RU EN ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ISSN 2079-3316
научная статья МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5
doi 10.25209/2079-3316-2025-16-3-23-40

Метод сильного улучшения управления для неоднородных дискретных систем

Ирина Викторовна **Расина**[1]✉, Ирина Сергеевна **Гусева**[2]
[1] Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Веськово, Россия
[2] Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия
[1]✉ *irinarasina@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается класс неоднородных дискретных систем (НДС) с промежуточными критериями. Такие системы являются двухуровневыми и распространены на практике, а также получаются при дискретизации непрерывных систем в процессе решения задач оптимизации итерационными методами. Для указанного класса на основе аналога достаточных условий оптимальности Кротова строится метод сильного улучшения второго порядка.

Авторы статьи ставят под сомнение утверждение, что для классических дискретных управляемых систем, а также и для неоднородных, нет смысла вводить понятие сильного относительного минимума. Поэтому при построении метода улучшения ими выдвинуто требование близости соседних приближений из класса допустимых только по состояниям процесса на обоих уровнях. Полученный метод содержит векторно-матричную двухуровневую систему для сопряженных переменных. Приращение управлений на каждом из уровней линейно зависит от соответствующих состояний, что позволяет найти решение в форме приближенного линейного синтеза оптимального управления.

Проведена апробация метода на двух иллюстративных примерах, показавшая его работоспособность. Применение разработанного метода к более сложному примеру позволило получить меньшее значение функционала, чем найденное ранее аналогичным по структуре методом минимаксного улучшения.

Ключевые слова и фразы: неоднородные дискретные системы, промежуточные критерии, оптимальное управление

Для цитирования: Расина И. В., Гусева И. С. *Метод сильного улучшения управления для неоднородных дискретных систем* // Программные системы: теория и приложения. 2025. **Т. 16**. № 3(66). С. 23–40. `https://psta.psiras.ru/read/psta2025_3_23-40.pdf`

Введение

Системы неоднородной структуры, т.е. процессы с изменяющимся во времени описанием, как непрерывные, так и дискретные, широко распространены на практике. Примерами могут служить сложные космические операции (например, перелет между планетами), динамика роботов, процессы химического производства, развитие организмов и популяций. Описание некоторых из них приведено в [1]. Далее будут рассматриваться неоднородные дискретные процессы (НДС).

Поскольку непосредственное использование необходимых и достаточных условий оптимальности для различных типов управляемых систем не представляется возможным из-за трудностей разрешимости в аналитическом виде содержащихся в них соотношений, то внимание исследователей всегда было сосредоточено на построении на их основе разнообразных итерационных методов. При этом следует заметить, что львиная доля таких методов позволяет найти лишь локальный, а не глобальный минимум функционала. Подобные методы более просты как в их разработке, так и реализации.

В классической задаче оптимального управления для непрерывных систем различают сильный и слабый относительный минимум [2]. Итак, пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{u})$, где $\bar{x}$ — состояние, а $\bar{u}$ — управление, элемент из класса допустимых, на котором функционал достигает относительного минимума. Будем называть такой относительный минимум сильным, если он достигается среди элементов z, удовлетворяющих условию $|x - \bar{x}| < \varepsilon$. И в свою очередь слабым, если он достигается среди элементов z, удовлетворяющих условиям $|x - \bar{x}| < \varepsilon, |u - \bar{u}| < \varepsilon$.

В дискретных системах в силу специфики их структуры говорят просто об относительном минимуме, который по своей сути является слабым [2]. Здесь достаточно требования близости элементов по управлению, из которого автоматически следует близость по состоянию.

Если же речь идет об управляемых системах неоднородной структуры, которые являются двухуровневыми, где на нижнем уровне чередуются непрерывные системы, а на верхнем — дискретные (ДНС), естественным для нижнего уровня будет требование близости элементов, как только по состоянию, так по состоянию и управлению. Для верхнего уровня только по управлению. По схеме: на нижнем близость по состоянию, на верхнем — по управлению, был построен метод улучшения в [3]. Когда же оба уровня дискретные (НДС), то по аналогии с классикой можно говорить о близости по управлению на обоих уровнях.

И все же возникает естественный вопрос: а можно ли для НДС построить метод, в котором на обоих уровнях элементы близки лишь по состоянию и будет ли этот метод работоспособным. Далее в статье рассматривается именно эта ситуация.

При постановке задачи оптимального управления использовалась математическая модель НДС с промежуточными критериями из [4], а для построения метода — аналог достаточных условий оптимальности Кротова, полученный в этой же работе.

1. Неоднородные дискретные процессы с промежуточными критериями

Рассмотрим двухуровневую модель, в которой нижний уровень составляют дискретные динамические системы однородной структуры. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель общего вида

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \tag{1}$$

$$k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, ..., k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k, x),$$

где k — номер шага (этапа), x и u — соответственно переменные состояния и управления произвольной природы (возможно различной) для различных k, $\mathbf{U}(k, x)$ — заданное при каждом k и x множество.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, $u(k)$ интерпретируется как пара $\left(u^v(k), m^d(k)\right)$, где $m^d(k)$ — процесс $(x^d(k,t), u^d(k,t))$, $t \in \mathbf{T}(k, z(k))$, $m^d(k) \in \mathbf{D}^d\left(k, z(k)\right)$, а $\mathbf{D}^d$ — множество допустимых процессов m^d, удовлетворяющих системе

$$x^d(k, t+1) = f^d\left(k, z, t, x^d(k,t), u^d(k,t)\right), \tag{2}$$

$$t \in \mathbf{T} = \{t_I(z), t_I(z) + 1, \ldots, t_F(z)\},$$

$$x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t), \quad u^d \in \mathbf{U}^d\left(k, z, t, x^d\right), \quad z = \left(k, x, u^v\right).$$

Здесь u^v управляющее воздействие верхнего уровня на нижний. Для этой системы на множестве $\mathbf{T}$ задана промежуточная цель в виде функционала, который необходимо минимизировать:

$$I^k = \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F(z)} f^k(t, x^d(k,t), u^d(k,t)) \to \inf .$$

Здесь $\mathbf{X}^d(k, z, t)$, $\mathbf{U}^d\left(k, z, t, x^d\right)$ — заданные при каждом t, z и x^d множества. Оператор правой части (1) сводится к следующему:

$$f\left(k, x, u\right) = \theta\left(z, \gamma^d(z)\right), \quad \gamma^d = \left(t_I, x_I^d, t_F, x_F^d\right) \in \mathbf{\Gamma}^d(k, z),$$

$$\mathbf{\Gamma}^d(z) = \{\gamma^d \colon t_I = \tau(k, z),\ t_F = \vartheta(k, z),\ x_I^d = \xi(k, z),\ x_F^d \in \mathbf{\Gamma}_F^d(k, z)\},$$

где θ и τ, ϑ, ξ — заданные оператор и функции.

