


УДК 517.977

 10.25209/2079-3316-2026-17-2-327-341

Лоренцева задача на группе $SE(2)$

Юрий Леонидович Сачков^{1✉}, Иван Андреевич Галяев²

¹ Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Вельково, Россия

² Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

✉ yusachkov@gmail.com

Аннотация. С точки зрения глобальной дифференциальной геометрии, общая теория относительности описывается лоренцевой геометрией. Работа посвящена исследованию лоренцевой геометрии на группе $SE(2)$: решается задача поиска лоренцевых длиннейших, максимизирующих функционал длины вдоль допустимых кривых. Для лоренцевой задачи на группе $SE(2)$ доказано отсутствие глобально оптимальных траекторий. Доказана полная управляемость рассматриваемой системы. Применен принцип максимума Понтрягина. Доказана интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. Анормальные и нормальные экстремали параметризованы эллиптическими функциями Якоби.

Ключевые слова и фразы: Лоренцевы длиннейшие, множество достижимости, экстремали, лоренцева геометрия, группы Ли

Благодарности: Данное исследование выполнено в рамках научно-исследовательского проекта № FL-9524115148 Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан.

Для цитирования: Сачков Ю. Л., Галяев И. А. *Лоренцева задача на группе $SE(2)$* // Программные системы: теория и приложения. 2026. Т. 17. № 2(71). С. 327–341. https://psta.psiras.ru/read/psta2026_2_327-341.pdf

1. Введение

Согласно общей теории относительности, гравитационное поле задается в метрике лоренцевой сигнатуры на 4-мерном пространственно-временном многообразии, а световые лучи представляют собой светоподобные геодезические этой пространственно-временной метрики. С математической точки зрения, теория гравитационного линзирования, таким образом, является теорией светоподобных геодезических в 4-мерном многообразии с лоренцевой метрикой [1–3].

Важной исследовательской задачей является исследование лоренцевой геометрии. Например, в [4] сопоставляются методы и результаты лоренцевой геометрии с методами и результатами римановой геометрии. Результаты из римановой геометрии Чигера–Громова о конечности, утверждающие, что существует лишь конечное число типов диффеоморфизмов многообразий, удовлетворяющих определенным геометрическим ограничениям, обобщаются на лоренцеву геометрию. В [5] исследуются геометрические характеристики плоской периодической структуры с тремя степенями свободы. В [6] для некоммутативной геометрии найдена лоренцева версия известной формулы расстояния Коннеса.

В лоренцевой геометрии информация может распространяться вдоль кривых с векторами скорости из некоторого острого конуса. Естественной является задача отыскания лоренцевых длиннейших, максимизирующих функционал типа длины вдоль допустимых кривых. Поэтому важной задачей является описание лоренцевых длиннейших для всех пар точек, где вторая достижима из первой вдоль допустимой кривой. Эта задача полностью исследована лишь в простейших случаях для лоренцевых структур постоянной кривизны (пространства де Ситтера и пространства анти де Ситтера) [3], левоинвариантной лоренцевой структуры в \mathbb{R}^{n+1} для пространства Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} [7], для левоинвариантных лоренцевых структур на двумерной разрешимой группе Ли [8] и для левоинвариантных лоренцевых структур на группе Гейзенберга [12].

Статья посвящена исследованию лоренцевой задачи на группе Ли $SE(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$, где \mathbb{R}^2 — пространство положений, а $SO(2)$ — пространство ориентаций. Решается задача поиска лоренцевых длиннейших, максимизирующих функционал длины вдоль допустимых кривых. Для этой задачи доказано отсутствие глобально оптимальных траекторий. Доказана полная управляемость рассматриваемой системы. Применен принцип максимума Понтрягина. Доказана интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы принципа максимума. Получена параметризация

анормальных и нормальных экстремальных траекторий эллиптическими функциями Якоби.

