобными катоптрическими системами. В дальнейшем планируется использовать предложенный подход к исследованию трехзеркальных и четырехзеркальных катоптрических стереосистем.

Список использованных источников

- [1] Durand-Texte T., Melon M., Simonetto E., Durand S., Moulet M.-H. *3D vision method applied to measure the vibrations of non-flat items with a two-mirror adapter* // Journal of Physics Conference Series.– 2018.– Vol. **1149**.– No. 1.– id. 012008. doi ↑57
- [2] Gorevoy A. V., Machikhin A. S. *Optimal calibration of a prism-based videoendoscopic system for precise 3D measurements* // Computer Optics.– 2017.– Vol. **41**.– No. 4.– Pp. 535–544. doi ↑57
- [3] Zhou F., Chen Y., Zhou M., Li X. *Effect of catadioptric component postposition on lens focal length and imaging surface in a mirror binocular system* // Sensors.– 2019.– Vol. **19**.– No. 23.– id. 5309. doi ↑57
- [4] Степанов Д. Н., Смирнов А. В. *Исследование процесса калибровки и оптических характеристик стереонасадки 3Dberry* // Программные системы: теория и приложения.– 2018.– Т. **9**.– № 3(38).– С. 11–28. doi ↑58
- [5] Степанов Д. Н. *Математические модели получения стереоизображений с двухзеркальных катодиоптрических систем с учетом дисторсии объективов* // Компьютерная оптика.– 2019.– Т. **43**.– № 1.– С. 105–114. doi ↑58, 60
- [6] Степанов Д. Н., Тищенко И. П. *Математическое моделирование и исследование оптимальной конфигурации оптической стереосистемы, состоящей из двух плоских зеркал* // Программные системы: теория и приложения.– 2024.– Т. **62**.– № 3(62).– С. 23–52. doi ↑58, 59, 60, 61, 62

- [7] Gluckman J., Nayar S.K. *Rectified catadioptric stereo sensors* // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.– 2002.– Vol. **24**.– No. 2.– Pp. 224–236. doi ↑58
- [8] Clark A. F., Chan S. W. *Single-camera computational stereo using a rotating mirror* // *Proceedings of the British Machine Vision Conference*.– V. 2 (13-16 September 1994, University of York, York, UK), ed. Hancock E. R.– BMVA Press.– 1994.– ISBN 952-1898-1-X.– Pp. 761–770. doi ↑58
- [9] Nakao T., Kashitani A. *Panoramic camera using a mirror rotation mechanism and a fast image mosaicing* // *Proceedings 2001 International Conference on Image Processing*.– V. 2 (07-10 October 2001, Thessaloniki, Greece).– IEEE.– 2001.– ISBN 0-7803-6725-1.– Pp. 1045–1048. doi ↑58
- [10] Hu S., Dong H., Shimasaki K., Jiang M., Senoo T., Ishii I. *Omnidirectional panoramic video system with frame-by-frame ultrafast viewpoint control* // IEEE Robotics and Automation Letters.– 2022.– Vol. **7**.– No. 2.– Pp. 4086–4093. doi ↑58
- [11] Baker S., Nayar S. K. *A theory of single-viewpoint catadioptric image formation* // International Journal of Computer Vision.– 1999.– Vol. **35**.– No. 2.– Pp. 175–196. doi ↑58
- [12] Pachidis T., Lygouras J. *A pseudo stereo vision system as a sensor for real time path control of a robot* // *Proceedings of the 19th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*.– V. 2, IMTC 2002 (21-23 May 2002, Anchorage, AK, USA).– IEEE.– 2002.– ISBN 0-7803-7218-2.– Pp. 1589–1594. doi ↑58
- [13] Vernon D. *An optical device for computation of binocular stereo disparity with a single static camera*, Opto-Ireland 2002: Optical Metrology, Imaging, and Machine Vision (5-6 September 2002, Galway, Ireland), Proc. SPIE.– vol. **4877**.– 2003.– Pp. 38–46. doi ↑58
- [14] Chai X., Zhou F., Chen X. *Epipolar constraint of single camera mirror binocular stereo vision systems* // Optical Engineering.– 2017.– Vol. **56**.– No. 8.– id. 084103.– 8 pp. doi ↑58
- [15] Zhou F., Chai X., Chen X., Song Y. *Omnidirectional stereo vision sensor based on single camera and catoptric system* // Applied Optics.– 2016.– Vol. **55**.– No. 25.– Pp. 6813–6820. doi ↑58
- [16] Liu Y., Zhou F., Guo Z., Tan H., Zhang W. *Design and optimization of a quad-directional stereo vision sensor with wide field of view based on single camera* // Measurement.– 2022.– Vol. **203**.– No. 7.– id. 111915. doi ↑58
- [17] Wang R., Li X., Zhang Y. *Analysis and optimization of the stereo-system with a four-mirror adapter* // Journal of the European Optical Society Rapid Publications.– 2008.– Vol. **3**.– id. 08033.– 7 pp. doi ↑58
- [18] Yu L., Pan B. *Structure parameter analysis and uncertainty evaluation for single-camera stereo-digital image correlation with a four-mirror adapter* // Applied Optics.– 2016.– Vol. **55**.– No. 25.– Pp. 6936–6946. doi ↑58
- [19] Luo H., Yu L., Pan B. *Design and validation of a demand-oriented single-camera stereo-DIC system with a four-mirror adapter* // Measurement.– 2021.– Vol. **186**.– No. 5.– Pp. 110083. doi ↑58