На множестве $\mathbf{D}$ процессов

$$m = \left(x(k), u(k), x^d(k,t), u^d(k,t)\right),$$

удовлетворяющих (1), (2), рассматривается задача оптимального управления о минимизации концевого функционала $I = F\left(x\left(k_F\right)\right)$ при фиксированных $k_I = 0$, k_F, $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$.

2. Используемый математический аппарат

Далее для удобства читателей приведем используемые для построения метода конструкции и теоремы.

Имеем [4]:

$$\begin{aligned} L &= G\left(x\left(k_F\right)\right) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k, x(k), u(k)) + \\ &\quad + \sum_{\mathbf{K}'}\Big(G^d(z) - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F} R^d(z, t, x^d(k,t), u^d(k,t))\Big), \\ G(x(k_F)) &= F((x(k_F)) + \varphi\left(k_F, x(k_F)\right) - \varphi\left(k_I, x\left(k_I\right)\right), \\ R\left(k, x, u\right) &= \varphi\left(k+1, f\left(k, x, u\right)\right) - \varphi\left(k, x\right), \\ G^d\left(k, z, \gamma^d\right) &= -\varphi\left(k+1, \theta\left(k, z, \gamma^d\right)\right) + \varphi\left(k, x(k)\right) + \\ &\quad + \varphi^d\left(k, z, t_F, x^d_F\right) - \varphi^d\left(k, z, t_I, x^d_I\right), \\ R^d\left(k, z, t, x^d, u^d\right) &= \varphi^d\left((k, z, t+1, f^d\left(k, z, t, x^d, u^d\right)\right) - \\ &\quad - f^k(t, x^d(k,t), u^d(k,t)) - \varphi^d(k, z, t, x^d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^d\left(k, z, t\right) &= \sup\left\{R^d\left(k, z, t, x^d, u^d\right) : x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t), u^d \in \mathbf{U}^d\left(k, z, t, x^d\right)\right\}, \\ l^d\left(k, z\right) &= \inf\left\{G^d\left(k, z, \gamma^d\right) :\ \gamma^d \in \mathbf{\Gamma}^d(k, z),\ x^d \in \mathbf{X}^d(k, z, t_F)\right\}, \\ \mu\left(k\right) &= \begin{cases} \sup\left\{R\left(k, x, u\right) : x \in \mathbf{X}(k),\ u \in \mathbf{U}\left(k, x\right)\right\}, & t \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{K}', \\ -\inf\left\{l^d\left(z\right) : x \in \mathbf{X}\left(k\right),\ u^v \in \mathbf{U}^v\left(k, x\right)\right\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases} \\ l &= \inf\left\{G\left(x\right) :\ x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{X}\left(k_F\right)\right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi\left(k, x\right)$ — произвольный функционал, $\varphi^d(k, z, t, x^d)$ — произвольное параметрическое семейство функционалов (с параметрами k, z). В дальнейшем указанные функционалы φ, φ^d подлежат определению.

Теорема 1. *Для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любых φ, φ^d имеет место оценка*

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \le \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ *и* $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{E}$ *и функции* φ *и* φ^d *такие, что* $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, *и* $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Здесь $\mathbf{E}$ — множество, включающее в себя множество $\mathbf{D}$, [2].

Теорема 2. *Пусть имеются последовательность процессов* $\{m_s\} \subset \subset \mathbf{D}$ *и функционалы* φ, φ^d, *такие что:*

1) $R\left(k, x_s(k), u_s(k)\right) \to \mu\left(k\right),\ k \in \mathbf{K}$;
2) $R^d\left(z_s, t, x_s^d(t), u_s^d(t)\right) - \mu^d\left(z_s, t\right) \to 0,\ k \in \mathbf{K}',\ t \in \mathbf{T}\left(z_s\right)$;
3) $G^d\left(z_s, \gamma_s^d\right) - l^d\left(z_s\right) \to 0,\ k \in \mathbf{K}'$;
4) $G\left(x_s\left(t_F\right)\right) \to l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ *— минимизирующая для* I *на* $\mathbf{D}$.

3. Метод улучшения

Здесь и ниже предполагается, что все используемые объекты обладают необходимыми для выполняемых операций свойствами, такими как непрерывность, дифференцируемость и т.д.

Предположим, что $\mathbf{X}(k) = \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{X}^d(z,t) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $x_I^d = \xi\left(z\right)$, k_I, x_I, k_F, $t_I(k)$, $t_F(k)$ — заданы, $x_F^d \in \mathbb{R}^{n(k)}$ и системы нижнего уровня не зависят от управления u^v. Последнее требование позволяет избежать излишней громоздкости метода. Рассматриваемая далее задача улучшения состоит, по существу, в построении оператора $\theta(m)$, $\theta : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, такого что $I(\theta(m)) \leq I(m)$ [4]. При некотором заданном начальном элементе такой оператор генерирует улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность $\{m_s\} : m_{s+1} = \theta(m_s)$.