2. Постановка лоренцевой задачи на $SE(2)$

Группа $SE(2)$ является трехмерной группой Ли и задается множеством матриц:

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} \cos \theta & \sin \theta & x \\ -\sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Общая постановка задачи оптимального управления о нахождении лоренцевых длиннейших приведена в [3, 11, 12]. В этой статье приведем частный случай постановки лоренцевой задачи на $SE(2)$:

$$(1) \quad \dot{x} = u_1 \cos \theta + u_3 \sin \theta,$$

$$(2) \quad \dot{y} = u_1 \sin \theta - u_3 \cos \theta,$$

$$(3) \quad \dot{\theta} = u_2,$$

$$(4) \quad u_1 \geq \sqrt{u_2^2 + u_3^2},$$

$$(5) \quad q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$(6) \quad J(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2} dt \rightarrow \max.$$

3. Полная управляемость

Воспользуемся следующим предложением.

СЛЕДСТВИЕ 1 (из Теоремы 6.7 [14]). Пусть дана управляемая система

$$(7) \quad \dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q) + u_3 X_3(q), \quad q \in SE(2), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^3,$$

и линейная оболочка множества $\{u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q) + u_3 X_3(q) \mid (u_1, u_2, u_3) \in U\}$ есть касательное пространство $T_q SE(2)$ для любого $q \in SE(2)$, тогда система (7) вполне управляема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Управляемая система (1)–(4) вполне управляема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in U$, чтобы их линейная оболочка совпадала с пространством \mathbb{R}^3 :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} |u_2| \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} |u_3| \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что линейная оболочка множества U есть \mathbb{R}^3 . Поэтому $\{u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q) + u_3 X_3(q) \mid (u_1, u_2, u_3) \in U\} = T_q SE(2)$ для любого $q \in SE(2)$. Согласно следствию 1, система (1)–(4) вполне управляема. \square

4. Оптимальность траекторий

ТЕОРЕМА 1. *Для лоренцевой задачи на $SE(2)$ (1)–(6) не существует глобально оптимальных траекторий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует периодическая траектория, содержащая нетривиальную времениподобную дугу, то оптимальных траекторий не существует, так как значение функционала неограниченно возрастает при увеличении количества периодов. При этом в качестве начальной точки можно брать единицу группы $SE(2)$ в силу левоинвариантности задачи. Построим такую периодическую траекторию.

Возьмем времениподобную траекторию, соответствующую управлению $(u_1, u_2, u_3) \equiv (1, 0, 0)$ с начальным условием $q(0) = q_0$:

$$(8) \quad (x, y, \theta)(t) = (t, 0, 0), \quad t \in [0, T]$$

для некоторого $T > 0$. В силу полной управляемости системы существует ее траектория с началом $q(T)$ и концом q_0 . Конкатенация этой траектории с траекторией (8) даст периодическую траекторию с нетривиальной времениподобной дугой (8). Поэтому в задаче (1)–(6) не существует глобально оптимальных траекторий. \square

Несмотря на отсутствие глобально оптимальных траекторий, интерес представляет изучение локально оптимальных траекторий в данной задаче. Для этого далее описаны экстремальные траектории принципа максимума Понтрягина. Для исследования локальной оптимальности экстремальных траекторий необходимо изучить сопряженные точки. Этот вопрос весьма нетривиален (т.к. экстремальные траектории параметризуются эллиптическими функциями Якоби), и отложен для дальнейшего изучения.

5. Экстремальные траектории

Запишем общий вид функции Понтрягина

$$h_u^\nu = \langle p, \sum_{i=1}^3 u_i X_i \rangle + \nu \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}, \quad p \in T^*M, \quad \nu \leq 0.$$

Как следует из принципа максимума Понтрягина [10, 11], экстремальные управление $u(t)$ и траектория $q(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяют следующим условиям:

- (1) Гамильтонова система $\dot{p} = -\frac{\partial h_u^\nu}{\partial q}$, $\dot{q} = \frac{\partial h_u^\nu}{\partial p}$;
- (2) Условие максимума $h_{u(t)}^\nu(p(t), q(t)) = \max_{u \in \mathbb{R}^3} h_u^\nu(p(t), q(t))$;
- (3) Условие нетривиальности $(p(t), \nu) \neq (0, 0) \forall t \in [0, T]$.