- [20] López-Alba E., Felipe-Sesé L., Schmeer S., Díaz F. A. *Optical low-cost and portable arrangement for full field 3D displacement measurement using a single camera* // Measurement Science and Technology.– 2016.– Vol. **27**.– No. 11.– id. 115901. doi ↑58
- [21] Yu Z., Ma K., Wang Z., Wu J., Wang T., Zhuge J. *Surface modeling method for aircraft engine blades by using speckle patterns based on the virtual stereo vision system* // Optics Communications.– 2018.– Vol. **411**.– Pp. 33–39. doi ↑58
- [22] Bartol K., Bojanić D., Petković T., Pribanić T. *Catadioptric stereo on a smartphone* // 2021 12th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, ISPA 2021 (13-15 September 2021, Zagreb, Croatia).– IEEE.– 2021.– ISBN 1-66542-639-X.– Pp. 189–194. doi ↑58
- [23] Aggarwal R., Vohra A., Namboodiri A. M. *Panoramic stereo videos with a single camera* // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2016 (27-30 June 2016, Las Vegas, NV, USA).– IEEE.– 2016.– ISBN 978-1-4673-8850-4.– Pp. 3755–3763. doi ↑58
- [24] Zhu L., Wang W., Liu Y., Lai S., Li J. *A virtual reality video stitching system based on mirror pyramids* // 2017 International Conference on Virtual Reality and Visualization, ICVRV 2017 (21-22 October 2017, Zhengzhou, China).– IEEE.– 2017.– ISBN 978-1-5386-2636-8.– Pp. 288–293. doi ↑58
- [25] Zhong F, Quan C. *A single color camera stereo vision system* // IEEE Sensors Journal.– 2018.– Vol. **18**.– No. 4.– Pp. 1474–1482. doi ↑58
- [26] Nene S. A., Nayar S. K. *Stereo with mirrors* // Sixth International Conference on Computer Vision (07 January 1998, Bombay, India).– IEEE.– 2002.– ISBN 81-7319-221-9.– Pp. 1087–1094. doi ↑58
- [27] Goshtasby A., Gruver W. A. *Design of a single-lens stereo camera system* // Pattern Recognition.– 1993.– Vol. **26**.– No. 6.– Pp. 923–937. doi ↑58
- [28] Gluckman J., Nayar S. K. *Planar catadioptric stereo: geometry and calibration* // Proceedings IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition.– V. 1 (23-25 June 1999, Fort Collins, CO, USA).– IEEE.– 1999.– ISBN 0-7695-0149-4.– Pp. 22–28. doi ↑58
- [29] Gluckman J., Nayar S. K. *Catadioptric stereo using planar mirrors* // International Journal of Computer Vision.– 2001.– Vol. **44**.– No. 1.– Pp. 65–79. doi ↑58
- [30] Endres F., Sprunk C., Kümmerle R., Burgard W. *A catadioptric extension for RGB-D cameras* // 2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (14-18 September 2014, Chicago, IL, USA).– IEEE.– 2014.– ISBN 9781479969357.– Pp. 466–471. doi ↑59
- [31] Mariottini G. L., Scheggi S., Morbidi F., Prattichizzo D. *Catadioptric stereo with planar mirrors: multiple-view geometry and camera localization* // Visual Servoing via Advanced Numerical Methods, Lecture Notes in Control and Information Sciences.– vol. **401**, eds. Chesi G., Hashimoto K., London: Springer.– 2010.– ISBN 978-1-84996-088-5.– Pp. 3–21. doi ↑59
- [32] Takahashi K., Nobuhara S. *Structure of multiple mirror system from kaleidoscopic projections of single 3D point* // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.– 2022.– Vol. **44**.– No. 9.– Pp. 5602–5617. doi ↑59