Будем строить метод на основе принципов расширения [5] и локализации [6]. Согласно последнему, задача улучшения некоторого элемента m^{I} сводится к задаче о минимуме вспомогательного функционала

$$I_\alpha(m) = \alpha I(m) + (1-\alpha) J(m^{\mathrm{I}}, m), \quad \alpha \in [0,1], \tag{3}$$

где $J(m^{\mathrm{I}}, m)$ — функционал типа метрики. Изменяя α от 0 к 1, можно достичь необходимой степени близости m_α к m^{I} и эффективно использовать аппроксимации конструкций достаточных условий в окрестности m^{I}. В итоге получается алгоритм с параметром α, играющим роль регулятора, настраиваемого при конкретном применении. Этот параметр выбирается так, чтобы разность $I(m^{\mathrm{I}}) - I(m_\alpha)$ была наибольшей, тогда соответствующий элемент m_α принимается за m^{II}.

Вспомогательный функционал зададим в виде:

$$I_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}(1-\alpha)\left(\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'} |\Delta x(k)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'}\sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F} |\Delta x^d(k,t)|^2\right),$$

где $\alpha \in [0,1]$, $\Delta x = x - x^{\mathrm{I}}$, $\Delta x^d = x^d - x^{d\mathrm{I}}$. Из выше приведенной формулы следует, что в данном случае функционал $J(m^{\mathrm{I}}, m)$ представляет собой половину квадрата по состояниям процесса.

Согласно указанному принципу расширения по заданному элементу $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$, на котором $I_\alpha(m^{\mathrm{II}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) < < I_\alpha(m^{\mathrm{I}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, или $L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) - L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right) < 0$. Рассмотрим приращение функционала $L_\alpha(m)$, по формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned}\Delta L_\alpha \approx\; & G_{x_F}^{\mathrm{T}}\Delta x_F + \frac{1}{2}\Delta x_F^{\mathrm{T}} G_{x_F x_F}\Delta x_F - \\ & - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Big(R_x^{\mathrm{T}}\Delta x + R_u^{\mathrm{T}}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}} R_{xx}\Delta x + \\ & + \Delta x^{\mathrm{T}} R_{xu}\Delta u\Big) + \sum_{\mathbf{K}'}\Big(G_{x_F^d}^{d\mathrm{T}}\Delta x_F^d + G_x^{d\mathrm{T}}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta(x_F^d)^{\mathrm{T}} G^d_{x_F^d x_F^d}\Delta x_F^d + \\ & + \Delta(x_F^d)^{\mathrm{T}} G^d_{x_F^d x_F}\Delta x_F\Big) - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}\Big(R_{x^d}^{d\mathrm{T}}\Delta x^d + R_x^{d\mathrm{T}}\Delta x + R_{u^d}^{d\mathrm{T}}\Delta u^d + \\ & + \frac{1}{2}\Delta u^{d\mathrm{T}} R^d_{u^d u^d}\Delta u^d + \frac{1}{2}\Delta x^{d\mathrm{T}} R^d_{x^d x^d}\Delta x^d + \Delta x^{\mathrm{T}} R^d_{xx}\Delta x + \\ & + \Delta x^{d\mathrm{T}} R^d_{x^d u^d}\Delta u^d + \Delta x^{\mathrm{T}} R^d_{x u^d}\Delta u^d + \Delta x^{d\mathrm{T}} R^d_{x^d x}\Delta x\Big),\end{aligned}$$

где $\Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta x = x - x^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^d = u^d - u^{d\mathrm{I}}$, $\Delta x^d = x^d - x^{d\mathrm{I}}$, $\Delta x_F^d = = x_F^d - x_F^{d\mathrm{I}}$, $x_F = x(k_F)$. Здесь функции $R,\ G,\ R^d,\ G^d$ определены для функционала I_α, а их первые и вторые производные подсчитаны при $u = u^{\mathrm{I}}(k),\ x = x^{\mathrm{I}}(k),\ x^d = x^{d\mathrm{I}}(k,t),\ u^d = u^{d\mathrm{I}}(k,t)$.

Найдем $\Delta u,\ \Delta u^d$ доставляющие максимум выражениям, стоящим под знаками сумм $\sum\limits_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}$ и $\sum\limits_{\mathbf{T}(z)\setminus t_F}$ соответственно. Имеем:

$$R_{u^d}^d + R^d_{u^d u^d}\Delta u^d + R^d_{x^d u^d}\Delta x^d + R^d_{x u^d}\Delta x = 0.$$

Тогда $\Delta u^d = -(R^d_{u^d u^d})^{-1}(R^d_{u^d} + R^d_{u^d x^d}\Delta x^d + R^d_{u^d x}\Delta x)$. Аналогично $\Delta u = = -(R_{uu})^{-1}(R_u + R_{xu}\Delta x)$. Найденные формулы для приращений управлений обоих уровней подставим в выражение для приращения функционала ΔL_α и выполним необходимые преобразования, итог которых обозначим через ΔM_α. Имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta M_\alpha \approx\ & G^{\mathrm{T}}_{x_F}\Delta x_F + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}_F G_{x_F x_F}\Delta x_F - \\
& - \sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F} \Big((R_x - R_{xu}(R_{uu})^{-1}R^{\mathrm{T}}_u)\Delta x + \\
& + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}(R_{xx} - R_{xu}(R_{uu})^{-1}R^{\mathrm{T}}_{xu})\Delta x - \frac{1}{2}R^{\mathrm{T}}_u(R_{uu})^{-1}R_u\Big) + \\
& + \sum_{\mathbf{K}'}\Big(G^{d\mathrm{T}}_{x^d_F}\Delta x^d_F + G^{d\mathrm{T}}_x\Delta x + \frac{1}{2}\Delta(x^d_F)^{\mathrm{T}}G^d_{x^d_F x^d_F}\Delta x^d_F + \\
& + \Delta(x^d_F)^{\mathrm{T}}G^d_{x^d_F x_F}\Delta x_F\Big) - \\
& - \sum_{\mathbf{T}(z)\backslash t_F}\Big((R^d_{x^d} - R^d_{x^d u^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^{d\mathrm{T}}_{u^d})\Delta x^d + \\
& + \frac{1}{2}\Delta x^{d\mathrm{T}}(R^d_{x^d x^d} - R^d_{x^d u^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^{d\mathrm{T}}_{x^d u^d})\Delta x^d - \\
& + (R^d_x - R^d_{xu^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^{d\mathrm{T}}_{u^d})\Delta x + \\
& + \Delta x^{\mathrm{T}}(R^d_{xx} - R_{xu^d}{R^d_{u^d u^d}}^{-1}R^{d\mathrm{T}}_{xu^d})\Delta x + \\
& + \Delta x^{\mathrm{T}}(R^d_{xx^d} - R_{xu^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^d_{x^d u^d})\Delta x^d - \frac{1}{2}R^{d\mathrm{T}}_{u^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^d_{u^d}\Big).
\end{aligned}$$