Обозначим $h_i = \langle p, X_i \rangle$. Тогда функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$h_u^\nu = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 - \nu \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}.$$

В формулировке ПМП, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть два случая: $\nu = 0$ — аномальный случай и $\nu = -1$ — нормальный случай.

5.1. Аномальный случай принципа максимума Понтрягина

Пусть $\nu = 0$. Покажем, что экстремали являются траекториями гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$, при этом $H = 0$, $h_1 < 0$.

Если $h_1 > -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$, то функция $h_u(p, q)$ неограничена сверху, потому не достигает максимума на множестве U . Если $h_1 < -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$, то функция $h_u(p, q)$ достигает максимума на множестве U при $u_1 = u_2 = u_3$, что дает тривиальную экстремальную траекторию $q(t) \equiv q_0$. Нетривиальные экстремальные траектории получаются только в случае

$$(9) \quad h_1 = -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}, \quad (h_1, h_2, h_3) \neq (0, 0, 0),$$

при $u_1 = -h_1$, $u_2 = h_2$, $u_3 = h_3$. В этом случае гамильтоново векторное поле для гамильтониана h_u совпадает с гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$. Условия (9) означают, что $H = 0$, $h_1 < 0$.

Вертикальная подсистема (для переменных h_i) имеет вид:

$$\dot{h}_1 = \{H, h_1\} = -h_2 h_3,$$

$$\dot{h}_2 = \{H, h_2\} = -2h_1 h_3,$$

$$\dot{h}_3 = \{H, h_3\} = h_2 h_1,$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ есть скобка Пуассона [11]. Введем замену

$$h_1 = -r, \quad h_2 = r \cos \phi, \quad h_3 = r \sin \phi.$$

Тогда вертикальная подсистема примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^2 \cos \phi \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= -r(1 + \sin^2 \phi).\end{aligned}$$

Такая система имеет первый интеграл $r^2(1 + \sin^2 \phi) \equiv C^2$. Тогда решение можно получить с помощью эллиптических функций:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(K - \sqrt{2}Ct), & k &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ r &= \frac{C}{\sqrt{1 + \operatorname{cn}^2(K - \sqrt{2}Ct)}}.\end{aligned}$$

Таким образом, решение вертикальной подсистемы имеет вид

$$\begin{aligned}h_1 &= -\frac{C}{\sqrt{1 + \operatorname{cn}^2(K - \sqrt{2}Ct)}}, \\ h_2 &= r \operatorname{sn}(K - \sqrt{2}Ct), \\ h_3 &= r \operatorname{cn}(K - \sqrt{2}Ct).\end{aligned}$$

Это решение в частном случае приведено на рисунке 1.

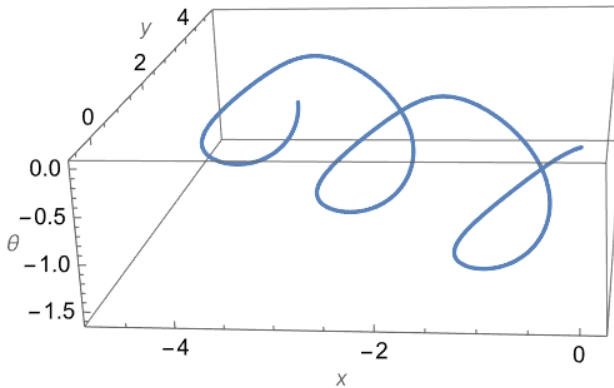


РИСУНОК 1. График динамики системы при $h_1(0) = 1, h_2(0) = 0, h_3(0) = 1, t \in [0, 10]$.

Горизонтальная подсистема $\dot{q} = -h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3$ имеет решения

$$(10) \quad \dot{x} = -r \cos \theta + r \operatorname{cn}(K - \sqrt{2}Ct) \sin \theta,$$

$$(11) \quad \dot{y} = -r \sin \theta - r \operatorname{cn}(K - \sqrt{2}Ct) \cos \theta,$$

$$(12) \quad \dot{\theta} = r \operatorname{sn}(K - \sqrt{2}Ct).$$

5.2. Нормальный случай принципа максимума Понтрягина

Пусть $\nu = -1$. Покажем, что экстремали являются траекториями гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$, при этом $H = -\frac{1}{2}$, $h_1 < 0$.