- [33] Zhao Y., Chen Y., Yang L. *Calibration of double-plane-mirror catadioptric camera based on coaxial parallel circles* // Journal of Sensors.– 2022.– Vol. **2022**.– No. 12.– id. 7145400.– 15 pp.  [↑59](#)

Поступила в редакцию 18.10.2024;
 одобрена после рецензирования 29.10.2024;
 принята к публикации 02.11.2024;
 опубликована онлайн 17.11.2024.

Рекомендовал к публикации


д.ф.-м.н. Ю. Л. Сачков

Информация об авторах:



Дмитрий Николаевич Степанов

к.т.н., научн. сотр. Исследовательского центра мультипроцессорных систем ИПС им. А.К. Айламазяна РАН. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, компьютерное зрение, распознавание образов, параллельное программирование, визуальная навигация, анализ данных

 0000-0003-2582-5757
 e-mail: mitek1989@mail.ru



Игорь Петрович Тищенко

к.т.н., и.о. директора ИПС им. А.К. Айламазяна РАН. Область научных интересов: распознавание образов, параллельное программирование, искусственные нейронные сети, беспилотные летательные аппараты

 0000-0002-0369-0524
 e-mail: igor.p.tishchenko@gmail.com

Вклад авторов: *Д. Н. Степанов* – 95% (идея, методология, программное обеспечение, валидация, формальный анализ, расследование, сбор материала, курирование данных, написание черновой версии, доработка и редактирование, визуализация); *И. П. Тищенко* – 5% (наставничество, администрирование).

Декларация об отсутствии личной заинтересованности: *благополучие авторов не зависит от результатов исследования.*



Mathematical modeling with constraints and research of the optimal configuration of an optical stereo system consisting of two flat mirrors and videocamera

Dmitry Nikolaevich **Stepanov**¹, Igor Petrovich **Tishchenko**²

^{1,2}Alamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia

¹ mitek1989@mail.ru

Abstract. The paper continues a series of studies devoted to mathematical modeling and optimization of optical stereo system configuration, consists of video camera and two flat mirrors. In previous work, we developed a model that takes into account various constraints on the configuration of such a system: the size of the stereo base, the size of the mirrors, overall dimensions of the optical system, the absence of double reflection of light rays, preventing the situation when the video camera is reflected in the mirrors. A conditional optimization problem is formulated, the perimeter of the rectangle that bounds the optical system is chosen as the objective function.

In this work we added a set of constraints to the model that define the configuration of the working area, which is formed by the intersection of the fields of view of two virtual cameras. The corresponding changes were made to the program for the numerical solution of the constrained optimization problem using the SciPy package. The results obtained expand the theory of computer vision and can be used in the creation and research of computer vision systems for robotic systems and non-destructive testing systems. (*In Russian*).

Key words and phrases: machine vision, optical devices, mathematical modeling, stereovision, optimization, catoptric system

2020 *Mathematics Subject Classification:* 78M50; 78A05, 68T45

For citation: Dmitry N. Stepanov, Igor P. Tishchenko. *Mathematical modeling with constraints and research of the optimal configuration of an optical stereo system consisting of two flat mirrors and videocamera*. Program Systems: Theory and Applications, 2024, **15**:4(63), pp. 55–77. (*In Russ.*). https://psta.psiras.ru/read/psta2024_4_55-77.pdf