Зададим функции φ и $\varphi^d\,(z)$ в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi =\ & \psi^{\mathrm{T}}\,(k)\,x\,(k) + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k)\Delta x(k), \\
\varphi^d =\ & \lambda^{\mathrm{T}}(k,t)x(k) + \psi^{d\mathrm{T}}(k,t)x^d(k,t) + \\
& + \frac{1}{2}\Delta x^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t)\Delta x^d(k,t) + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}(k)\Lambda(k,t)\Delta x^d(k,t) + \\
& + \frac{1}{2}\Delta x^{d\mathrm{T}}(k,t)\Lambda^T(k,t)\Delta x(k) + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k,t)\Delta x(k),
\end{aligned}$$

где ψ, ψ^d, λ — вектор-функции, $\sigma, \sigma^d, \Lambda$ — матрицы, и таким образом, чтобы приращение функционала ΔM_α не зависело от $\Delta x,\ \Delta x_F,\ \Delta x^d_F,\ \Delta x^d$. Последнее требование будет достигнуто, если:

$$G_x = 0,\quad G^d_{x^d_F} = 0,\quad G_{xx} = 0,\quad G^d_{x^d_F x^d_F} = 0,\quad G^d_{x^d_F} = 0,$$

$$R_x - R_{xu}R^{-1}_{uu}R^{\mathrm{T}}_u = 0,\quad R_{xx} - R_{xu}R^{-1}_{uu}R^{\mathrm{T}}_{xu} = 0,$$

$$R^d_{x^d} - R^d_{x^d u^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^{d\mathrm{T}}_{u^d} = 0,\quad R^d_{xx^d} - R^d_{xu^d}(R^d_{u^d u^d})^{-1}R^{d\mathrm{T}}_{x^d u^d} = 0.$$

Расшифровка указанных условий приводит к задаче Коши для НДС относительно $\psi,\ \psi^d,\ \lambda,\ \sigma,\ \sigma^d,\ \Lambda$ с начальными условиями на правом конце, в которых E — единичные матрицы соответствующих размеров:

$$
\begin{aligned}
\psi\left(k_F\right) &= -\alpha F_{x(k_F)},\\
\psi(k) &= H_x - \left(f_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)f_u + H_{xu}\right)\times\\
&\times\left(f_u^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)f_u + (H_{uu})^{-1}H_u^{\mathrm{T}}\right),\quad k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,\\
\sigma(k_F) &= -\alpha F_{x(k_F)x(k_F)} + (1-\alpha)E,\\
\sigma(k) &= f_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)f_x + H_{xx} - \left(f_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)f_u + H_{xu}\right)\times\\
&\times\left(f_u^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)f_u + H_{uu}\right)^{-1}\left(f_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)f_u + H_{xu}\right)^{\mathrm{T}},\\
&\quad k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,\\
\psi^d\left(k,t_F\right) &= H^d_{x^d_F}(\psi(k+1)),\\
\psi^d(k,t) &= H^d_{x^d} + (f^{d\mathrm{T}}_{x^d}\sigma^d(k,t+1)f^d_{u^d} + H^d_{x^du^d})(H^d_{u^du^d})^{-1}H^{d\mathrm{T}}_{u^d},\\
&\quad k\in\mathbf{K}',\\
\sigma^d(k,t_F) &= \theta^{\mathrm{T}}_{x^d_F}\sigma(k+1)\theta_{x^d_F} + H^d_{x^d_Fx^d_F},\\
\sigma^d(k,t) &= f^{d\mathrm{T}}_{x^d}\sigma^d(k,t+1)f^d_{x^d} + H^d_{x^dx^d} - \left(f^{d\mathrm{T}}_{x^d}\sigma^d(k,t+1)f^d_{u^d} +\right.\\
&\left.+ H^d_{x^du^d}\right)\times\left(f^{d\mathrm{T}}_{u^d}\sigma^d(k,t+1)f^d_{u^d} + H^d_{u^du^d}\right)^{-1}\times\\
&\times\left(f^{d\mathrm{T}}_{x^d}\sigma^d(k,t+1)f^d_{u^d} + H^{d\mathrm{T}}_{x^du^d}\right)^{\mathrm{T}},\quad k\in\mathbf{K}',\\
\psi(k) &= H_x(\psi(k+1)) + \lambda(t_I) + \xi_x^{\mathrm{T}}\lambda(t_I) - \lambda(t_F),\\
\lambda(k,t_F) &= H_{x_F}(\psi(k+1)),\\
\lambda(k,t) &= H^d_x(\psi^d(k,t+1)).
\end{aligned}
$$

Здесь для краткости в правых частях указаны лишь аргументы $\psi(k+1)$ и $\psi^d(k,t+1)$, необходимые для понимания соотношений.

$$
\begin{aligned}
\sigma(k) = \theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_x + H_{xx} + \xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_i^d}\sigma(k+1)\theta_x+&\\
+\theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_i^d}\xi_x + \xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_i^d}^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_i^d}\xi_x+&\\
+\xi_x^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t_i)\xi_x + \xi_x\Lambda(k,t_i) + \Lambda^{\mathrm{T}}(k,t_i)\xi_x^{\mathrm{T}}&,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda(k,t) &= f^d_{x^d}\Lambda(k,t+1)f_x^{d\mathrm{T}} - f^d_{xx^d},\\
\Lambda(k,t_F) &= \theta_x^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta_{x_i^d} + H_{x^dx}(k,t_i),\\
H(k,\psi,x_I^d,x_F^d) &= \psi^{\mathrm{T}}\theta(z,x_I^d,x_F^d),\quad k\in\mathbf{K}',\\
H^d(k,t,z,\psi^d,x^d,u^d) &= \psi^{d\mathrm{T}}f^d(k,z,x^d,u^d) -\\
&- f^k(k,z,x^d,u^d) - (1-\alpha)\frac{1}{2}|\Delta x^d(k,t)|^2,
\end{aligned}
$$

$$x(k_i) = x_i, \quad x(k_F) = x_F, \quad x^d(k, t_i) = x_i^d, \quad x^d(k, t_F) = x_F^d.$$