Рассмотрим условие максимума ПМП для гамильтониана

$$h_u = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 + \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2} \rightarrow \max_{u_1 \geq \sqrt{u_2^2 + u_3^2}}.$$

Пусть $h_1 \geq \sqrt{h_2^2 + h_3^2}$. Тогда, полагая $u = k(h_1, h_2, h_3)$, получаем $h_u \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому в этом случае экстремалей нет.

Пусть $-\sqrt{h_2^2 + h_3^2} < h_1 < \sqrt{h_2^2 + h_3^2}$. Полагая $u_1 = k\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$, $u_2 = kh_2$, $u_3 = kh_3$, получаем $h_u = k\sqrt{h_2^2 + h_3^2}(h_1 + \sqrt{h_2^2 + h_3^2}) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому в этом случае экстремалей нет.

Пусть $h_1 = -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$. Повороты вокруг оси h_1 являются симметриями задачи. Применяя такие повороты, можно получить $-h_1 = h_2 > 0$, $h_3 = 0$. Полагая $u_1 = \rho \operatorname{ch} \varphi$, $u_2 = \rho \operatorname{sh} \varphi$, $u_3 = 0$, получаем $h_u = \rho(h_1(\operatorname{sh} \varphi - \operatorname{ch} \varphi) + 1) \rightarrow +\infty$ при $\rho \rightarrow +\infty$. Поэтому в этом случае экстремалей нет.

Пусть $h_1 < -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}$. Если $u_1 = \sqrt{u_2^2 + u_3^2} > 0$, то $h_u < 0$. Пусть $u_1 > \sqrt{u_2^2 + u_3^2}$. Положим $h_1 = -\rho \operatorname{ch} \varphi$, $h_2 = \rho \operatorname{sh} \varphi \cos \psi$, $h_3 = \rho \operatorname{sh} \varphi \sin \psi$, $u_1 = r \operatorname{ch} \theta$, $u_2 = r \operatorname{sh} \theta \cos \gamma$, $u_3 = r \operatorname{sh} \theta \sin \gamma$. Тогда $h_u = r[1 - \rho(\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \theta \cos(\psi - \gamma))]$. Если $\rho < 1$, то $h_u \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$, поэтому в этом случае экстремалей нет. Если $\rho > 0$, то h_u достигает максимального значения при $r = 0$, поэтому в этом случае нетривиальных экстремалей нет. Наконец, если $\rho = 1$, то h_u принимает максимальное значение при $\gamma = \psi$, $\theta = \varphi$; при этом $u_1 = -h_1$, $u_2 = h_2$, $u_3 = h_3$. Равенство $\rho = 1$ означает, что $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = -\frac{1}{2}$, $h_1 < 0$.

Гамильтонова система ПМП имеет вид

$$(13) \quad \dot{h}_1 = -h_2 h_3,$$

$$(14) \quad \dot{h}_2 = -2h_1 h_3,$$

$$(15) \quad \dot{h}_3 = h_2 h_1,$$

$$(16) \quad \dot{x} = -h_1 \cos \theta + h_3 \sin \theta,$$

$$(17) \quad \dot{y} = -h_1 \sin \theta - h_3 \cos \theta,$$

$$(18) \quad \dot{\theta} = h_2.$$

Это в точности гамильтонова система с гамильтонианом H . В силу этой системы $h_1^2 + h_3^2 \equiv \text{const}$, обозначим $h_1 = r \cos \phi$, $h_3 = r \sin \phi$. Тогда

$$(19) \quad \dot{\phi} = h_2,$$

$$(20) \quad \dot{h}_2 = -r^2 \sin 2\phi.$$

5.2.1. Интегрируемость гамильтоновой системы

ТЕОРЕМА 2. Гамильтонова система (13)–(18) интегрируема по Лиувиллю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно найти 3 первых интеграла гамильтоновой системы, которые находятся в инволюции (скобка Пуассона равна нулю) и независимы (градиенты линейно независимы почти всюду) [15].