References

- [1] T. Durand-Texte, M. Melon, E. Simonetto, S. Durand, M.-H. Moulet. “3D vision method applied to measure the vibrations of non-flat items with a two-mirror adapter”, *Journal of Physics Conference Series*, **1149**:1 (2018), id. 012008. [doi](#)
- [2] A. V. Gorevoy, A. S. Machikhin. “Optimal calibration of a prism-based videoendoscopic system for precise 3D measurements”, *Computer Optics*, **41**:4 (2017), pp. 535–544. [doi](#)
- [3] F. Zhou, Y. Chen, M. Zhou, X. Li. “Effect of catadioptric component postposition on lens focal length and imaging surface in a mirror binocular system”, *Sensors*, **19**:23 (2019), id. 5309. [doi](#)
- [4] D. N. Stepanov, A. V. Smirnov. “Research of calibration process and optical characteristics of 3Dberry stereo nozzle”, *Program Systems: Theory and Applications*, **9**:3(38) (2018), pp. 11–28 (in Russian). [doi](#)
- [5] D. N. Stepanov. “Mathematical models of obtaining stereo images from two-mirror catadioptric systems with regard to lens distortion”, *Komp'yuternaya optika*, **43**:1 (2019), pp. 105–114 (in Russian). [doi](#)
- [6] D. N. Stepanov, I. P. Tishhenko. “Mathematical modeling and research of the optimal configuration of an optical stereo system consisting of two flat mirrors”, *Program Systems: Theory and Applications*, **62**:3(62) (2024), pp. 23–52 (in Russian). [doi](#)
- [7] J. Gluckman, S. K. Nayar. “Rectified catadioptric stereo sensors”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **24**:2 (2002), pp. 224–236. [doi](#)
- [8] A. F. Clark, S. W. Chan. “Single-camera computational stereo using a rotating mirror”, *Proceedings of the British Machine Vision Conference*. V. 2 (13-16 September 1994, University of York, York, UK), ed. Hancock E. R., BMVA Press, 1994, ISBN 952-1898-1-X, pp. 761–770. [doi](#)
- [9] T. Nakao, A. Kashitani. “Panoramic camera using a mirror rotation mechanism and a fast image mosaicing”, *Proceedings 2001 International Conference on Image Processing*. V. 2 (07-10 October 2001, Thessaloniki, Greece), IEEE, 2001, ISBN 0-7803-6725-1, pp. 1045–1048. [doi](#)
- [10] S. Hu, H. Dong, K. Shimasaki, M. Jiang, T. Senoo, I. Ishii. “Omnidirectional panoramic video system with frame-by-frame ultrafast viewpoint control”, *IEEE Robotics and Automation Letters*, **7**:2 (2022), pp. 4086–4093. [doi](#)
- [11] S. Baker, S. K. Nayar. “A theory of single-viewpoint catadioptric image formation”, *International Journal of Computer Vision*, **35**:2 (1999), pp. 175–196. [doi](#)
- [12] T. Pachidis, J. Lygouras. “A pseudo stereo vision system as a sensor for real time path control of a robot”, *Proceedings of the 19th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. V. 2, IMTC 2002 (21-23 May 2002, Anchorage, AK, USA), IEEE, 2002, ISBN 0-7803-7218-2, pp. 1589–1594. [doi](#)