При этом приращения управляющих воздействий имеют вид:

$$\Delta u(k) = -(f_u^{\mathrm{T}} \sigma(k+1) f_u + H_{uu})^{-1} \times \\ \times \left(H_u + (f_x^{\mathrm{T}} \sigma(k+1) f_u + H_{xu})^{\mathrm{T}} \Delta x(k) \right),$$

$$\Delta u^d(k, t) = -\left(f_{u^d}^{d\mathrm{T}} \sigma^d(k, t+1) f_{u^d}^d + H_{u^d u^d}^d \right)^{-1} \times \\ \times \Big(H_{u^d}^d + (f_{x^d}^{d\mathrm{T}} \sigma^d(k, t+1) f_{u^d}^d + H_{x^d u^d}^d)^{\mathrm{T}} \Delta x^d(k, t) + \\ + (f_x^{d\mathrm{T}} \sigma^d(k, t+1) f_{u^d}^d + H_{x u^d}^d)^{\mathrm{T}} \Delta x(k) \Big).$$

Замечание 1. Отметим тот факт, что приращения управлений обоих уровней зависят от соответствующих состояний этих же уровней. Следовательно решение поставленной задачи представляет собой линейный приближенный синтез оптимального управления.

Замечание 2. Уравнения для матриц σ и σ^d представляют собой матричные уравнения Риккати, которые могут и не иметь решения. В этом случае алгоритм должен быть дополнен специальной процедурой построения управляющих воздействий. Разработка такой процедуры требует проведения специального исследования и подбора примеров, что выходит за рамки этой статьи.

4. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру.

1. «Слева направо» просчитывается НДС (1), (2) при $u = u_s(k)$, $u^d = u_s^d(k, t)$ и заданных начальных условиях, получается соответствующая траектория $(x_s(k),\ x_s^d(k, t))$.
2. «Справа налево» разрешается НДС относительно $\psi(k)$, $\psi^d(k, t)$, $\lambda(k, t), \sigma(k), \sigma^d(k, t), \Lambda(k, t)$.
3. Находятся Δu, Δu^d и новые управления $u = u_s(k) + \Delta u$, $u^d = u_s^d(k, t) + \Delta u^d$.
4. При найденных управлениях и начальном условии $x(k_I) = x_I$ просчитывается «слева направо» исходная НДС (1), (2). Тем самым определяется новый элемент m_{s+1}.

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Работоспособность построенного метода была проверена на двух иллюстративных примерах. Пример 2 был ранее использован в работе [7] и специально решен предлагаемым методом для сравнения.

5. Примеры

Пример 1. *Пусть задана НДС, состоящая из двух этапов, обозначенных номерами 0 и 1. На нулевом этапе управляемый процесс описывается одним уравнением:*

$$x^d(t+1) = x^d(t) + \sin\left(u_1^d(t)\right), \quad x^d(0) = 1, \quad t = 0, 1, 2, 3.$$

Задан промежуточный функционал этапа:

$$I^0 = (u_1^d(t) - t)^2.$$

Следующий первый этап характеризуется другим уравнением и своим промежуточным функционалом:

$$x^d(t+1) = x^d(t)u_2(t), \quad t = 4, 5, 6, \quad I^1 = \frac{1}{2}((x^d(t))^2 + (u_2^d(t))^2).$$

Задан общий функционал задачи:

$$I = x^d(7) \to \min.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{K} = 0, 1, 2$, $\mathbf{K}' = 1$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^d, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня:

$$x(0) = x^d(0, 0), \quad x(1) = x^d(0, 4), \quad x(2) = x^d(1, 7), \quad x^d(1, 4) = x(1).$$

Так как множество $\mathbf{K}'$ состоит из одного элемента, то для удобства расчетов, модель может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передачи информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда

$$x(3) = x(2) = x^d(1, 7), \quad \mathbf{K}' = 1, 2, \quad \theta(k) = x^d(k, t_F), \quad \xi(k) = x(k).$$

Заметим, что на обоих этапах процесс нижнего уровня не зависит от переменных состояния верхнего уровня, тогда

$$\lambda(0, t) = \lambda(1, t) = 0, \quad \Lambda(0, t) = \Lambda(1, t) = 0.$$

Запишем задачу и конструкции в терминах НДС. Имеем:

$$\begin{aligned}
f^d(0,t) &= x^d(t) + \sin\left(u_1^d(t)\right), & f^d(1,t) &= x^d(t)u_2(t),\\
f^d_{x^d}(0,t) &= 1, & f^d_{x^d}(1,t) &= u_2(t),\\
f^d_{u_1^d}(0,t) &= \cos\left(u_1^d(t)\right), & f^d_{u_2^d}(1,t) &= x^d(t);
\end{aligned}$$

$$H^d(0,t) = \psi^d(0,t+1)\left(x^d(t) + \sin\left(u_1^d(t)\right)\right) - \\ - (u_1^d(t) - t)^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta x^d(0,t)|^2,$$

$$\begin{aligned} H^d_{x^d}(0,t) &= \psi^d(0,t+1), & H^d_{x^d x^d}(0,t) &= \alpha - 1, \\ H^d_{u_1^d}(0,t) &= \psi^d(0,t+1)\cos\left(u_1^d(t)\right) + 2(t - u_1^d(t)), \\ H^d_{u_1^d u_1^d}(0,t) &= -\psi^d(0,t+1)\sin\left(u_1^d(t)\right) - 2, & H^d_{x^d u_1^d}(0,t) &= 0; \end{aligned}$$

$$H^d(1,t) = \psi^d(1,t+1)x^d(t)u_2^d(t) - \frac{1}{2}((x^d(t))^2 + (u_2^d(t))^2) - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta x^d(1,t)|^2,$$

$$\begin{aligned} H^d_{x^d}(1,t) &= \psi^d(1,t+1)u_2^d(t) - x^d(t), & H^d_{x^d x^d}(1,t) &= \alpha - 2, \\ H^d_{u_2^d}(1,t) &= -2\psi^d(1,t+1)(t - u_2^d(t)) - 1, \\ H^d_{u_2^d u_2^d}(1,t) &= -1, & H^d_{x^d u_2^d}(1,t) &= \psi^d(1,t+1). \end{aligned}$$