Обозначим через $X \in \text{Vec}(SE(2))$ правоинвариантное векторное поле, равное $\frac{\partial}{\partial \theta}$ в единице группы, тогда $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}$. Пусть $f(\lambda) = \langle \lambda, X(q) \rangle$ есть правоинвариантный гамильтониан.

Рассмотрим гамильтонианы $H = 1/2(-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$, $C = 1/2(h_1^2 + h_3^2)$ и f . Очевидно, что они находятся в инволюции. Для проверки их независимости вычислим в канонических координатах минор

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial \psi_x} & \frac{\partial C}{\partial \psi_x} & \frac{\partial f}{\partial \psi_x} \\ \frac{\partial H}{\partial \psi_y} & \frac{\partial C}{\partial \psi_y} & \frac{\partial f}{\partial \psi_y} \\ \frac{\partial H}{\partial \psi_\theta} & \frac{\partial C}{\partial \psi_\theta} & \frac{\partial f}{\partial \psi_\theta} \end{vmatrix}.$$

В точке $\theta = 0$, $\psi_x = 1$, $\psi_y = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $\psi_\theta = 1$ имеем $M = 1$. Поэтому полином M почти всюду отличен от нуля. \square

5.2.2. Интегрирование вертикальной подсистемы

В этом пункте мы интегрируем уравнение маятника (19), (20). Условия $H = -\frac{1}{2}$, $h_1 < 0$ означают, что

$$(21) \quad h_2^2 - r^2 \cos 2\phi = -1$$

и $\cos \phi < 0$. Из равенства (21) получаем $r > 0$.

Обозначим

$$2\phi = \gamma, \quad \frac{\sqrt{2}h_2}{r} = c, \quad \sqrt{2}rt = s, \quad ' = \frac{d}{ds}.$$

Тогда уравнения (19), (20) переписываются в виде

$$(22) \quad \gamma' = c, \quad c' = -\sin \gamma.$$

Уравнение маятника (22) имеет первый интеграл

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \gamma.$$

Равенство (21) принимает форму $r^2 E = -1$, откуда $E \in [-1, 0)$.

Эллиптические координаты

В соответствии с общей конструкцией, разработанной в [16], мы вводим эллиптические координаты (ϕ, k) на области $E \in [-1, 0)$, где k — перепараметризованная энергия, а ϕ — время движения маятника (22). Мы используем функции Якоби $\operatorname{am}(\phi, k)$, $\operatorname{cn}(\phi, k)$, $\operatorname{sn}(\phi, k)$, $\operatorname{dn}(\phi, k)$, $E(\phi, k) = \int_0^\phi \operatorname{dn}^2(t, k) dt$; кроме того, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [17]. Положим

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E+1}{2}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{c^2}{4}} \in [0, 1/\sqrt{2}), \\ \sin \frac{\gamma}{2} &= -k \operatorname{sn}(\phi, k), \\ \cos \frac{\gamma}{2} &= -\operatorname{dn}(\phi, k), \\ \frac{c}{2} &= k \operatorname{cn}(\phi, k), \quad \phi \in [0, 4K(k)]. \end{aligned}$$

Параметризация траекторий вертикальной подсистемы

В эллиптических координатах поток маятника (22) выпрямляется:

$$\phi' = 1, \quad k' = 0.$$

Таким образом, вертикальная подсистема нормальной гамильтоновой системы (22) интегрируется тривиально: достаточно подставить $\phi_s = \phi + s$, $k \equiv \operatorname{const}$ в формулы эллиптических координат. Получаем следующую параметризацию траекторий системы (22):

$$\begin{aligned} \sin \frac{\gamma_s}{2} &= -k \operatorname{sn}(\phi_s, k), \\ \cos \frac{\gamma_s}{2} &= -\operatorname{dn}(\phi_s, k), \\ \frac{c_s}{2} &= k \operatorname{cn}(\phi_s, k). \end{aligned}$$