- [13] D. Vernon. “An optical device for computation of binocular stereo disparity with a single static camera”, Opto-Ireland 2002: Optical Metrology, Imaging, and Machine Vision (5-6 September 2002, Galway, Ireland), Proc. SPIE, vol. **4877**, 2003, pp. 38–46. [doi](#)
- [14] X. Chai, F. Zhou, X. Chen. “Epipolar constraint of single camera mirror binocular stereo vision systems”, *Optical Engineering*, **56**:8 (2017), id. 084103, 8 pp. [doi](#)
- [15] F. Zhou, X. Chai, X. Chen, Y. Song. “Omnidirectional stereo vision sensor based on single camera and catoptric system”, *Applied Optics*, **55**:25 (2016), pp. 6813–6820. [doi](#)
- [16] Y. Liu, F. Zhou, Z. Guo, H. Tan, W. Zhang. “Design and optimization of a quad-directional stereo vision sensor with wide field of view based on single camera”, *Measurement*, **203**:7 (2022), id. 111915. [doi](#)
- [17] R. Wang, X. Li, Y. Zhang. “Analysis and optimization of the stereo-system with a four-mirror adapter”, *Journal of the European Optical Society Rapid Publications*, **3** (2008), id. 08033, 7 pp. [doi](#)
- [18] L. Yu, B. Pan. “Structure parameter analysis and uncertainty evaluation for single-camera stereo-digital image correlation with a four-mirror adapter”, *Applied Optics*, **55**:25 (2016), pp. 6936–6946. [doi](#)
- [19] H. Luo, L. Yu, B. Pan. “Design and validation of a demand-oriented single-camera stereo-DIC system with a four-mirror adapter”, *Measurement*, **186**:5 (2021), pp. 110083. [doi](#)
- [20] E. López-Alba, L. Felipe-Sesé, S. Schmeer, F. A. Díaz. “Optical low-cost and portable arrangement for full field 3D displacement measurement using a single camera”, *Measurement Science and Technology*, **27**:11 (2016), id. 115901. [doi](#)
- [21] Z. Yu, K. Ma, Z. Wang, J. Wu, T. Wang, J. Zhuge. “Surface modeling method for aircraft engine blades by using speckle patterns based on the virtual stereo vision system”, *Optics Communications*, **411** (2018), pp. 33–39. [doi](#)
- [22] K. Bartol, D. Bojanić, T. Petković, T. Pribanić. “Catadioptric stereo on a smartphone”, *2021 12th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, ISPA 2021* (13-15 September 2021, Zagreb, Croatia), IEEE, 2021, ISBN 1-66542-639-X, pp. 189–194. [doi](#)
- [23] R. Aggarwal, A. Vohra, A. M. Namboodiri. “Panoramic stereo videos with a single camera”, *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2016* (27-30 June 2016, Las Vegas, NV, USA), IEEE, 2016, ISBN 978-1-4673-8850-4, pp. 3755–3763. [doi](#)
- [24] L. Zhu, W. Wang, Y. Liu, S. Lai, J. Li. “A virtual reality video stitching system based on mirror pyramids”, *2017 International Conference on Virtual Reality and Visualization, ICVRV 2017* (21-22 October 2017, Zhengzhou, China), IEEE, 2017, ISBN 978-1-5386-2636-8, pp. 288–293. [doi](#)
- [25] F Zhong, C. Quan. “A single color camera stereo vision system”, *IEEE Sensors Journal*, **18**:4 (2018), pp. 1474–1482. [doi](#)

- [26] S. A. Nene, S. K. Nayar. “Stereo with mirrors”, *Sixth International Conference on Computer Vision* (07 January 1998, Bombay, India), IEEE, 2002, ISBN 81-7319-221-9, pp. 1087–1094. [doi](#)
- [27] A. Goshtasby, W. A. Gruver. “Design of a single-lens stereo camera system”, *Pattern Recognition*, **26**:6 (1993), pp. 923–937. [doi](#)
- [28] J. Gluckman, S. K. Nayar. “Planar catadioptric stereo: geometry and calibration”, *Proceedings IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. V. 1 (23-25 June 1999, Fort Collins, CO, USA), IEEE, 1999, ISBN 0-7695-0149-4, pp. 22–28. [doi](#)
- [29] J. Gluckman, S. K. Nayar. “Catadioptric stereo using planar mirrors”, *International Journal of Computer Vision*, **44**:1 (2001), pp. 65–79. [doi](#)
- [30] F. Endres, C. Sprunk, R. Kümmerle, W. Burgard. “A catadioptric extension for RGB-D cameras”, *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (14-18 September 2014, Chicago, IL, USA), IEEE, 2014, ISBN 9781479969357, pp. 466–471. [doi](#)
- [31] G. L. Mariottini, S. Scheggi, F. Morbidi, D. Prattichizzo. “Catadioptric stereo with planar mirrors: multiple-view geometry and camera localization”, *Visual Servoing via Advanced Numerical Methods*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. **401**, eds. Chesi G., Hashimoto K., Springer, London, 2010, ISBN 978-1-84996-088-5, pp. 3–21. [doi](#)
- [32] K. Takahashi, S. Nobuhara. “Structure of multiple mirror system from kaleidoscopic projections of single 3D point”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **44**:9 (2022), pp. 5602–5617. [doi](#)
- [33] Y. Zhao, Y. Chen, L. Yang. “Calibration of double-plane-mirror catadioptric camera based on coaxial parallel circles”, *Journal of Sensors*, **2022**:12 (2022), id. 7145400, 15 pp. [doi](#)