Управляющие воздействия являются результатом решения следующих уравнений:

$$\psi(2) = \psi(3) = -\alpha, \quad \psi(1) = \psi(0) = 0,$$

$$\psi^d(1,7) = \psi(2)u_2^d(6) - x^d(1,7), \qquad \psi^d(0,4) = \psi(1),$$

$$\begin{aligned} \psi^d(1,t) &= \psi^d(1,t+1)u_2^d(t) - x^d(t) + \left(x^d(t)u_2^d(t)\sigma^d(1,t+1) + \right. \\ &\quad \left. + \psi^d(1,t+1)\right) \times \left(2\psi^d(1,t+1)(t - u_2^d(t)) + 1\right), \\ \psi^d(0,t) &= \psi^d(0,t+1) - \Big(\cos\left(u_1^d(t)\right)\sigma^d(0,t+1) \times \\ &\quad \times \left(\psi^d(0,t+1)\cos\left(u_1^d(t)\right) + 2(t - u_1^d(t))\right)\Big) \times \\ &\quad \times \left(\psi^d(0,t+1)\sin\left(u_1^d(t)\right) + 2\right)^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(2) &= 1 - \alpha, & \sigma(1) &= \sigma(2) + \sigma^d(1,7) = -\alpha, \\ \sigma^d(1,7) &= \sigma(2) + \alpha - 2 = -1, & \sigma^d(0,4) &= \sigma(1) + \alpha - 1 = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^d(1,t) &= (u_2^d(t))^2\sigma^d(1,t+1) + \alpha - 2 - \\ &\quad - \left((u_2^d(t)\sigma^d(1,t+1)x^d(t) + \psi^d(1,t+1))^2\right) \times \\ &\quad \times \left((x^d(t))^2\sigma^d(1,t+1) - 1\right)^{-1}, \\ \sigma^d(0,t) &= \sigma^d(0,t+1) + \alpha - 1 - \left(\sigma^d(0,t+1)\cos\left(u_1^d(t)\right)\right)^2 \times \\ &\quad \times \left(\sigma^d(0,t+1)\cos^2\left(u_1^d(t)\right) - \psi^d(0,t+1)\sin\left(u_1^d(t)\right) - 2\right)^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u^d(0,t) &= -\left(\psi^d(0,t+1)\cos\left(u_1^d(t)\right) + 2(t - u_1^d(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^d(0,t+1)\cos\left(u_1^d(t)\right)\Delta x^d(0,t)\right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\sigma^d(0,t+1)\cos^2\left(u_1^d(t)\right) - \psi^d(0,t+1)\sin\left(u_1^d(t)\right) - 2\right)^{-1},$$

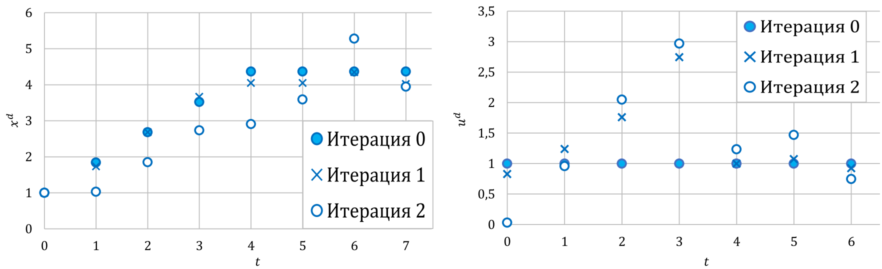
$$\Delta u^d(1,t) = \left(2\psi^d(1,t+1)(t-u_2^d(t)) + 1 - \left(x^d(t)u_2^d(t)\sigma^d(1,t+1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \psi^d(1,t+1)\right)\Delta x^d(1,t)\right) \times \left((x^d(t))^2\sigma^d(1,t+1) - 1\right)^{-1}.$$

Решение получено за 2 итерации. Изменение функционала по итерациям представлено в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчетов примера 1

Итерация j	α	$I = x^d(7) \to \min$	$\lvert I_j - I_{j-1}\rvert$
0		4.366	
1	0.2	4.024	0.342
2	0.6	3.947	0.077

При расчетах выбор значения α осуществлялся для обеспечения минимума функционала и находился перебором в диапазоне от 0 до 1 с шагом 0.1. Графики переменных состояния и управления приведены на рисунках 1*а* и 1*б*.



(*а*) Состояние (*б*) Управление

Рисунок 1. Результаты расчетов примера 1

Пример 2. *Двухэтапная задача:*

1-й этап:

$$x^d(t+1) = -2x^d(t) + (u_1^d(t))^2, \quad x^d(0) = 1, \quad t = 0,1,2,3,$$

$$I^0 = \frac{1}{2}(x^d(t))^2 + \frac{1}{3}(u_1^d(t))^3;$$

2-й этап:

$$x^d(t+1) = (t - u_2^d(t))^2, \quad t = 4,5,6, \quad I^1 = \frac{1}{2}(x^d(t))^2 + u_2^d(t);$$

$$I = x^d(7) \to \min.$$

Как и в предыдущем примере, представим эту систему в виде НДС. Имеем $\mathbf{K} = 0, 1, 2$, $\mathbf{K}' = 1$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^d, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня:

$$x(0) = x^d(0,0), \quad x(1) = x^d(0,4), \quad x(2) = x^d(1,7), \quad x^d(1,4) = x(1).$$