5.2.3. Интегрирование горизонтальной подсистемы

Горизонтальная подсистема гамильтоновой системы ПМП имеет вид

$$\begin{aligned}\theta' &= \frac{c}{2}, \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos \frac{\gamma}{2} \cos \theta + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta \right), \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\gamma}{2} \sin \theta + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta \right).\end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, получаем следующие выражения для экстремальных траекторий:

$$\begin{aligned}\cos \theta_s &= \operatorname{dn} \phi_s \operatorname{dn} \phi + k^2 \operatorname{sn} \phi_s \operatorname{sn} \phi, & \sin \theta_s &= k \operatorname{sn} \phi_s \operatorname{dn} \phi - k \operatorname{dn} \phi_s \operatorname{sn} \phi, \\ x_s &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{dn} \phi(s + 2E(\phi) - 2E(\phi_s)) + 2k^2 \operatorname{sn} \phi (\operatorname{cn} \phi_s - \operatorname{cn} \phi)), \\ y_s &= \frac{k}{\sqrt{2}} (2\operatorname{dn} \phi (\operatorname{cn} \phi - \operatorname{cn} \phi_s) + s \operatorname{sn} \phi - 2\operatorname{sn} \phi (E(\phi_s) - E(\phi))).\end{aligned}$$

6. Заключение

В данной работе проведено исследование лоренцевой задачи на группе $SE(2)$. Получены важные теоретические результаты:

- (1) доказана полная управляемость рассматриваемой системы;
- (2) доказано отсутствие глобально оптимальных траекторий;
- (3) применен принцип максимума Понтрягина, доказана интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы ПМП в нормальном случае;
- (4) в аномальном и нормальном случаях получена параметризация экстремальных траекторий с помощью эллиптических функций Якоби.





Ввиду отсутствия оптимальных траекторий в рассмотренной задаче на группе $SE(2)$ возникает естественный вопрос о поведении аналогичной лоренцевой задачи на односвязной накрывающей группы $SE(2)$. Этот вопрос отложен для дальнейших исследований.

Благодарность

Авторы благодарны анонимному рецензенту за полезные замечания по изложению в работе.

Список использованных источников

- [1] Perlick V. *Gravitational lensing from a spacetime perspective* // Living Reviews in Relativity.– 2004.– Vol. **7**.– id. 9. ↑³²⁸
- [2] Müller O., Sánchez M. *An invitation to Lorentzian geometry* // Jahresber. Dtsch. Math. Ver.– 2014.– Vol. **115**.– Pp. 153–183. ↑³²⁸
- [3] Beem J. K., Ehrlich P. E., Easley K. L. *Global Lorentzian Geometry*, Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 2nd ed.– CRC Press.– 1996.– ISBN 9780824793241.– 656 pp. ↑^{328, 329}
- [4] Müller O. *Lorentzian Gromov–Hausdorff theory and finiteness results* // Gen. Relativ. Gravit.– 2022.– Vol. **54**.– id. 117.– 17 pp. ↑³²⁸
- [5] Borcea C., Streinu I. *Periodic tilings and auxetic deployments* // Mathematics and Mechanics of Solids.– 2020.– Vol. **26**.– No. 2.– Pp. 199–216. ↑³²⁸
- [6] Franco N. *The Lorentzian distance formula in noncommutative geometry* // Journal of Physics: Conference Series.– 2018.– Vol. **968**.– No. 1.– id. 012005.– 16 pp. ↑³²⁸
- [7] Иванов А. О., Тужилин А. О. *Лекции по классической дифференциальной геометрии*.– М.: Университетская книга; Логос.– 2009.– ISBN 978-5-98704-301-8.– 224 с. ↑³²⁸
- [8] Sachkov Yu.L. *Lorentzian distance on the Lobachevsky plane* // Nonlinearity.– 2024.– Vol. **37**.– No. 9.– id. 095027.– 35 pp. ↑³²⁸
- [9] Lokutsievskiy L. V., Podobryaev A. V. *Existence theorem for sub-Lorentzian problems* // J. Dyn. Control Syst.– 2024.– Vol. **30**.– id. 10. ↑
- [10] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*.– М.: Наука.– 1961.– 391 с. ↑³³¹
- [11] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления*.– М.: Физматлит.– 2005.– ISBN 5-9221-0532-9.– 392 с. ↑^{329, 331}
- [12] Galyaev I., Sachkov Yu. *Lorentzian problems on the Heisenberg group* // Journal of Mathematical Sciences.– 2025.– Vol. **295**.– Pp. 345–358. ↑^{328, 329}
- [13] Сачков Ю. Л. *Существование сублоренцевых длиннейших* // Дифференциальные уравнения.– 2023.– Т. **59**.– № 12.– С. 1702–1709; Sachkov Y. L. *Existence of sub-Lorentzian longest curves* // Diff. Equat.– 2023.– Vol. **59**.– No. 12.– Pp. 1769–1777. * * ↑
- [14] Сачков Ю. Л. *Теория управления на группах Ли* // Оптимальное управление, СМФН.– т. **27**, М.: РУДН.– 2008.– С. 5–59; Sachkov Y. L. *Control theory on Lie groups* // J. Math. Sci.– 2009.– Vol. **156**.– No. 3.– Pp. 381–439. * ↑³²⁹
- [15] Сачков Ю. Л. *Введение в геометрическую теорию управления*.– М.: Ленанд.– 2021.– ISBN 978-5-9710-8918-6.– 160 с. ↑³³⁴
- [16] Sachkov Yu. *Maxwell strata in Euler’s elastic problem* // Journal of Dynamical and Control Systems.– 2008.– Vol. **14**.– Pp. 169–234. ↑³³⁵

- [17] Whittaker E. T., Watson G. N. *A Course of Modern Analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of principal transcendental functions* // Nature.– 1920.– Vol. **106**.– No. 531.– Pp. 169–234.  [↑335](#)
- [18] Сачков Ю. Л., Сачкова Е. Ф. *Сублоренцева задача на группе Гейзенберга* // Математические заметки.– 2023.– Т. **113**.– № 1.– С. 154–157; Yu. L. Sachkov, E. F. Sachkova *Sub-Lorentzian problem on the Heisenberg group* // Math. Notes.– 2023.– Vol. **113**.– No. 1.– Pp. 159–162.    [↑](#)

Поступила в редакцию 26.03.2026;
 одобрена после рецензирования 11.05.2026;
 принята к публикации 22.05.2026;
 опубликована онлайн 27.06.2026.

Рекомендовал к публикации

д.т.н. А. М. Цирлин

Информация об авторах:



Юрий Леонидович Сачков

д.ф.-м.н., Руководитель исследовательского центра процессов управления Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН. Основные научные интересы: математическая теория управления.

 0000-0002-3998-3177
 e-mail: yusachkov@gmail.com



Иван Андреевич Галяев

к.ф.-м.н., н.с. института проблем управления им. А.В. Трапезникова РАН. Основные научные интересы: математическая теория управления.

 0000-0001-6596-4474
 e-mail: ivan.galyaev@yandex.ru

Авторы внесли равный вклад в подготовку публикации.

Декларация об отсутствии личной заинтересованности: благополучие авторов не зависит от результатов исследования.

UDC 517.977

 10.25209/2079-3316-2026-17-2-327-341


Lorentzian problem on the group $SE(2)$

 Yuriy Leonidovich **Sachkov**¹, Ivan Andreevich **Galyaev**²
¹ Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Ves'kovo, Russia

² V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

 yusachkov@gmail.com

Abstract. From the perspective of global differential geometry, general relativity is described by Lorentzian geometry. This paper explores Lorentzian geometry on the group $SE(2)$: it solves the problem of finding Lorentzian longest paths that maximize the length functional along admissible curves. For the Lorentzian problem on the group $SE(2)$, the absence of globally optimal trajectories is proven. Complete controllability of the system under consideration is demonstrated. Pontryagin's maximum principle is applied. Liouville integrability of the Hamiltonian system of Pontryagin's maximum principle is proven. Abnormal and normal extremals are parameterized by Jacobi elliptic functions. (*In Russian*).