Так как множество $\mathbf{K}'$ состоит из одного элемента, то для удобства расчетов, модель может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передачи информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда

$$x(3) = x(2) = x^d(1,7), \quad \mathbf{K}' = 1, 2, \quad \theta(k) = x^d(k, t_F), \quad \xi(k) = x(k).$$

На обоих этапах процесс нижнего уровня также не зависит от переменных состояния верхнего уровня, тогда

$$\lambda(0,t) = \lambda(1,t) = 0, \ \Lambda(0,t) = \Lambda(1,t) = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
f^d(0,t) &= -2x^d(t) + (u_1^d(t))^2, & f^d(1,t) &= (t - u_2^d(t))^2, \\
f^d_{x^d}(0,t) &= -2, & f^d_{x^d}(1,t) &= 0, \\
f^d_{u_1^d}(0,t) &= 2u_1^d(t), & f^d_{u_2^d}(1,t) &= -2(t - u_2^d(t));
\end{aligned}$$

$$H^d(0,t) = \psi^d(0,t+1)(-2x^d(t) + (u_1^d(t))^2) - \frac{1}{2}(x^d(t))^2 - \\ - \frac{1}{3}(u_1^d)^3 - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta x^d(0)|^2,$$

$$\begin{aligned}
H^d_{x^d}(0,t) &= -2\psi^d(0,t+1) - x^d(t), \quad & H^d_{x^d x^d}(0,t) &= \alpha - 2, \\
H^d_{u_1^d}(0,t) &= 2\psi^d(0,t+1)u_1^d(t) - (u_1^d(t))^2, \\
H^d_{u_1^d u_1^d}(0,t) &= 2\psi^d(0,t+1) - 2u_1^d(t), & H^d_{x^d u_1^d}(0,t) &= 0;
\end{aligned}$$

$$H^d(1,t) = \psi^d(1,t+1)(t - u_2^d)^2 - \frac{1}{2}(x^d)^2 - u_2^d(t) - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta x^d(1)|^2,$$

$$\begin{aligned}
H^d_{x^d}(1,t) &= -x^d(t), & H^d_{x^d x^d}(1,t) &= \alpha - 2, \\
H^d_{u_2^d}(1,t) &= -2\psi^d(1,t+1)(t - u_2^d(t)) - 1, \\
H^d_{u_2^d u_2^d}(1,t) &= 2\psi^d(1,t+1), & H^d_{x^d u_2^d}(1,t) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\psi(2) = \psi(3) = -\alpha, \quad \psi(1) = \psi(0) = 0,$$

$$\psi^d(1,7) = -x^d(1,7), \qquad \psi^d(0,4) = -2\psi(1) - x^d(0,4),$$

$$\begin{aligned}
\psi^d(1,t) &= -x^d(t),\\
\psi^d(0,t) &= -2\psi^d(0,t+1) - x^d(t) -\\
&- \left(2(u_1^d(t))^2\sigma^d(0,t+1)(2\psi^d(0,t+1) - u_1^d(t))\right) \times\\
&\times \left(\psi^d(0,t+1) - u_1^d(t)\right)^{-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(2) &= 1-\alpha, & \sigma(1) &= \sigma(2) + \sigma^d(1,7) = -\alpha,\\
\sigma^d(1,7) &= \sigma(2) + \alpha - 2 = -1, & \sigma^d(0,4) &= \sigma(1) + \alpha - 2 = -2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^d(1,t) &= \alpha - 2,\\
\sigma^d(0,t) &= 4\sigma^d(0,t+1) + \alpha - 2 - 8\left(u_1^d(t)\sigma^d(0,t+1)\right)^2 \times\\
&\times \left(2(u_1^d(t))^2\sigma^d(0,t+1) + \psi^d(0,t+1) - u_1^d(t)\right)^{-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u^d(0,t) &= -u_1^d(t)\left(2\psi^d(0,t+1) - u_1^d(t) - 4\sigma^d(0,t+1)\Delta x^d(0,t)\right) \times\\
&\times \left(4(u_1^d(t))^2\sigma^d(0,t+1) + 2\psi^d(0,t+1) - 2u_1^d(t)\right)^{-1},\\
\Delta u^d(1,t) &= \left(2\psi^d(1,t+1)(t - u_2^d(t)) + 1\right) \times\\
&\times \left(4\sigma^d(1,t+1)(t - u_2^d(t))^2 + 2\psi^d(1,t+1)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

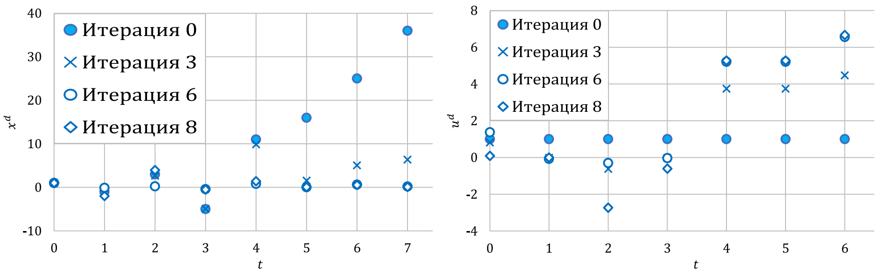
Решение получено за 8 итераций. Изменение функционала по итерациям представлено в таблице 2.

Таблица 2. Результаты расчетов примера 2

Итерация j	α	$I = x^d(7) \to \min$	$\lvert I_j - I_{j-1}\rvert$
0		36	
1	0.5	23.702	12.298
2	0.5	13.197	10.505
3	0.5	6.379	6.818
4	0.4	2.199	4.180
5	0.4	0.506	1.693
6	0.4	0.195	0.311
7	0.3	0.117	0.078
8	0.3	0.109	0.008

Графики переменных состояния и управления приведены на рисунках 2*а* и 2*б*.

Отметим, что этот пример имеет более сложную структуру. Его решение другим методом приведено в работе [7]. Варьирование параметра альфа позволило получить меньшее значение функционала по сравнению



(*а*) Состояние (*б*) Управление

Рисунок 2. Результаты расчетов примера 2

с результатом работы [7].