Key words and phrases: Lorentzian length maximizers, attainable set, extremals, sub-Lorentzian geometry, Lie groups


2020 *Mathematics Subject Classification:* 93B27; 93C20, 49K20

Acknowledgments: This research was carried out under Research Project No. FL-9524115148 of the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan

For citation: Yuriy L. Sachkov, Ivan A. Galyaev. *Lorentzian problem on the group $SE(2)$* . Program Systems: Theory and Applications, 2026, **17**:2(71), pp. 327–341. (*In Russ.*). https://psta.psir.ru/read/psta2026_2_327-341.pdf

References

- [1] V. Perlick. “Gravitational lensing from a spacetime perspective”, *Living Reviews in Relativity*, **7** (2004), id. 9. [doi](#)
- [2] O. Müller, M. Sánchez. “An invitation to Lorentzian geometry”, *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, **115** (2014), pp. 153–183. [doi](#)
- [3] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*, Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 2nd ed., CRC Press, 1996, ISBN 9780824793241, 656 pp.
- [4] O. Müller. “Lorentzian Gromov–Hausdorff theory and finiteness results”, *Gen. Relativ. Gravit.*, **54** (2022), id. 117, 17 pp. [doi](#)
- [5] C. Borcea, I. Streinu. “Periodic tilings and auxetic deployments”, *Mathematics and Mechanics of Solids*, **26**:2 (2020), pp. 199–216. [doi](#)
- [6] N. Franco. “The Lorentzian distance formula in noncommutative geometry”, *Journal of Physics: Conference Series*, **968**:1 (2018), id. 012005, 16 pp. [doi](#)
- [7] A. O. Ivanov, A. O. Tuzhilin. *Lectures on Classical Differential Geometry*, Universitetskaya kniga; Logos, M., 2009, ISBN 978-5-98704-301-8, 224 pp. (in Russian).
- [8] Yu. L. Sachkov. “Lorentzian distance on the Lobachevsky plane”, *Nonlinearity*, **37**:9 (2024), id. 095027, 35 pp. [doi](#)
- [9] L. V. Lokutsievskiy, A. V. Podobryaev. “Existence theorem for sub-Lorentzian problems”, *J. Dyn. Control Syst.*, **30** (2024), id. 10. [doi](#)
- [10] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskij, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishhenko. *Mathematical Theory of Optimal Processes*, Nauka, M., 1961, 391 pp. (in Russian).
- [11] A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov. *Geometric Control Theory*, Fizmatlit, M., 2005, ISBN 5-9221-0532-9, 392 pp. (in Russian).
- [12] I. Galyaev, Yu. Sachkov. “Lorentzian problems on the Heisenberg group”, *Journal of Mathematical Sciences*, **295** (2025), pp. 345–358. [doi](#)
- [13] Yu. L. Sachkov. “Sushhestvovanie sublorencevyx dlinnejshix”, *Differencial’nye uravneniya*, **59**:12 (2023), pp. 1702–1709; Y. L. Sachkov. “Existence of sub-Lorentzian longest curves”, *Diff. Equat.*, **59**:12 (2023), pp. 1769–1777. [doi](#)
- [14] Yu. L. Sachkov. “Teoriya upravleniya na gruppax Li”, *Optimal’noe upravlenie, SMFN*, vol. **27**, RUDN, M., 2008, pp. 5–59; Y. L. Sachkov. “Control theory on Lie groups”, *J. Math. Sci.*, **156**:3 (2009), pp. 381–439. [doi](#)
- [15] Yu. L. Sachkov. *Introduction to Geometric Control Theory*, Lenand, M., 2021, ISBN 978-5-9710-8918-6, 160 pp. (in Russian).
- [16] Yu. Sachkov. “Maxwell strata in Euler’s elastic problem”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **14** (2008), pp. 169–234. [doi](#)

- [17] E. T. Whittaker, G. N. Watson. “A Course of Modern Analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of principal transcendental functions”, *Nature*, **106**:531 (1920), pp. 169–234. 
- [18] Yu. L. Sachkov, E. F. Sachkova. “Sublorenceva zadacha na gruppe Gejzenberga”, *Matematicheskie zametki*, **113**:1 (2023), pp. 154–157; L. Sachkov Yu., F. Sachkova E.. “Sub-Lorentzian problem on the Heisenberg group”, *Math. Notes*, **113**:1 (2023), pp. 159–162. 