Заключение

Таким образом, решенные примеры подтверждают работоспособность построенного метода, который имеет более сложную структуру по сравнению с методом из работы [7] за счет необходимости решения матричных уравнений Риккати для сопряженных переменных. При этом количество итераций незначительно увеличивается, но позволяет получить меньшее значение функционала, чем в [7].

Также дан ответ на вопрос, поставленный в начале статьи: понятие сильного относительного минимума можно использовать для построения метода улучшения для НДС.

Список использованных источников

[1] Расина И. В. *Иерархические модели управления системами неоднородной структуры*.– М.: Физматлит.– 2014.– ISBN 978-5-94052-238-6.– 160 с. ↑24

[2] Гурман В. И. *Принцип расширения в задачах управления*.– М.: Наука.– 1985.– 288 с. ↑24, 27

[3] Rasina I., Danilenko O. *Second-order improvement method for discrete-continuous systems with intermediate criteria*, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018) // IFAC-Papers Online.– 2018.– Pp. 184–188. doi ↑24

[4] Расина И. В., Гусева И. С. *Метод улучшения управления для неоднородных дискретных систем с промежуточными критериями* // Программные системы: теория и приложения.– 2018.– Т. **9**.– № 2(37).– С. 23–28. doi URL ↑25, 26, 27

[5] Гурман В. И. *Абстрактные задачи оптимизации и улучшения* // Программные системы: теория и приложения.– 2011.– Т. **2**.– № 5(9).– С. 21–29. ↑27

[6] Гурман В. И., Расина И. В. *О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума* // Автоматика и телемеханика.– 1979.– № 10.– С. 12–18. ↑27

[7] Расина И. В., Блинов А. О. *Метод минимаксного улучшения для неоднородных дискретных систем* // Программные системы: теория и приложения.– 2023.– Т. **14**.– № 4(59).– С. 47–66. ↑32, 36, 37

Поступила в редакцию 04.04.2025;
одобрена после рецензирования 27.05.2025;
принята к публикации 09.07.2025;
опубликована онлайн 19.07.2025.

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. М. Г. Дмитриев*

Информация об авторах:

Ирина Викторовна Расина

д.ф.-м.н., гл. научн. сотр. Исследовательского центра медицинской информатики Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН. Специалист в области моделирования и управления гибридными системами, автор и соавтор более 130 статей и 5 монографий

0000-0001-8939-2968

e-mail: *irinarasina@gmail.com*

Ирина Сергеевна Гусева

к.ф.-м.н., ст.преп. Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, РФ, респ. Бурятия, г. Улан-Удэ; автор и соавтор более 20 публикаций; область интересов – оптимальное управление, численные методы

0000-0001-8720-3676

e-mail: *gulina.ig@gmail.com*

Авторы внесли равный вклад в подготовку публикации.

Декларация об отсутствии личной заинтересованности: *благополучие авторов не зависит от результатов исследования.*

PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS ISSN 2079-3316
Research Article OPTIMIZATION METHODS AND CONTROL THEORY

UDC 517.977.5
10.25209/2079-3316-2025-16-3-23-40

Strong control improvement method for non-homogeneous discrete systems

Irina Viktorovna **Rasina**[1], Irina Sergeevna **Guseva**[2]
[1] Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia
[2] Buryat State University, Ulan-Ude, Russia
[1]✉ *irinarasina@gmail.com*

Abstract. The class of non-homogeneous discrete systems (NDS) with intermediate criterions is considered. These systems are two-level and are prevalent in practice. They can be also obtained via discretization of continuous systems in the process of solving optimization problems using iterative methods. For this class of systems a strong improvement method of the second order is constructed based on the analogue of Krotov type sufficient optimality conditions.

The authors of the article question the assertion that for classical discrete control systems, as well as for heterogeneous ones, there is no sense in introducing the concept of a strong relative minimum. Therefore, when constructing an improvement method, we put forward the requirement of proximity of neighboring approximations from the class of admissible only by the process states at both levels. The resulting method contains a vector-matrix two-level system for conjugate variables. The increment of controls at each level linearly depends on the corresponding states, which allows finding a solution in the form of approximate linear synthesis of optimal control.

The method was tested on two illustrative examples, which showed its efficiency. The application of the developed method to a more complex example allowed us to obtain a smaller value of the functional than that found earlier by a similar in structure minimax improvement method. (*In Russian*).

Key words and phrases: non-homogeneous discrete systems, intermediate criterions, optimal control

2020 *Mathematics Subject Classification*: 49M99; 49K99

For citation: Irina V. Rasina, Irina S. Guseva. *Strong control improvement method for non-homogeneous discrete systems*. Program Systems: Theory and Applications, 2025, **16**:3(66), pp. 23–40. (*In Russ.*). `https://psta.psiras.ru/read/psta2025_3_23-40.pdf`

References

[1] I. V. Rasina. *Hierarchical control models of heterogeneous structure systems*, Fizmatlit, M., 2014, ISBN 978-5-94052-238-6, 160 pp. (in Russian).

[2] V. I. Gurman. *Extension Principle in Control Problems*, Nauka, M., 1985, 228 pp. (in Russian).

[3] I. Rasina, O. Danilenko. "Second-order improvement method for discrete-continuous systems with intermediate criteria", 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018), *IFAC-Papers Online*, 2018, pp. 184–188.

[4] I. V. Rasina, I. S. Guseva. "Control improvement method for non-homogeneous discrete systems with intermediate criterions", *Program Systems: Theory and Applications*, **9**:2(37) (2018), pp. 23–38 (in Russian).

[5] V. I. Gurman. "Abstract problems of optimization and improvement", *Program Systems: Theory and Applications*, **2**:5(9) (2011), pp. 21–29 (in Russian).

[6] V. I. Gurman, I. V. Rasina. "On practical applications of conditions sufficient for a strong relative minimum", *Autom. Remote Control*, **40**:10 (1980), pp. 1410–1415. ,

[7] I. V. Rasina, A. O. Blinov. "Minimax improvement method for inhomogeneous discrete systems", *Program Systems: Theory and Applications*, **14**:4(59) (2023), pp. 47–66 (in Russian).